

MATHEMATIK

& MUSIK

VORLESUNG III

25.4.2022

WARUM EIGENTLICH SINUS?

Federpendel:

Differential-
gleichung

2. Ordnung

$$m \cdot \varphi''(t) = -k \varphi(t)$$

$$\Leftrightarrow \varphi''(t) = -\frac{k}{m} \varphi(t)$$

Schreiben wir $c := \frac{k}{m}$

$$\boxed{\varphi''(t) = -c \varphi(t)}$$

VORLESUNG II: Seite 7

Transformiert in ein System linearer homogener
Differentialgleichungen erster Ordnung mit
konstanten
Koeffizienten:

$$\boxed{\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}}$$

Trick: füge Variable ψ ein, die für
die erste Ableitung von φ steht:

$$\varphi'(t) = \psi(t) \quad \checkmark$$

$$\psi'(t) = -c \varphi(t) \quad \checkmark$$

$$\left(\vec{\varphi}\right)'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & 0 \end{pmatrix} \vec{\varphi}(t)$$

Linear :

$$\vec{\varphi}' = A(x) \cdot \vec{\varphi} + \vec{b}$$

Homogen:

$$\vec{b} = \vec{0}$$

"mit konstanten
Koeffizienten"

$A(x)$ hängt nicht von x ab.

$$(*) \quad \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}.$$

Zusammenfassung aus VL II:

Die Lösungen von $(*)$ bilden eine
zweidimensionalen Untervektorraum
von $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$.

Das bedeutet: alle Lösungen zu finden, ist
gleichbedeutend damit, eine Basis
dieses Lösungsraums anzugeben.

Dies wird funktioniert über das
Matrixexponential.

Das Matrixexponential

A sei eine 2×2 -Matrix

$$A^0 := E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^1 = A$$

$$A^2 = A \cdot A$$

$$A^{k+1} = (A^k) \cdot A$$

Rekursive
Definition.

$$A^k = \begin{pmatrix} a_{11k} & a_{12k} \\ a_{21k} & a_{22k} \end{pmatrix}$$

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

MATRIXEXPONENTIAL

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{11k}}{k!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{12k}}{k!} \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{21k}}{k!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{22k}}{k!} \end{pmatrix}$$

OBACHT:

Diese Werte müssen natürlich
konvergieren. Sonst ist dies
nicht definiert.

Warum muß $\star$ konvergieren?

Wollen zeigen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{ij}^k}{k!}$$

konvergiert!

Wir erinnern uns an die Matrixnorm:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \|A\| = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Dann gilt für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$,

$$\text{Lsg} \quad \|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

Warum?

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot e + b \cdot g & a \cdot f + b \cdot h \\ c \cdot e + d \cdot g & c \cdot f + d \cdot h \end{pmatrix}$$

$$\|AB\| = \sqrt{(ae+bg)^2 + (af+bh)^2 + (ce+dg)^2 + (cf+dh)^2}$$

Die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung besagt in diesem konkreten Fall ∇

$$\begin{aligned} (*) \quad & (ae+bg)^2 \leq (a^2+b^2)(e^2+g^2) \\ & (af+bh)^2 \leq (a^2+b^2)(f^2+h^2) \\ & (ce+dg)^2 \leq (c^2+d^2)(e^2+g^2) \\ & (cf+dh)^2 \leq (c^2+d^2)(f^2+h^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (*) + (**) & \rightarrow \|A \cdot B\| \leq (a^2+b^2)(e^2+g^2+f^2+h^2) + (c^2+d^2)(e^2+g^2+f^2+h^2) \\ & = (a^2+b^2+c^2+d^2)(e^2+f^2+g^2+h^2) \\ & \Rightarrow \|A\| \|B\| \end{aligned}$$

Man nennt dies auch Submultiplikativität der Matrixnorm.

Für Induktion erhalten wir

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k. \quad (*)$$

Damit gilt

$$\|A^k\| = a_{11k}^2 + a_{12k}^2 + a_{21k}^2 + a_{22k}^2.$$

$$a_{mk} \leq \sqrt{\|A^k\|} \leq \sqrt{\|A\|}^k \quad \text{nach } (*)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{mk}}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{\|A\|})^k}{k!}$$

$$= e^{\sqrt{\|A\|}}$$

Somit konvergiert die Reihe $a_{ijk}/k!$, da sie durch eine konvergente Reihe von oben abgeschätzt wurde.

q.e.d. [Matrixexponential ist definiert!]

