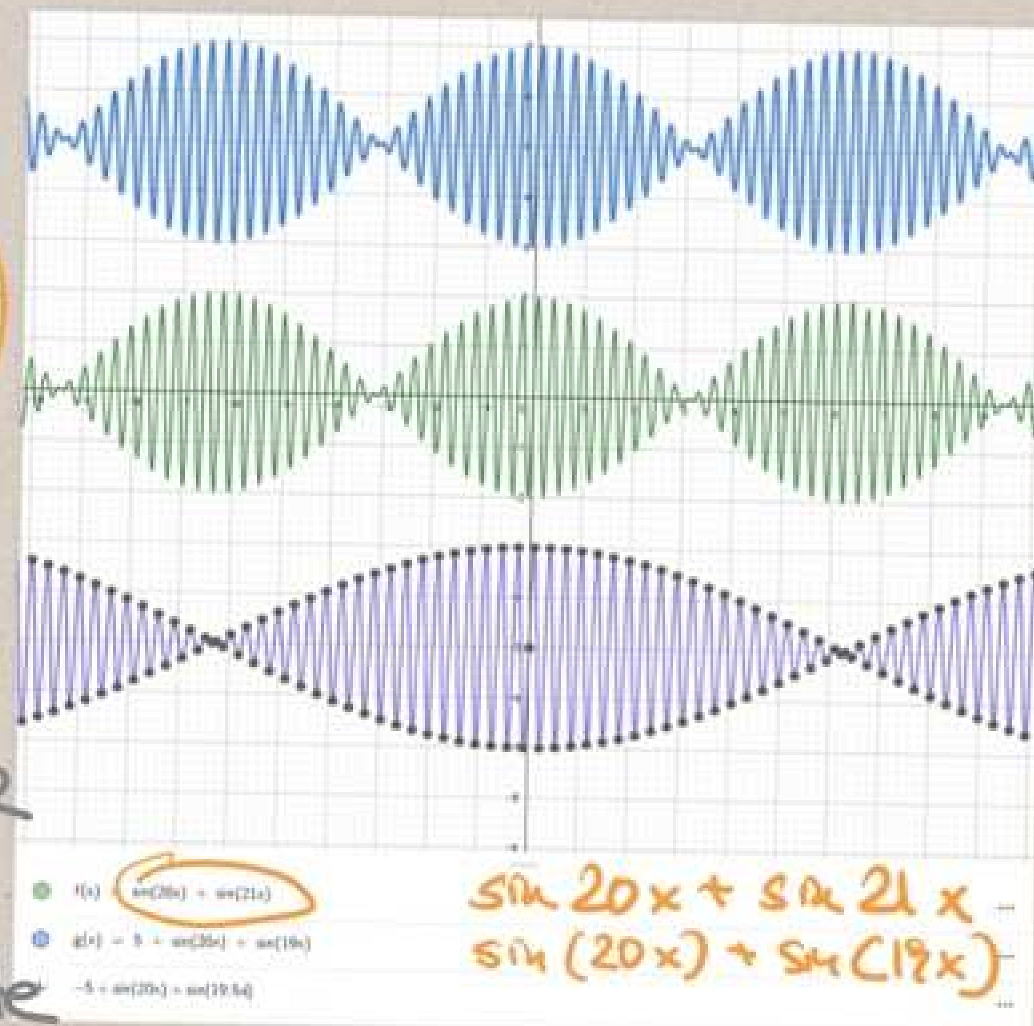
MATHEMATIK & Musik

VORLESUNG IV

2. Mai 2022

SCHWEBUNGEN

$$\sin(x+\varepsilon x) + \sin(x-\varepsilon x)$$
$$= 2\sin(x)\cdot\cos(\varepsilon x)$$



- Amplitude verdoppelt
- Frequenz Mittelwert
- Moduliert durch eine Schwingung mit Frequenz der Hälfte des Abstands

