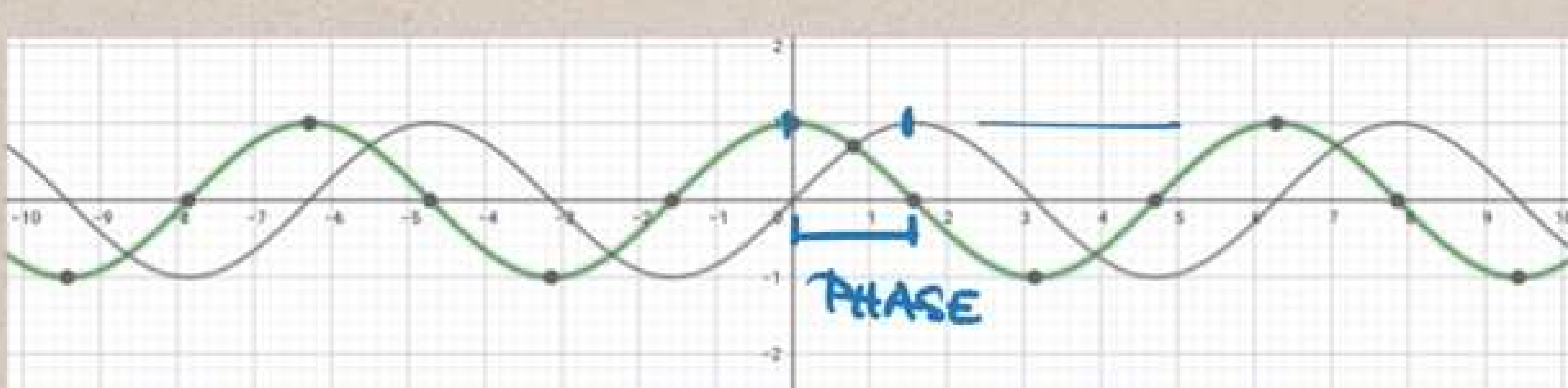
Mathematik & Musik

VORLESUNG II

11. April 2022

WARUM EIGENTLICH SINUS?



Sinus und Kosinus sind fast die gleiche Funktion.
Sinus und Kosinus sind <u>phasenverschoben</u>

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

<u>AMPLITUDE</u> von Sinus & Kosinus: 1

Auf eine andere Art und Weise sind die beiden Fkt unterschiedlich:

LINEARE ALGEBRA

Die Menge $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ aller Funktionen

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

wird ein $\mathbb{R}$-Vektorraum durch die folgenden Operationen

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

PUNKTWEISE ADDITION VON FUNKTIONEN

$$(\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x)$$

PUNKTWEISE SKALARE MULTIPLIKATION

Dieser VR ist unendlich-dimensional.
Schlimmer noch: er kann keine abzählbare Basis haben.
Noch schlimmer: Falls $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ist, so gilt

$$|\mathcal{B}| > |\mathbb{R}|.$$

[Teaser: Die Details werden in der Vorlesung "Mathematische Logik und Mengenlehre" erklärt: jeweils im Sommersemester]

Falls eine Eigenschaft von Fkt. unter + und skalarer Mult. abgeschlossen ist, so bilden die Fkt. mit dieser Eigenschaft einen Untervektorraum.

CONTINUOUS

z.B. die stetigen Fkt. $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$

die stetig diff'baren $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$

die stetig n-mal diff'baren

$C^n(\mathbb{R},\mathbb{R})$

die glatten $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Nun gilt in $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$, daß die Funktionen sin, cos voneinander linear unabhängig sind.

<u>Beweis</u>

Ang. $\boxed{\lambda \cdot \sin + \mu \cdot \cos = 0}$

die Nullfunktion

Dies bedeutet

$$\forall x \quad \lambda \cdot \sin(x) + \mu \cdot \cos(x) = 0$$

Falls $x = 0 \Rightarrow \sin(x) = 0$

$\underline{\underline{\mu}} = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 1 = \lambda \cdot \sin(0) + \mu \cdot \cos(0) = 0$

$$\forall x \quad \lambda \cdot \sin(x) + 0 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\lambda = 0}}$$

q.e.d.

2.5.2.1.3. *Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen*

Zusammenhang zwischen den trigonometrischen Funktionen mit gleichem Argumentwert

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$; $\tan x \cdot \cot x = 1$;

$\sec^2 x - \tan^2 x = 1$; $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$; $\sin x \cdot \operatorname{cosec} x = 1$;

$\operatorname{cosec}^2 x - \cot^2 x = 1$; $\cos x \cdot \sec x = 1$.

