

MATHEMATIK &

MUSIK

65-325

MONTAGS 16-18 Uhr

H3

Einige Vorlesungen projiziert.
[Dozent nicht in Land.]

Klausur

KOFFERKLAUSUR
= OPEN BOOK

120 Minuten

26. Juli 2022 13⁰⁰-15⁰⁰

Modul :

LA Sek - Ergänzung AA

LA Sek - Ergänzung AGD

David BENSON,

Music. A mathematical

offering.

Mathematik & Musik

VORLESUNG I

4. April 2022



Pythagoras von Samos
ca. 570 - 495 v. Chr. Geb.



→ KULTURGRÜNDER
Pythagoras

Mystik / Zahlenmystik

ARISTOTELES
Metaphysik α
985b - 986a

ALLES
IST
ZAHL

έν δέ τούτοις καί πρό τούτων οί καλούμενοι Πυθαγόρειοι τῶν μαθημάτων ἀψάμενοι πρῶτοι ταῦτά τε προήγαγον, καί [25] ἐντραφέντες ἐν αὐτοῖς τὰς τούτων ἀρχὰς τῶν ὄντων ἀρχὰς ᾤθησαν εἶναι πάντων. ἐπεὶ δέ τούτων οἱ ἀριθμοὶ φύσει πρῶτοι, ἐν δέ τούτοις ἐδόκουν θεωρεῖν ὁμοιώματα πολλά τοῖς οὔσι καί γιγνομένοις, μᾶλλον ἢ ἐν πυρὶ καί γῆ καί ὕδατι, ὅτι τὸ μὲν τοιονδί τῶν ἀριθμῶν πάθος δικαιοσύνη [30] τὸ δέ τοιονδί ψυχὴ τε καί νοῦς ἕτερον δέ καιρὸς καί τῶν ἄλλων ὡς εἰπεῖν ἕκαστον ὁμοίως, ἔτι δέ τῶν ἀρμονιῶν ἐν ἀριθμοῖς ὀρῶντες τὰ πάθη καί τοὺς λόγους,

ἐπεὶ δὴ τὰ μὲν ἄλλα τοῖς ἀριθμοῖς ἐφαίνοντο τὴν φύσιν ἀφωμοιωσθαι πᾶσαν, οἱ δ' ἀριθμοὶ πάσης τῆς φύσεως πρῶτοι,

[986a] [1] τὰ τῶν ἀριθμῶν στοιχεῖα τῶν ὄντων στοιχεῖα πάντων ὑπέλαβον εἶναι, καί τὸν ὅλον οὐρανὸν ἀρμονίαν εἶναι καί ἀριθμόν: καί ὅσα εἶχον ὁμολογούμενα ἐν τε τοῖς ἀριθμοῖς καί ταῖς ἀρμονίαις πρὸς [5] τὰ τοῦ οὐρανοῦ πάθη καί μέρη καί πρὸς τὴν ὅλην διακόσμησιν, ταῦτα συνάγοντες ἐφήρμοττον.