Hörbeispiel als Video in Moodle

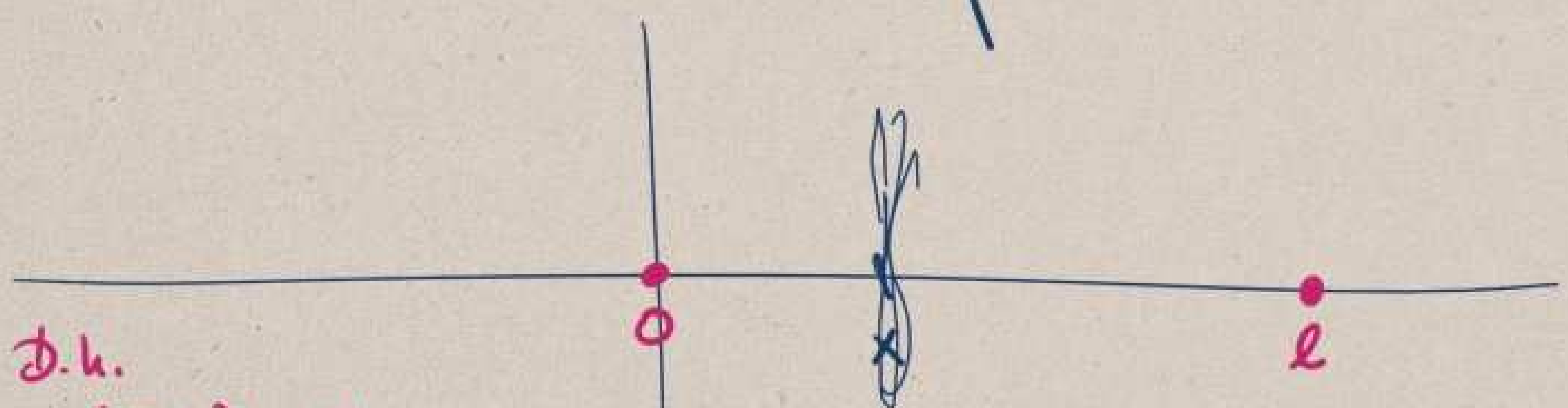
(14) Angenommen, ein Klavierstimmer hat von den drei Saiten für einen Klang die mittlere auf 220 Hz gestimmt und die beiden anderen weichen jeweils um 2 Hz nach unten und oben ab (218 Hz und 222 Hz). Er hört eine Schwebung mit Frequenz 1 Hz, bei der sich jeweils ein lauter Ton und ein leiserer Ton der gleichen Frequenz abwechseln. (Wenn Sie sich dies nicht vorstellen können, erzeugen Sie den Ton mittels eines Tongenerators mit drei Sinusschwingungen mit 218, 220 und 222 Hz.) Welche Frequenz hat der Ton? Erklären Sie die Frequenz und das Klangverhalten mathematisch unter Verwendung von (13).

[*Hinweis.* Verwenden Sie (13), um zu erkennen, daß der Klang eine Sinusschwingung ist, die durch die Funktion $4\cos^2(x) - 1$ moduliert ist. Betrachten Sie das Verhalten dieser Funktion und erklären Sie damit die Abfolge des lauten und leiseren Tons.]

Das letzte Hörbeispiel bezieht sich auf Trainingsgelegenheit (14).

Die schwingende Saite

Die schwingende Saite der Länge l ist an den Punkten 0 und l fixiert:



D.h.

$$\varphi(0,t) = 0 = \varphi(l,t)$$

Die Funktion φ ist abhängig von x und t und verhält sich an der Stelle x wie ein Federpendel, aber mit zusätzlichen Einschränkungen durch die Verbindung mit den anderen Massenpunkten.

Die **Wellengleichung** für die schwingende Saite ist:

OHNE HER-LEITUNG

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}}$$

D.h. Leite ich φ zweimal nach t ab, so erhalte ich c^2-mal das, was man bekommt, wenn man φ zweimal nach x ableitet.

So etwas heißt: **partielle Differential-gleichung**

Was ist c^2?

Dies ist eine von physikalischen Gegebenheiten bestimmte Konstante, die mit Spannung und Gewicht der Saite zu tun hat.

Etwas mehr zu c:

$$c = \sqrt{\frac{T}{\lambda_m}}$$

sagen uns die Physiker, wobei

T die Spannkraft gemessen in N (Newton)

λ_m die lineare Dichte der Saite gemessen in kg/m (Kilogramm pro Meter).

Zusammenhang zwischen der gewöhnlichen Dichte, bezeichnet als ρ, gemessen in kg/m^3 und λ_m ist:

(*) $$\boxed{\lambda_m = \rho \cdot A}$$

wobei A der Flächeninhalt des Querschnitts der Saite ist.

Ebenso:

Die mechanische Spannung, bezeichnet mit σ, ist gegeben durch

(**) $$\boxed{T = \sigma \cdot A.}$$

Jean le Rond d'Alembert
FRS

Pastel portrait of d'Alembert by Maurice Quentin de La Tour, 1753

Born	Jean-Baptiste le Rond d'Alembert 16 November 1717 Paris, France
Died	29 October 1783 (aged 65) Paris, France

Die Lösung der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

wird durch den SATZ VON D'ALEMBERT wie folgt charakterisiert:

[Der d'Alembertsche Trick beinhaltet das Faktorisieren des sogenannten Differentialoperators $\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]$ und somit wird die Funktion φ aufgespalten.]