Theorem (ohne Beweis)

Ist $\vec{\varphi}' = A \vec{\varphi}$ ein lineares homogenes
System Dgl. erster Ordnung mit konstanten Koeff.
von x , so ist die Matrix

$$e^{Ax}$$

eine (von x abhängige) 2×2 -Matrix.

Dann bilden die Spaltenvektoren dieser
Matrix eine Basis des Lösungsvektor-
raumes von $\vec{\varphi}' = A \vec{\varphi}$. bis auf konst.

[Vergleich $\varphi' = a \cdot \varphi$ hatte die ein-
deutige Lösung $x \mapsto e^{ax}$.]

Anwendung auf

$$\vec{\varphi}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & 0 \end{pmatrix}}_{=: A} \vec{\varphi}$$

$$\vec{\varphi}' = A \cdot \vec{\varphi}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^0 = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (-c)^0 \cdot E \quad |$$

$$A^1 = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & 0 \end{pmatrix} = (-c)^0 \cdot A$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \\ = -c \cdot E = (-c)^1 \cdot E$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = -c \cdot E \cdot A = -c \cdot A = (-c)^1 \cdot A$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = -c \cdot E \cdot -c \cdot E = (-c)^2 \cdot E$$

Für Induktion leicht zu zeigen

$$\underline{A^{2k}} = (-c)^k \cdot E = \begin{pmatrix} (-c)^k & 0 \\ 0 & (-c)^k \end{pmatrix} \\ \underline{A^{2k+1}} = (-c)^k \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & (-c)^k \\ (-c)^{k+1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_{nn} = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ (-c)^k & \text{falls } n = 2k. \end{cases}$$

Ähnlich für a_{ij} .

$$A^{2k} = (-c)^k E$$

$$A^{2k+1} = (-c)^k A$$

$$e^{Ax} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{11k} x^k}{k!} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{12k} x^k}{k!} \right. \\ \left. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{21k} x^k}{k!} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{22k} x^k}{k!} \right)$$

$$a_{nn} = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ (-c)^k & \text{falls } n = 2k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{nn} x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-c)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

Ebenso:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{12n} x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-c)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{22n} x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-c)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{21n} x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-c)^{k+1} x^{2k}}{(2k+1)!}$$

MATHEMATISCHE / ANALYTISCHE DEFINITION VON SINUS | KOSINUS:

Als Taybreite:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

VORLESUNG II Seite 4

Vgl. a_{11} :

genauso für a_{22} .

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-c)^k \cdot x^{2k}}{2k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{c^k x^{2k}}{2k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\sqrt{c})^{2k} x^{2k}}{(2k)!}$$

$$= \cos(\sqrt{c} \cdot x)$$

$$= [(\sqrt{c}) \cdot x]^{2k}$$

Now

a_{12} :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-c)^k \cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{c^k \cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\sqrt{c})^{2k} \cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{c}} \frac{(\sqrt{c})^{2k+1} \cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}} \sin(\sqrt{c} x)$$

Genau so

a_{21} :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-c)^{k+1} \cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!} = - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{c^{k+1} \cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= -\sqrt{c} \cdot \sin(\sqrt{c} x)$$

Die Lösung ist

$$e^{Ax} = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{c}x) & \frac{1}{\sqrt{c}} \sin(\sqrt{c}x) \\ -\sqrt{c} \sin(\sqrt{c}x) & \cos(\sqrt{c}x) \end{pmatrix}$$

Nach unserem Theorem sind also die Spaltenvektoren $\begin{pmatrix} \cos(\sqrt{c}x) \\ -\sqrt{c} \sin(\sqrt{c}x) \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{c}} \sin(\sqrt{c}x) \\ \cos(\sqrt{c}x) \end{pmatrix}$ eine Basis der Lösungsvektoren von $\vec{\varphi}' = A \cdot \vec{\varphi}$.

Man beachte, daß $\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$ eine Lösung ist, bei der $\psi = \varphi'$ und φ die ursprünglich gesuchte Lösung.