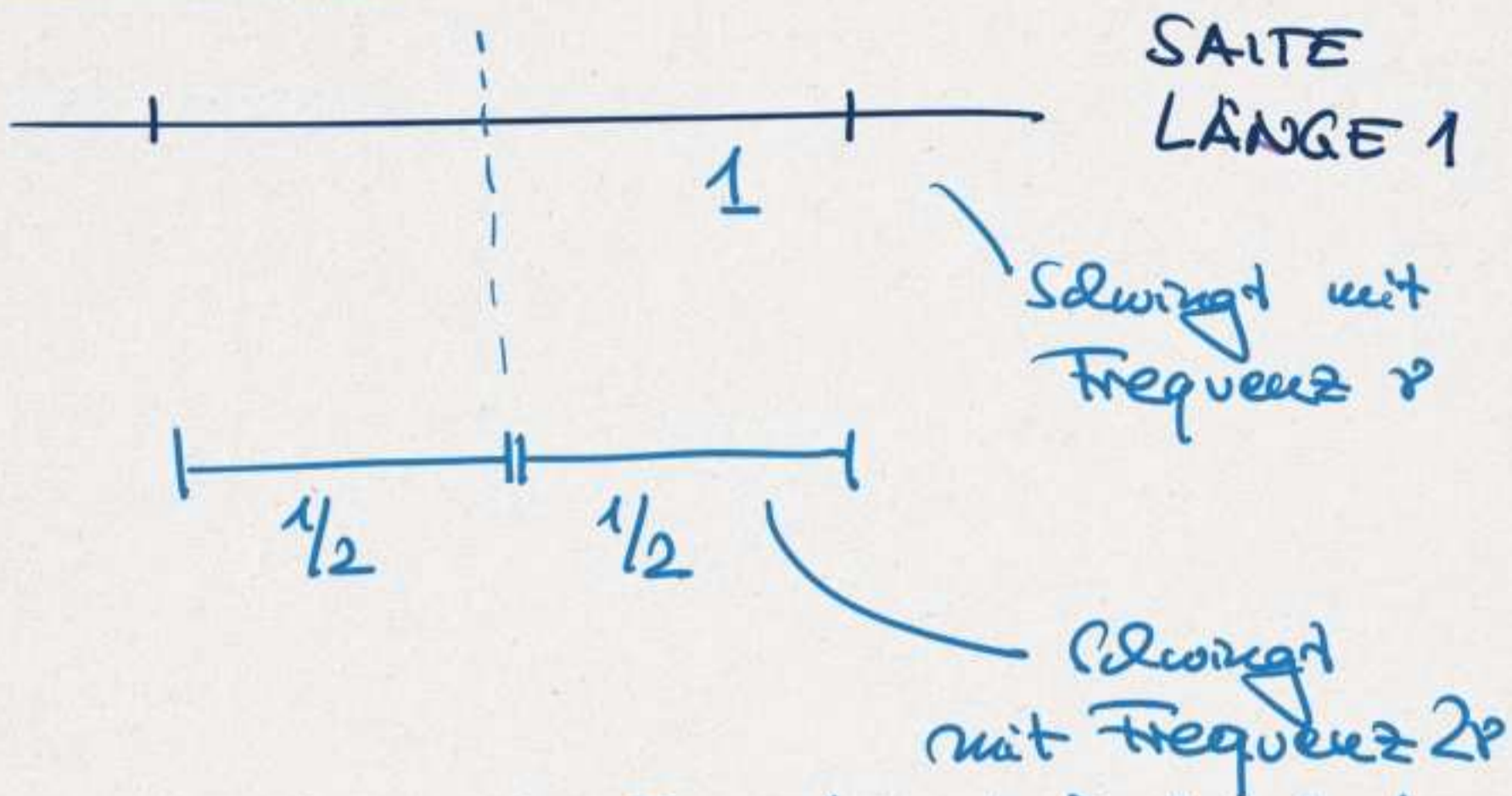
ἀρμονία
ἀριθμός
λόγος

HARMONIA
ARITHMOS
LOGOS

ἀρμολογῶ

zusammenfügen

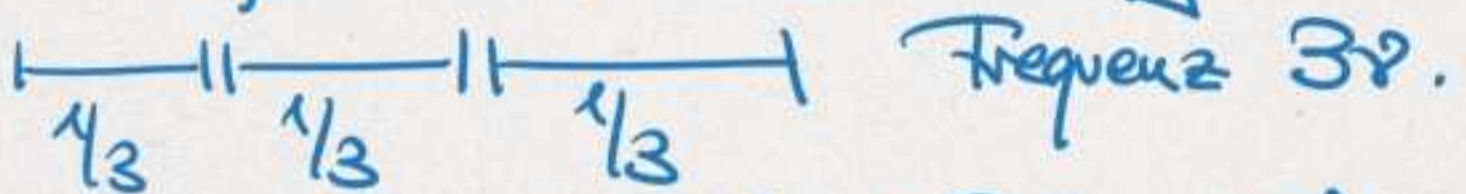