Falls φ eine Lösung der Wellengleichung ist, so existieren geeignete Funktionen f und g, so daß

$$\boxed{\varphi(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct).}$$

OHNE BEWEIS.

D'ALEMBERT (1) $\varphi(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$

EINSPANNUNG DER SAITE (2) $\varphi(0,t) = 0 = \varphi(\ell,t)$ für alle t

Setze (2) in (1) ein:

$$0 = \varphi(0,t) = f(0+ct) + g(0-ct)$$

$$= f(ct) + g(-ct) \quad \text{für alle } t$$

Mit anderen Worten:

(3) $$f(t) = -g(-t) \quad \text{für alle } t.$$

Also verwende (3), um in (1) g loszuwerden:

$$\boxed{\varphi(x,t) = f(x+ct) - f(ct-x)} \quad (4)$$

Nun verwende $\varphi(\ell,t) = 0$ für alle t.

$$0 = \varphi(\ell,t) = f(\ell+ct) - f(-\ell+ct)$$

$$\Longrightarrow \boxed{f(\ell+ct) = f(-\ell+ct)} \quad \text{für alle } t$$

Also gilt für jedes s:

$$\boxed{f(s) = f(s+2\ell)}$$

Also ist f eine periodische Funktion mit Periode 2ℓ.

Warum ist das nützlich?

Weil wir für periodische Funktionen eine ganze Theorie der Darstellungen haben:

die sogenannten

Fourier-Entwicklungen

[Und zwar mit Hilfe trigonometrischer Funktionen.]

Bevor wir dahin kommen, sehen wir uns konkrete Lösungen an.

Die einfachste und bekannteste Lösung der Wellengleichung ist die

BERNOULLI-Lösung.

Daniel Bernoulli

Portrait of Daniel Bernoulli (1720-1725)

Born	8 February 1700 Groningen, Dutch Republic
Died	27 March 1782 (aged 82) Basel, Republic of the Swiss
Nationality	Swiss

$$f(x+ct) := \cos\left(\frac{\pi(x+ct)}{l}\right)$$

D'ALEMBERT + ZUSATZBEDINGUNGEN:

((4) auf Seite 6)

$$\varphi(x,t) = f(x+ct) - f(ct-x) = \cos\left(\frac{\pi x + ct\pi}{l}\right) - \cos\left(\frac{-\pi x + ct\pi}{l}\right)$$

Wir werden später noch nachrechnen, daß dies eine Sinusschwingung mit Frequenz $\frac{c}{2l}$ ist, also mit den physikalischen Größen $\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{\lambda_m}}$.

[Siehe Seite 14].

Überprüfen wir zunächst, daß φ in der Bernoulli-Lösung tatsächlich eine Lösung der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad \text{ist:}$$

$$\varphi(x,t) = \cos\left(\frac{\pi x + \pi c t}{\ell}\right) - \cos\left(\frac{\pi c t - \pi x}{\ell}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi = -\frac{\pi c}{\ell}\sin\left(\frac{\pi x + \pi c t}{\ell}\right) + \frac{\pi c}{\ell}\sin\left(\frac{\pi c t - \pi x}{\ell}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\varphi = -\frac{\pi c}{\ell}\cdot\frac{\pi c}{\ell}\cos\left(\frac{\pi x + \pi c t}{\ell}\right) + \frac{\pi c}{\ell}\cdot\frac{\pi c}{\ell}\cos\left(\frac{\pi c t - \pi x}{\ell}\right)$$

$$= -\left(\frac{\pi c}{\ell}\right)^2 \varphi$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\varphi = -\frac{\pi}{\ell}\sin\left(\frac{\pi x + \pi c t}{\ell}\right) - \frac{\pi}{\ell}\sin\left(\frac{\pi c t - \pi x}{\ell}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\varphi = -\frac{\pi^2}{\ell^2}\cos\left(\frac{\pi x + \pi c t}{\ell}\right) + \frac{\pi^2}{\ell^2}\cos\left(\frac{\pi c t - \pi x}{\ell}\right)$$

$$= -\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \varphi$$

Also gilt $c^2 \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi.$

Wie gesagt: die Bernoulli-Lösung gibt eine Sinus-Schwingung mit Frequenz

$$\boxed{\nu = \frac{c}{2l} = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{\lambda_m}}}$$

DIE MERSENNESCHE GLEICHUNG.

The Reverend
Marin Mersenne

Born	8 September 1588 Oizé, Maine, France
Died	1 September 1648 (aged 59) Paris, France
Nationality	French

Mit Spannkraft, linearer Dichte und Saitenlänge können wir die Frequenz ausrechnen.