Daher ist die allgemeine Lösung

$$\lambda \cdot \cos(\sqrt{c}x) + \mu \cdot \sin(\sqrt{c}x)$$

für beliebige λ und μ .

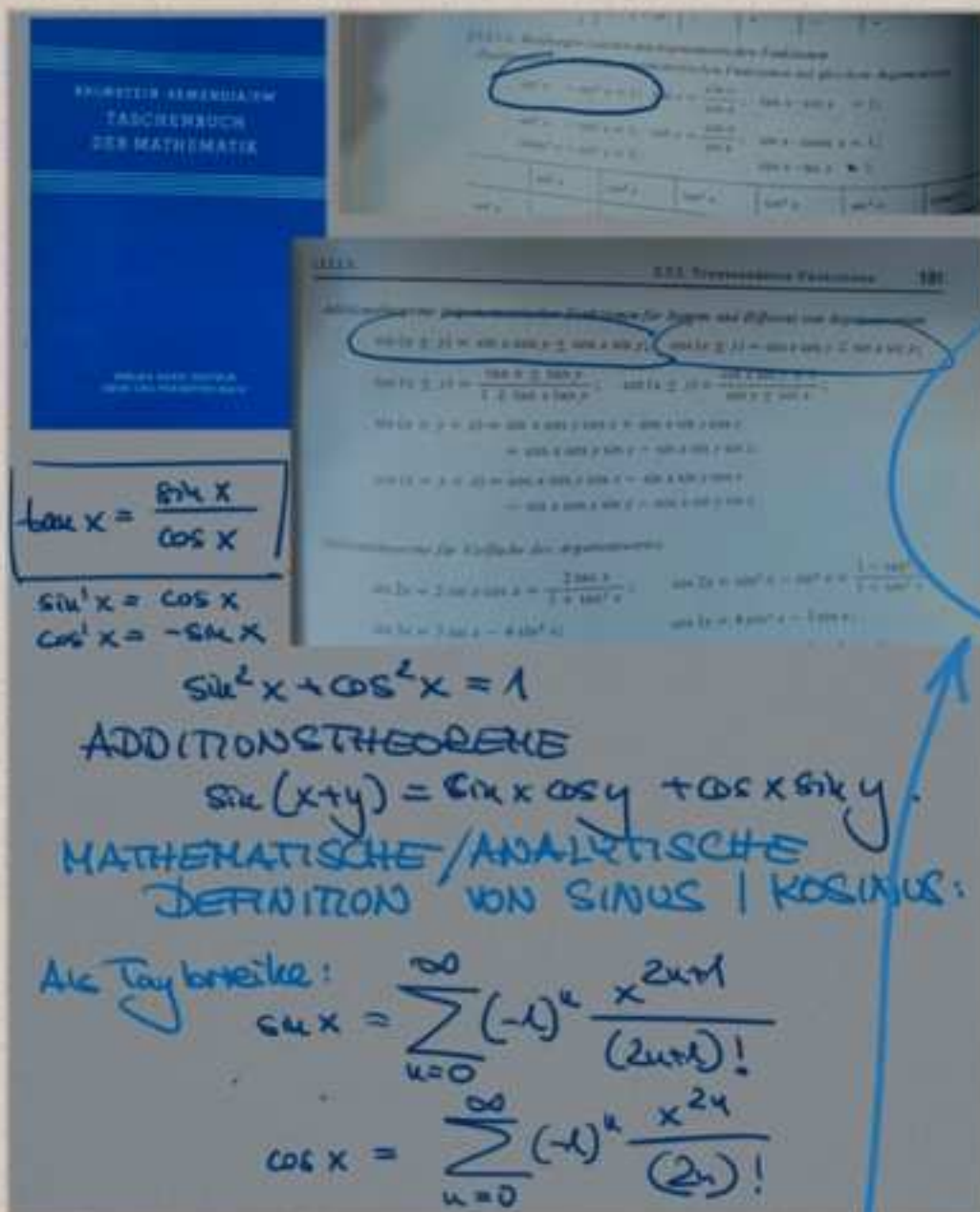
ABER:

Das bedeutet, daß die allgemeine Lösung eine Linearkombination von Sinus & Kosinus ist.