HARMONIE



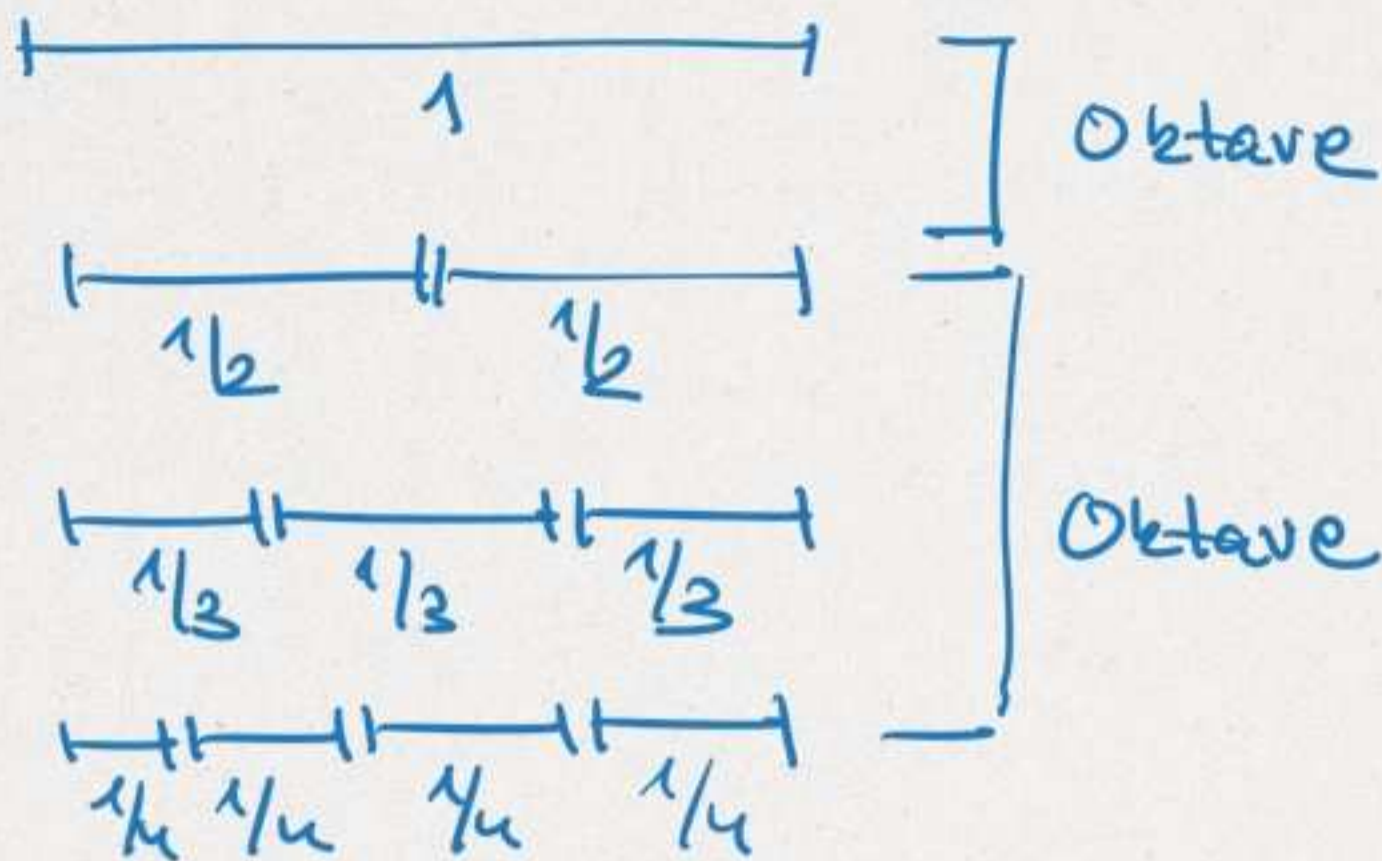
Frequenz ν und 2ν klingt fast gleich.
Soll heißen: "der gleiche Ton in unterschiedlichen Höhenlagen".