Ebenso:

$$l = \frac{1}{2\nu}\sqrt{\frac{T}{\lambda_m}}$$

gibt Ihnen die Länge der Saite bei vorgegebenem ν, T, λ_m.

Die Gesetze der schwingenden Saite

1. Das Gesetz der Länge

Die Frequenz ist invers proportional zur Saitenlänge.

D.h. Verdopplung der Saitenlänge halbiert die Frequenz.

2. Gesetz der Spannkraft

Die Frequenz ist proportional zur Wurzel der Spannkraft.

D.h. Vervierfachung der Spannkraft verdoppelt die Frequenz.

3. Gesetz der linearen Dichte

$$\boxed{\nu = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{\lambda_m}}}$$

Die Frequenz ist invers proportional zur Wurzel der linearen Dichte.

D.h. Vervierfachung der linearen Dichte halbiert die Frequenz.

Wenn ich das Material gleich lasse (also ρ bleibt gleich), aber die Dicke der Saite verändere, wie verändert sich die lineare Dichte?

$$\lambda_m = \rho \cdot A = \rho \cdot \pi r^2$$

wobei r der Radius der Saite ist

Dies bedeutet:

Verdopplung des Durchmessers (oder des Radius) der Saite halbiert die Frequenz.

Exercises

1. Piano wire is manufactured from steel of density approximately 5,900 kg/m^3. The manufacturers recommend a stress of approximately 1.1×10^9 Newtons/m^2. What is the speed of propagation of waves along the wire? Does it depend on cross-sectional area? How long does the string need to be to sound middle C (262 Hz)?

$$\rho = 5900 \frac{kg}{m^3}$$
$$\sigma = 1{,}1 \times 10^9 \frac{N}{m^2}$$

Stress = mechanische Spannung

Fragen ① Hängt der Ton vom Durchmesser der Saite ab?

② Was muß l sein, damit $\nu = 262$ Hz?

$$\nu = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{\lambda_m}} \qquad l = \frac{1}{2\nu}\sqrt{\frac{T}{\lambda_m}}.$$

Wir müssen die gegebenen Größen ρ und σ mit T und λ_m in Beziehung setzen.

Nach (*) auf Seite 4 haben wir

$$\lambda_m = \rho \cdot A \qquad T = \sigma \cdot A$$

$$\frac{T}{\lambda_m} = \frac{\sigma \cdot A}{\rho \cdot A} = \frac{\sigma}{\rho}.$$

Somit:

$$\boxed{l = \frac{1}{2\nu}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}}$$

Man sieht unmittelbar, daß $\frac{T}{\lambda_m}$ nicht von A abhängt.

$\longrightarrow$ Antwort auf ①

$$\sigma = 1{,}1 \times 10^9 \ N/m^2$$

$$\rho = 5900 \ kg/m^3$$

$$l = \frac{1}{2\nu} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \qquad \nu - 262 \ Hz$$

$$\frac{\sigma}{\rho} = \frac{1{,}1 \times 10^9}{5900} \approx 18644$$

$$\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \approx 432$$

$$l = \frac{216}{262} \approx \boxed{0{,}82 \ m}$$

Die Klaviersaite muß 82 cm lang sein.

→ Antwort auf (2)

Die Formel $l = \frac{1}{2\nu}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} = \frac{216}{\nu}$ erlaubt es uns, die Länge jeder Saite zu berechnen. Falls wir Material oder Spannung ändern, ändert sich der Faktor 216.

Ebenso $\nu = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} = \frac{216}{l}$ erlaubt es uns, die Frequenz bei vorgegebener Länge zu berechnen..

NACHTRAG Die auf Seite 8 versprochene Berechnung der Bernoulli-Gleichung als Sinus:

1. Bernoulli-Gleichung

$$\varphi(x,t) = \cos\left(\frac{\pi x + \pi c t}{\ell}\right) - \cos\left(\frac{\pi c t - \pi x}{\ell}\right)$$

[vgl. Seite 8]

2. Additionstheorem für Kosinus:

$$\cos(a) - \cos(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Falls $a = \frac{\pi x + \pi c t}{\ell}$ und $b = \frac{\pi c t - \pi x}{\ell}$,

dann ist $a+b = \frac{2\pi c t}{\ell}$

und $a-b = \frac{2\pi x}{\ell}$.

Also $\varphi(x,t) = 2\sin\left(\frac{\pi c t}{\ell}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$

Für festes x ist φ also eine Schwingung mit Frequenz $\boxed{\frac{c}{2\ell}}$.

Das war auf Seite 8 behauptet worden!