D.h. Warum können wir uns in unseren Diskussionen über Musik dann auf Sinus beschränken.

Die Antwort ist:

Linearkombinationen von Sinus und Kosinus können als phasenverschobene Sinusfunktion aufgefaßt werden.



VORLESUNG II Seite 4

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Beh. Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und α , so
daß
$$\lambda \cdot \cos(\sqrt{c} x) + \mu \sin(\sqrt{c} x) = C \sin(\sqrt{c} x + \alpha)$$

$$\sin(\sqrt{c} \cdot x + \alpha) = \sin(\sqrt{c} \cdot x) \cdot \cos(\alpha) + \cos(\sqrt{c} \cdot x) \cdot \sin(\alpha)$$

Also, falls $\lambda \cdot \cos(\sqrt{c} \cdot x) + \mu \sin(\sqrt{c} \cdot x) = C' \sin(\sqrt{c} \cdot x + \alpha)$

$$= \underbrace{C \cos \alpha}_{= \mu} \sin(\sqrt{c} x) + \underbrace{C \sin \alpha}_{= \lambda} \cos(\sqrt{c} x)$$

$$\lambda \cdot \cos(\sqrt{c} \cdot x) + \mu \sin(\sqrt{c} \cdot x) = C \sin(\sqrt{c} \cdot x + \alpha)$$

$$= \underbrace{C \cos \alpha}_{\mu} \sin(\sqrt{c} \cdot x) + \underbrace{C \sin \alpha}_{\lambda} \cos(\sqrt{c} \cdot x)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \mu = C \cdot \cos \alpha \\ \lambda = C \cdot \sin \alpha \end{array}} \Rightarrow \begin{array}{l} \mu^2 = C^2 \cdot \cos^2 \alpha \quad (1) \\ \lambda^2 = C^2 \cdot \sin^2 \alpha \quad (2) \end{array}$$

Addiere (1) und (2) und erhalte:

$$\mu^2 + \lambda^2 = C^2 \underbrace{(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)}_{=1}$$

$$C = \sqrt{\mu^2 + \lambda^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{\mu}{C}$$

$$\sin \alpha = \frac{\lambda}{C}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\lambda}{C} \cdot \frac{C}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$\text{Setze } \alpha := \arctan\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

$$\text{Erhalte } \lambda \cdot \cos(\sqrt{c} \cdot x) + \mu \sin(\sqrt{c} \cdot x) = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \sin(\sqrt{c} \cdot x + \arctan(\frac{\lambda}{\mu}))$$

SCHWEBUNGEN

Praktisches Problem Ich habe zwei Saiten,
die den gleichen Ton geben sollen;
aber sie sind leicht verstimmt.

D.h. Saite 1 hat Frequenz ν
Saite 2 hat Frequenz $(1+\varepsilon)\nu$

$\sin(x)$ ← Saite 1
 $\sin((1+\varepsilon)x)$ ← Saite 2

Der gemeinsame Ton ist also

$$\sin(x) + \sin((1+\varepsilon)x).$$

Kann ich aus dieser Schwingung er-
kennen um wieviel die Saiten verstimmt
sind?

ADDITIONSTHEOREME:

$$\left. \begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y) \\ \sin(x-y) &= \sin(x) \cdot \cos(y) - \cos(x) \cdot \sin(y) \end{aligned} \right\}$$