	$\sin^2 x$	$\cos^2 x$	$\tan^2 x$	$\cot^2 x$	$\sec^2 x$	$\operatorname{cosec}^2 x$
$\sin^2 x$						

Additionstheoreme trigonometrischer Funktionen für Summe und Differenz von Argumentwerten

$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$; $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$;

$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$; $\cot(x \pm y) = \frac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot y \pm \cot x}$;

$$\sin(x + y + z) = \sin x \cos y \cos z + \cos x \sin y \cos z + \cos x \cos y \sin z - \sin x \sin y \sin z;$$

$$\cos(x + y + z) = \cos x \cos y \cos z - \sin x \sin y \cos z - \sin x \cos y \sin z - \cos x \sin y \sin z.$$

Additionstheoreme für Vielfache des Argumentwertes

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$; $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$;

$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$; $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$;

$$\boxed{\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}}$$

$\sin' x = \cos x$

$\cos' x = -\sin x$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

ADDITIONSTHEOREME

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

MATHEMATISCHE/ANALYTISCHE DEFINITION VON SINUS | KOSINUS:

Als Taylorreihe:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Federschwingung (Der harmonische Oszillator)

Ziel Die schwingende Saite

Die schwingende Saite wird ausgelenkt und schwingt zurück. Ihre Position hängt ab von:

Zeit t

der x-Position

Dies ist komplizierter als ein System, welches nur die Zeit berücksichtigt.

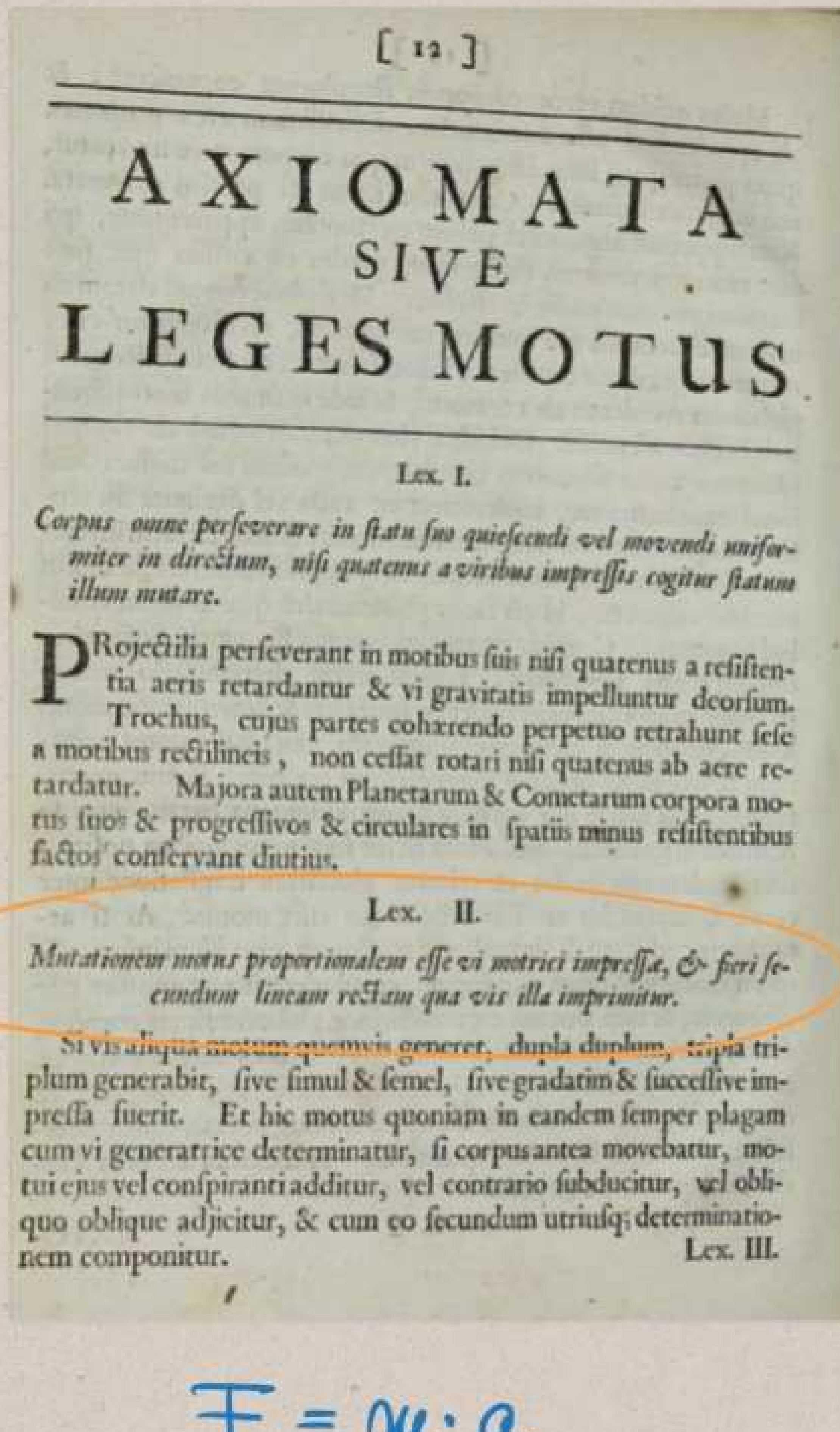
Also: stattdessen das Federpendel.