Unterschied ist eine Oktave

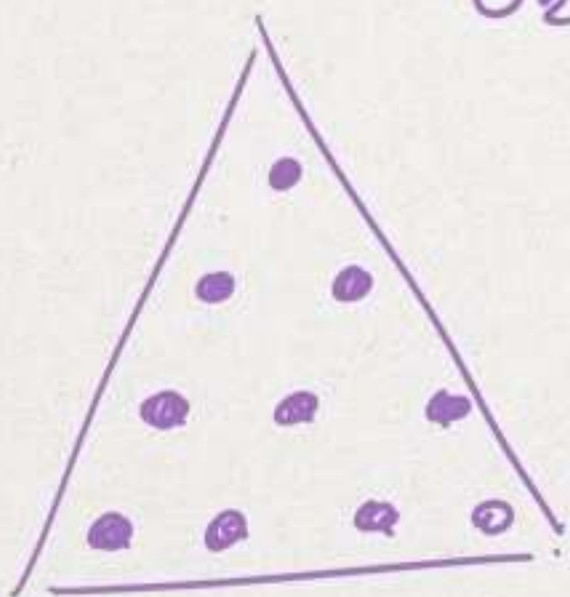
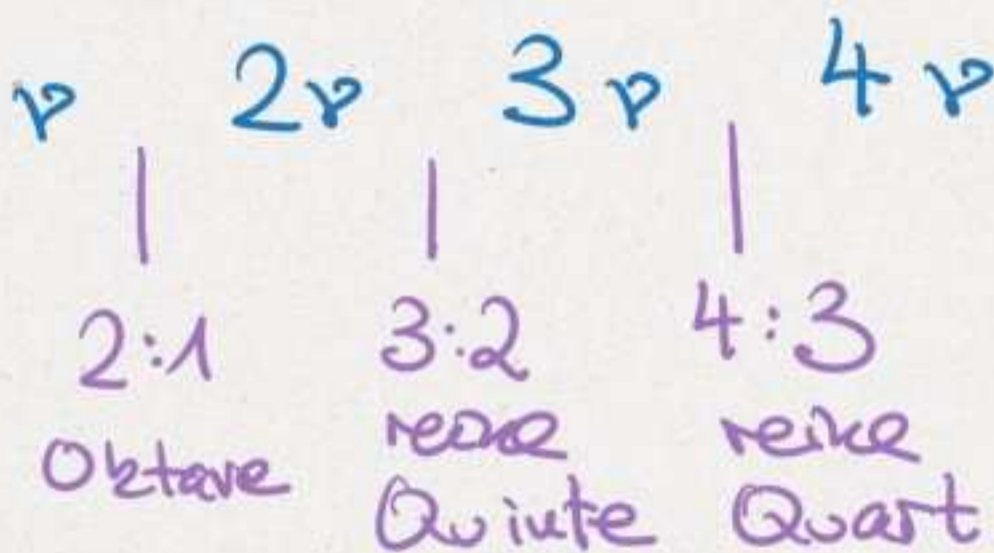
[Vgl. "unisono" im Chor:
Männerstimmen eine Oktave tiefer als Frauenstimmen]



Intervall $2\nu : 3\nu$ wird als "wohlklingend" empfunden.



Frequenzen:



ΤΕΤΡΑΚΤΟΣ
TETRAKTYS

Pythagoras u. der Schmiede

Hämmer: 6/8/9/12

$$\frac{6}{12} \quad \frac{8}{12} \quad \frac{9}{12} \quad \frac{12}{12}$$

$$1:2 \quad 2:3 \quad 3:4 \quad 1:1$$

Beh. Der Klang des Hammers auf dem Anstoß ist durch das Gewicht eindeutig bestimmt.