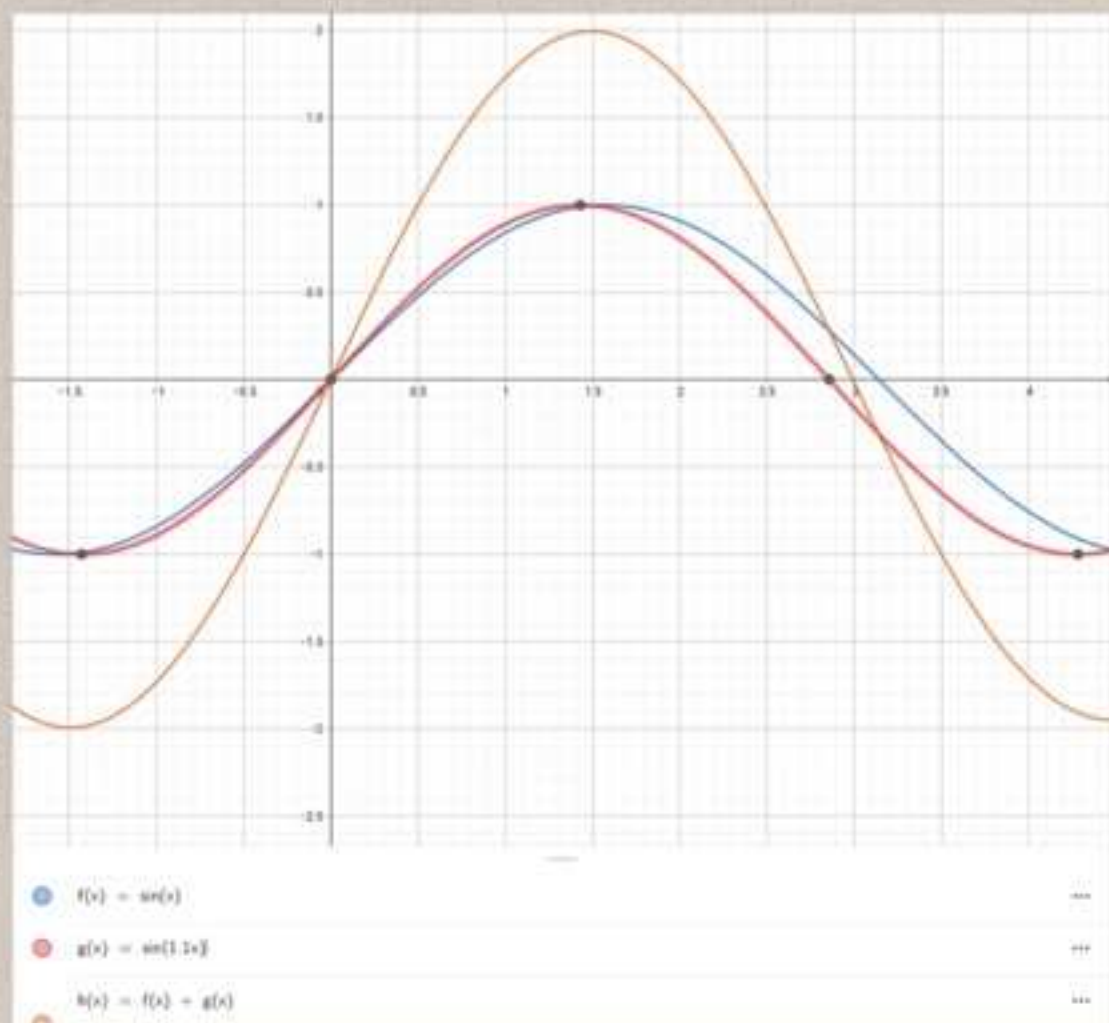
Addiere die beiden:

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2 \sin(x) \cdot \cos(y)$$

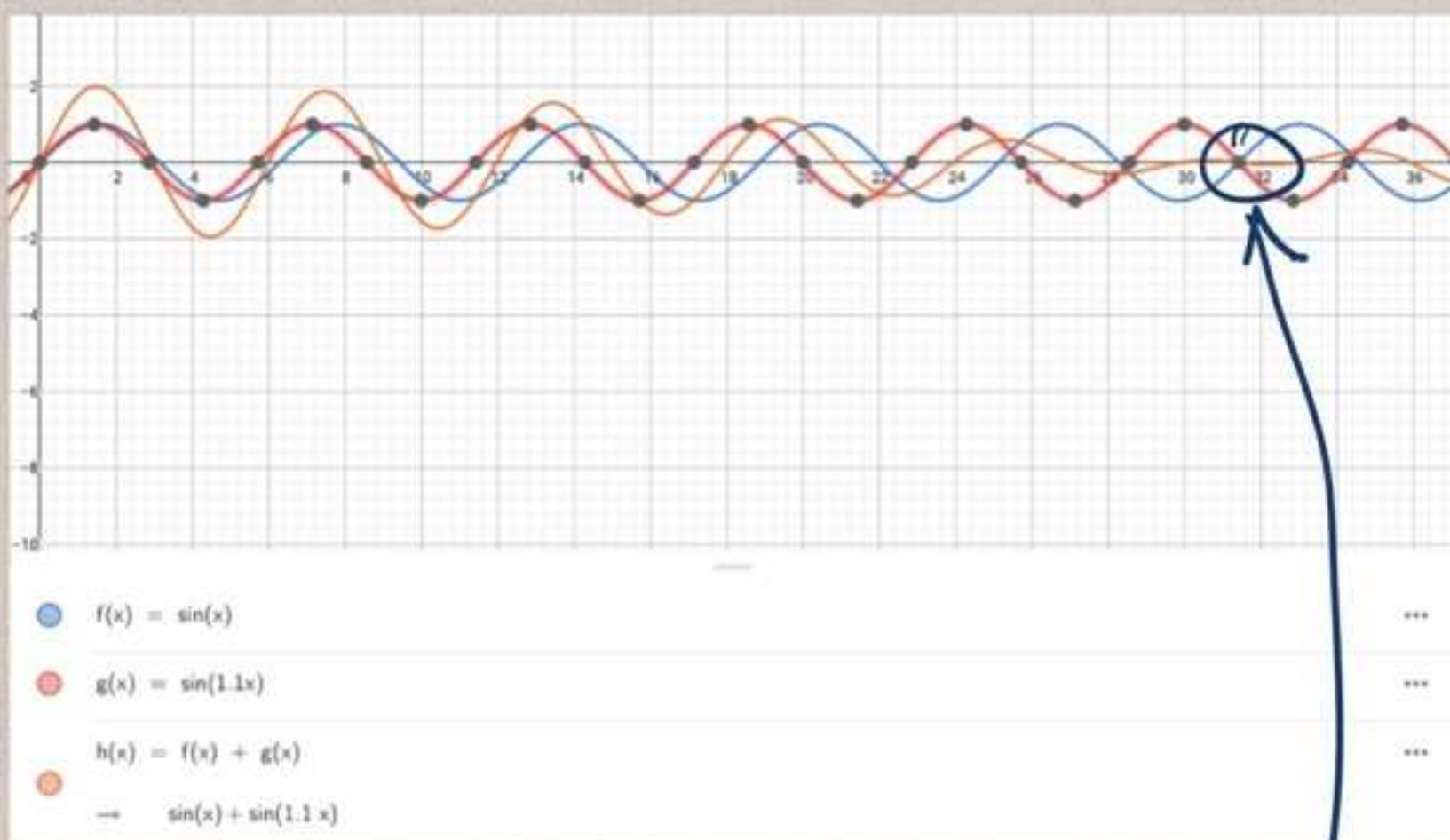
In Worten

Falls y sehr klein ist und die beiden
Seiten jeweils nach unten und oben
um y vom Mittelwert abweichen, so
bleibt der Gesamtwert wie