Physikalisches Grundprinzip:

die Kraft, die auf das Pendel wirkt (Rückstellkraft) ist proportional zur Auslenkung (und ist umgekehrt gerichtet)

$$\boxed{F = -k \cdot \varphi(t)}$$

ISAAC NEWTON
1642-1726



AXIOMATA SIVE LEGES MOTUS

Lex. I.

Corpus omne perſeverare in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quatenus a viribus impreſſis cogitur ſtatum illum mutare.

Projectilia perſeverant in motibus ſuis niſi quatenus a reſiſtentia aeris retardantur & vi gravitatis impelluntur deorſum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuo retrahunt ſeſe a motibus rectilineis, non ceſſat rotari niſi quatenus ab aere retardatur. Majora autem Planetarum & Cometarum corpora motus ſuos & progreſſivos & circulares in ſpatiis minus reſiſtentibus factos conſervant diutius.

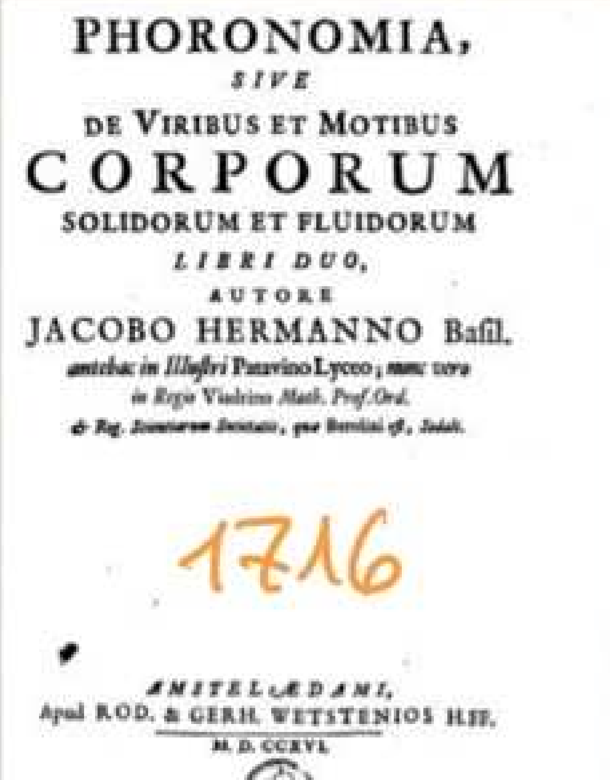
Lex. II.

Mutationem motus proportionalem eſſe vi motrici impreſſæ, & fieri ſecundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Si vis aliqua motum quemvis generet, dupla duplum, tripla triplum generabit, ſive ſimul & ſemel, ſive gradatim & ſucceſſive impreſſa fuerit. Et hic motus quoniam in eandem ſemper plagam cum vi generatrice determinatur, ſi corpus antea movebatur, motui ejus vel conſpiranti additur, vel contrario ſubducitur, vel oblique oblique adjicitur, & cum eo ſecundum utriuſq; determinationem componitur.

Lex. III.