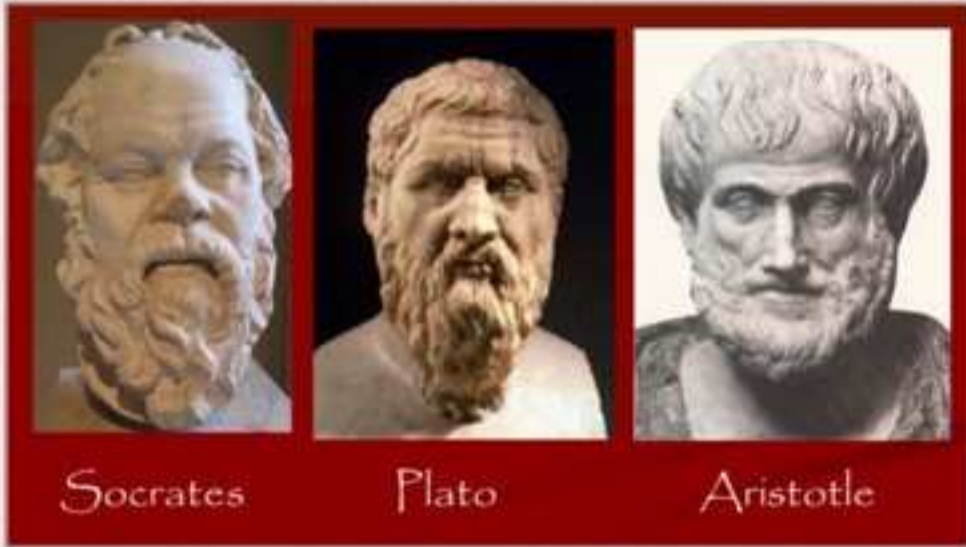
Problem Dies ist physikalisch inkonstant.

Somit kann diese Annahme nicht stimmen.

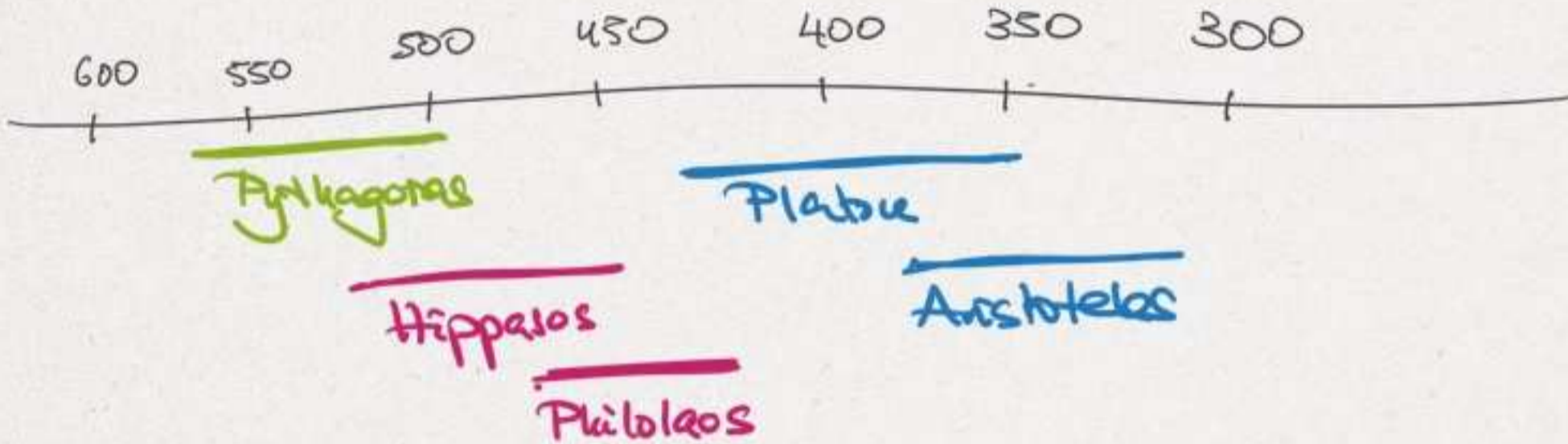
Pythagoräische Harmonie

Um so kleiner die Zahlen im Bruch, desto wohlklingender der Klang.