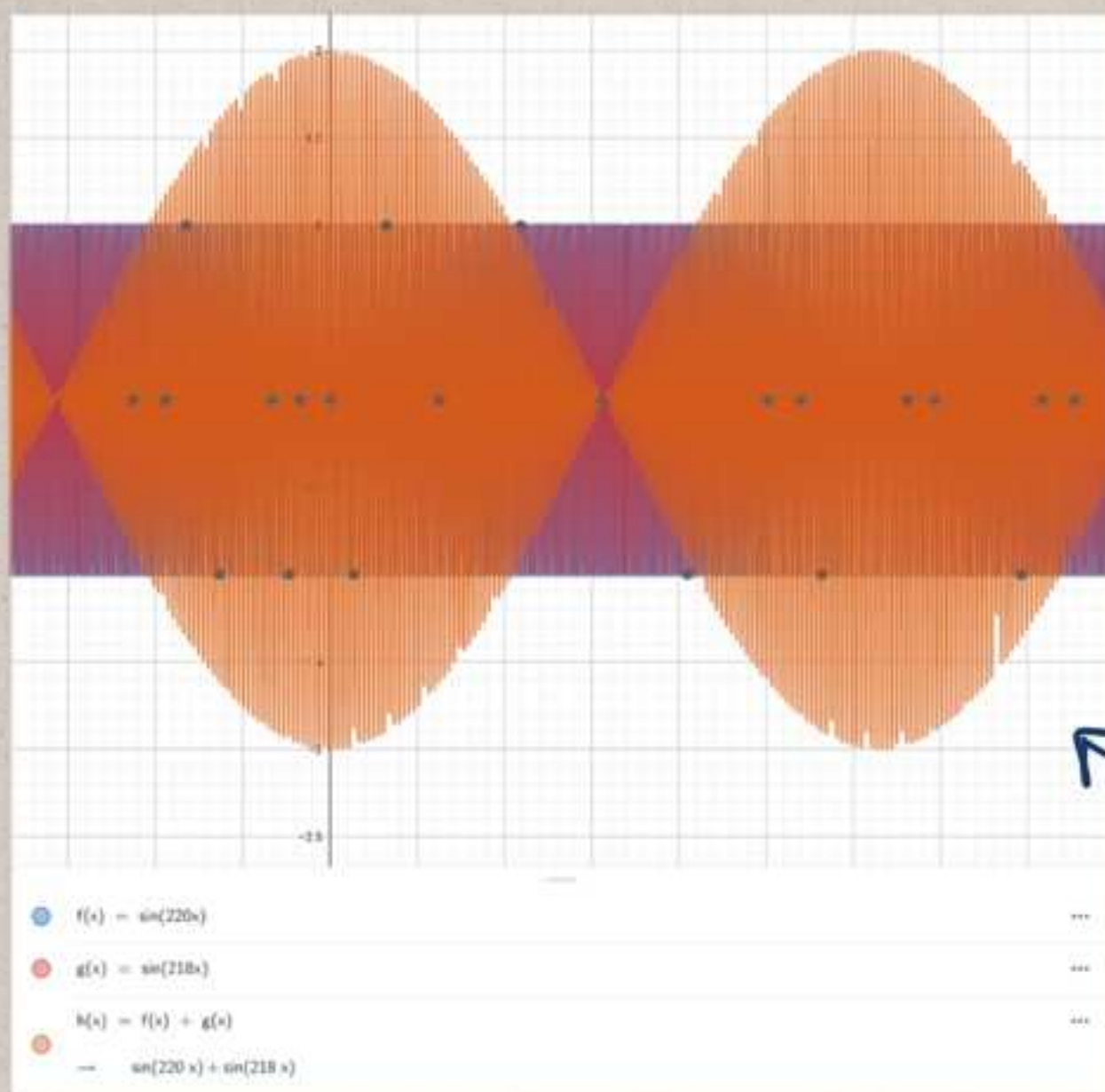
- (1) der Mittelwert
- (2) verstärkt mit Faktor 2
- (3) moduliert durch Kosinus
von y .



Am Anfang sieht
 $\sin(x) + \sin(1.1 \cdot x)$
 aus wie
 $2 \cdot \sin$
 [moduliert durch $\cos$]



Aber $\cos(0.05x)$ hat seine erste Nullstelle
 bei $10\pi \approx 31.4$



Hier sieht man
die Modulation
mit Frequenz
 2π sehr
deutlich

$$\sin(220x) + \sin(218x) \\ = 2 \cdot \sin(219x) \cdot \cos(x)$$

Wir erhalten für kleines ε

$$\sin(x+\varepsilon x) + \sin(x-\varepsilon x) = 2\sin(x) \cdot \cos(\varepsilon x)$$

D.h. wenn die Saiten um 2ε verstimmt sind,
hört man den Kosinusschlag mit Frequenz ε .

Diesen Kosinusschlag nennt man
SCHWEBUNGEN

Die Frequenz hängt nur von der Differenz
ab, nicht von der Richtung der Ver-
stimmung. Diese kann man nur
am Klang des Mittelwerts bestimme.

Tonbeispiel

(Hat in der Vorlesung nicht funktioniert.)

DIRECT TONE GENERATOR		
ON	Frequency	220.0
	Volume	30000.0
ON	Frequency	216.0
	Volume	30000.0
OFF	Frequency	218.0
	Volume	30000.0
OFF	Frequency	224.0
	Volume	30000.0
OFF	Frequency	222.0
	Volume	30000.0
OFF	Frequency	219.0
	Volume	30000.0
OFF	Frequency	221.0
	Volume	30000.0
+ Add tone +		