JACOB HERMANN
1678-1733



PHORONOMIA,
SIVE
DE VIRIBUS ET MOTIBUS
CORPORUM
SOLIDORUM ET FLUIDORUM
LIBRI DUO,
AUTORE
JACOBO HERMANNO Baſil.
antehac in Illuſtri Patavino Lyceo; nunc vero
in Regio Viadrino Math. Prof. Ord.
& Reg. Scientiarum Societatis, quæ Berolini eſt, Sodali.

1716

AMSTELÆDAMI,
Apud ROD. & GERH. WETSTENIOS HFF.
M. D. CCXVI.

$F = m \cdot a$

$F = -k \cdot \varphi(t)$ und $F = m \cdot a$

$\Rightarrow \underbrace{ma}_{\varphi''(t)} = -k \cdot \varphi(t)$

Da die Beschleunigung die Ableitung der Geschwindigkeit und die Geschwindigkeit die Ableitung der Auslenkung ist, erhalten wir:

$$m \cdot \varphi''(t) = -k\varphi(t)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \varphi''(t) = -\frac{k}{m}\varphi(t)$$

Schreiben wir $c := \frac{k}{m}$.

$$\boxed{\varphi''(t) = -c\varphi(t)}$$

Durch Ausprobieren erhält man, daß die Funktion

$$\varphi(t) = \sin(\sqrt{c}\,t)$$

die Gleichung erfüllt:

$$\varphi''(t) = \left[\sqrt{c}\cos(\sqrt{c}\,t)\right]' = \sqrt{c}\left[\cos(\sqrt{c}\,t)\right]'$$

$$= \sqrt{c}\sqrt{c} - \sin(\sqrt{c}\,t)$$

$$= -c\sin(\sqrt{c}\,t) = -c\varphi(t)$$

Unsere Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\boxed{\varphi''(t) = -c\varphi(t)}$$

hat (auf eine gewisse Art und Weise, die wir erklären werden) NUR den Sinus als Lösung.

DIFFENTIALGLEICHUNGEN

Def. Eine Funktion $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung.

Wir nennen eine Funktion $\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von F falls

$$\varphi'(t) = F(t, \varphi(t)) \quad \text{für alle } t.$$

I.a. nicht eindeutig.

Ein Paar (F, x_0) mit $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt Anfangswertproblem (AWP) erster Ordnung.

φ heißt Lösung des AWP, falls φ Lösung von F und $\varphi(0) = x_0$.

Theorem (ohne Beweis)

SATZ VON PEANO

Ist F stetig, so existiert eine Lösung von F.

[Nicht notwendigerweise eindeutig.]

Theorem (ohne Beweis)

SATZ VON PICARD-LINDELÖF

Ist F Lipschitz-stetig, so existiert eine Lösung und jedes AWP (F, x_0) ist eindeutig lösbar.

Bem. Der Satz von Peano ist höchst inkonstruktiv und liefert keine Lösung konkret.

I. a. sehr schwierig, Lösungen zu berechnen.

Daher: einfache Fälle.

Def. Eine Dgl. F heißt linear, falls

$$F(x,y) = a(x) \cdot y + b(x)$$

für Funktionen $a, b: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Falls $b(x) = 0$ f. a. x, so heißt F linear homogen

sonst: linear inhomogen.

<u>Satz</u> Ist F eine lineare homogene Dgl., so bilden die Lösungen von F einen Untervektorraum.

$$F(x,y) = a(x)\cdot y$$

<u>Beweis</u>. Ang. φ, ψ seien Lösungen von F, d.h.

$$\varphi'(t) = F(t, \varphi(t)) = a(t)\cdot\varphi(t).$$

$$\psi'(t) = a(t)\cdot\psi(t).$$

<u>ADDITION</u>

$$(\varphi+\psi)'(t) = \varphi'(t) + \psi'(t)$$ [da Ableitung und Summe kommutiert]

$$= a(t)\cdot\varphi(t) + a(t)\cdot\psi(t)$$

$$= a(t)\left[\varphi(t)+\psi(t)\right]$$

$$= a(t)(\varphi+\psi)(t).$$

<u>SK. MULT.</u>

$$(\lambda\varphi)'(t) = \lambda\cdot\varphi'(t)$$

$$= \lambda\cdot\left[a(t)\cdot\varphi(t)\right]$$

$$= \left[\lambda\cdot a(t)\right]\cdot\varphi(t)$$

q.e.d.