Unser Wissen über Pythagoras



Pythagoras 570 - 495
 Plato c. 425 - 347
 Aristoteles 384 - 322



Hippasos
 c. 530 - 450
 Irrationalität
 von $\sqrt{2}$.

Philolaos
 c. 470 - 385



Hauptquelle zu den
Pythagoräern:

Diogenes Laertius

Porphyrius

Iamblicus



im 3. nachchristlichen
Jahrhundert.

Ca. 800 Jahre nach
Pythagoras.

Zur Zeit von Aristoteles zwei pythagoräische
Schulen:

Akusmatiker

Mathematiker

(Akusmata)

SEKUNDÄRLITERATUR

Schleiermacherstheorie



Walter Burkert

1931-2015

Pythagoras war nicht als
ein Schleiermacher.

Wissenschaftlich-
keitsstheorie

Pythagoras war wissenschaftlich
tätig.



SEPTEN ARTES LIBERALES

(Sieben freie
Künste)

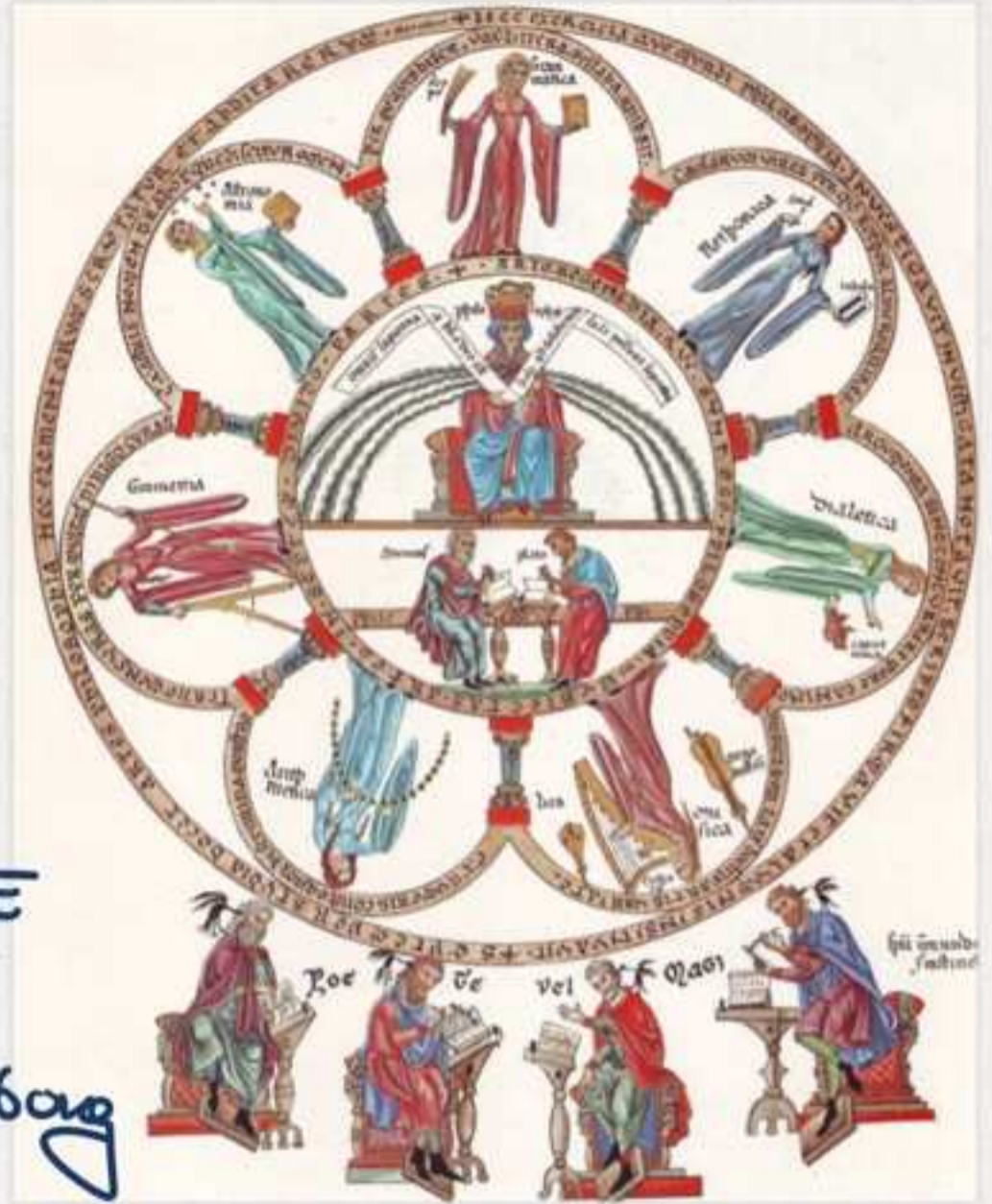
USA: "Liberal Arts
Colleges"

Niederlande:

UNIVERSITY COLLEGE

2012 UCF

University College Freiburg



MARTIANI
MINI FELICIS
CAPELLAE
AFRI KARTHAGINENSIS
DE NVPTIIS
PHILOLOGIAE ET MERCVRII
LIBRI DVO

RECENSIT
VARIETATE LECTIONIS ET ANIMADVER-
SIONIBUS
ILLVSTRAVIT
IOANN. ADAM GOEZ.

NORIMBERGAE
SPINTIUS MORATHI ET AVVLESI
MDCXCIV.

Martianus Capella

ca. 410-420 u. Chr. geb.

De nuptiis philologiae
et Mercurii

→ Boetius
& Cassiodor

→ UNIVERSITÄTEN
DES MITTELALTERS

QUADRIVIUM

Die mathematischen
Wissenschaften

Astronomie

Geometrie

Arithmetik

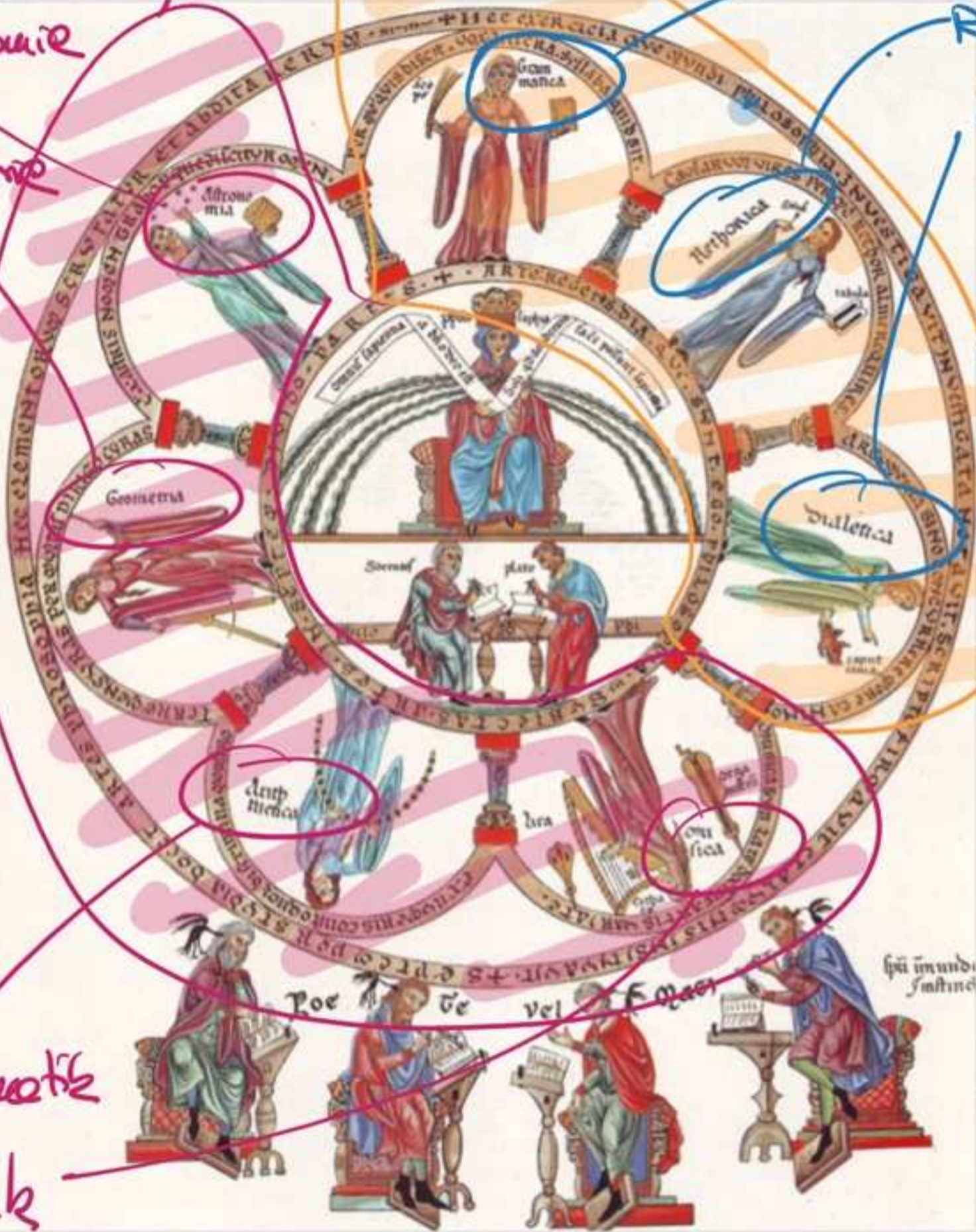
Musik

TRIVIUM

GRAMMATIK

RHETORIK

LOGIK



TON

\neq

KLANG

Einzelne
Sinusschwingung

Frequenzspektrum
von verschiedenen
Sinusschwingungen

Die Vielfachen der Grundschwingung nennen wir

OBERTÖNE

x	$2x$	$3x$	$4x$	$5x$	$6x$...
Grund- schwingung	1. Ober- ton	2. Ober- ton	3. Ober- ton	4. Ober- ton	5. Ober- ton

Der Klang ist:

eine Linearkombination
der Funktionen

$\sin(x), \sin(2x), \sin(3x), \sin(4x), \dots$