Satz Ist F eine lineare homogene Dgl. mit $F(x,y) = a(x)\cdot y$ und sei g eine Funktion mit $g' = a$. [d.h. g ist eine Stammfunktion von a]

Dann ist $e^{g(t)}$ eine Lösung von F und für $x_0 \in \mathbb{R}$ ist

$$x_0 \cdot e^{(g(t)-g(0))}$$

die eindeutige Lösung des AWP (F, x_0).

Beweis Sei $\varphi(t) = e^{g(t)}$.

Berechne

$$\boxed{\varphi'(t) = g'(t)\cdot e^{g(t)} = a(t)\cdot e^{g(t)} = a(t)\cdot\varphi(t)}$$

Bemerke, daß dies auch für $e^{g(t)+C}$ gilt.

Berechne $\varphi_{x_0}(t) := x_0 \cdot e^{(g(t)-g(0))}$ an der Stelle $t=0$:

$$x_0 \cdot e^{(g(0)-g(0))} = x_0 e^0 = x_0 1 = x_0$$

qed

Eine Verallgemeinerung:

Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung.

NOTATION $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$

$\vec{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$

Falls $x \in \mathbb{R}$ $\vec{\varphi}(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$

Für Elemente von $\mathbb{R}^{n+1}$ schreibe ich auch $(x, \vec{y})$ mit $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$

Def. Eine Fkt. $\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ heißt System von Dgl. erster Ordnung.

Wir sagen $\vec{\varphi}$ ist eine Lösung von Φ, falls $\vec{\varphi}' := (\varphi_1', \dots, \varphi_n')$

$$\vec{\varphi}'(x) = \Phi(x, \vec{\varphi}(x)) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Falls $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, so ist $(\Phi, \vec{x})$ ein System von AWP erster Ordnung und $\vec{\varphi}$ heißt Lösung falls $\vec{\varphi}$ Lösung Φ ist und

$$\vec{\varphi}(0) = \vec{x}.$$

Ein solches System heißt linear homogen falls eine Funktion

$$t \longmapsto A(t)$$

existiert, wobei $A(t)$ eine $n \times n$-Matrix ist und

$$\boxed{\Phi(x, \vec{y}) = A(x) \cdot \vec{y}}$$

$\vec{\varphi}$ ist Lösung von Φ falls $\vec{\varphi}'(x) = A(x) \cdot \vec{\varphi}(x)$

Bemerkung 1 Die Lösungen eines linearen homogenen Systems von Dgl. erster Ordnung bilden einen Untervektorraum der n-Tupel von $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

[Beweis völlig analog zum eindimensionalen Fall]

Bemerkung 2 Nach Picard-Lindelöf ist die Abb. $\vec{x} \longmapsto \varphi_{\vec{x}}$, wobei $\varphi_{\vec{x}}$ die eindeutige Lösung des AWP$(\Phi, \vec{x})$ ist, ein VR-Isomorphismus zw. $\mathbb{R}^n$ und dem Raum der Lösungen von Φ.

D.h. der Lösungsraum hat Dim. n.

Zurück zu

$$\varphi''(t) = -c\varphi(t).$$

Diese hat eine zweite Ableitung. Wie kann man diese in ein System erster-Ordnung verwandeln?

Trick: füge Variable ψ ein, die für die erste Ableitung von φ steht:

$$\varphi'(t) = \psi(t) \checkmark$$

$$\psi'(t) = -c\varphi(t) \checkmark$$

$$\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & 0 \end{pmatrix} \vec{\varphi}(t).$$

Man kann also eine einfache Gleichung zweiter Ordnung durch diesen Trick in ein System erster Ordnung überführen.

Wir beobachten, daß die Matrix hier nicht von t abhängt [man sagt, dies ist ein System mit konstanten Koeffizienten].

Wie löst man ein solches System von Dgl. linear homogen mit konstanten Koeffizienten?

ANTWORT Genauso wie im eindimensionalen Fall. Statt die Exponentialfunktion zu verwenden, verwenden wir das Matrixexponential und erhalten eine Basis des Lösungsvektorraums.

MATRIXEXPONENTIAL A Matrix

$$\boxed{e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}}$$

!! Man muß zeigen, daß jede dieser Reihen konvergiert.

z.B. $A^k = \begin{pmatrix} a_{11}^k & a_{12}^k \\ a_{21}^k & a_{22}^k \end{pmatrix}$

$$e^A = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{11}^k}{k!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{12}^k}{k!} \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{21}^k}{k!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{22}^k}{k!} \end{pmatrix}$$