Insbesondere, da Schall EINE
Druckwelle ist, ist der Klang keine
Sinusfunktion, sondern eine \checkmark Summe
solcher Funktionen.

Falls

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sin(ix) \quad \text{ist, können}$$

wir das Frequenzspektrum, also die λ_i aus der Funktion f herausbekommen.

Im allgemeinen kann ich nicht aus

$$f(x) = \lambda g(x) + \mu h(x)$$

λ und μ eindeutig bestimmen:

$$g(x) = 2x$$

$$h(x) = 3x$$

$$3 \cdot g + 2 \cdot h = 12x$$

$$6 \cdot g + 0 \cdot h = 12x$$

Die Nicht-eindeutigkeit hier liegt daran, dass g, h im Raum der Funktionen nicht linear unabhängig sind.

Für unsere Sinusschwingungen werden wir dies mit Fourierreihen und der Fouriertransformation machen.

VORLESUNG

- ① Warum eigentlich Sinus?
Einfache Differentialgleichung,
Schwebungen
(Klavierstimmen).
- ② Klangspektrum / Frequenzspektrum
Fourierreihen und
Fouriertransformationen
- ③ Quintenzirkel,
pythagoräische Stimmung
Harmonie
- ④
- ⑤ Temperamente beim
Klavierstimmen
- ⑥ weitere Themen

