

Die Kirchhoffsche Knotenregel gilt nicht am Rand unendlicher Graphen

Johannes Carmesin

20. August 2010

1 Einleitung

Elektrische Netzwerke sind ein wichtiger Bestandteil unseres täglichen Lebens. Ebenfalls lassen sich verschiedene Probleme in der Kombinatorik mit elektrischen Netzwerken lösen [2]. Unendliche elektrische Netzwerke treten in der Differentialgeometrie beim Studium Riemannscher Mannigfaltigkeiten [8] auf. Weiter sind sie eng mit Irrfahrten auf Graphen verwandt [7].

Ein *elektrisches Netzwerk* hat einen unterliegenden Graphen G und eine Funktion $r : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, die jeder Kante einen Widerstand zuweist. Ein *Fluss* in einem elektrischen Netzwerk erfüllt die Kirchhoffsche Knoten- und Maschenregel. Wie üblicherweise in der Literatur [7], [9] gefordert, betrachten wir nur Flüsse endlicher Energie. Dabei ist die *Energie* eines Flusses φ durch $\mathcal{E}(\varphi) := \sum_{e \in E} r(e)\varphi^2(e)$ definiert.

Jede Widerstandsfunktion r definiert in natürlicher Weise eine Metrik auf G . Die Vervollständigung $|G|_r$ dieses metrischen Raumes enthält zusätzlich Randpunkte. Wir sagen ein Fluss erfüllt die *Kirchhoffsche Knotenregel im Randpunkt* x , falls jede gutartige offene Umgebung U von x eine offene Umgebung O um x enthält durch die netto null hineinfließt. Wir sagen ein Fluss erfüllt die *Kirchhoffsche Knotenregel für Randpunkte*, wenn er die Kirchhoffsche Knotenregel in jedem Randpunkt erfüllt.

Unendliche elektrische Netzwerke haben interessante Eigenschaften, die endliche elektrische Netzwerke nicht haben. So kann es, im Gegensatz zu einem endlichen elektrischen Netzwerk, in einem unendlichen elektrischen Netzwerk mehrere Flüsse geben, wie Georgakopoulos in [5] zeigt. Das Hauptresultat dieser Arbeit ist eine weitere interessante Eigenschaft unendlicher elektrischer Netzwerke:

Satz 1.1. *Es gibt ein unendliches elektrisches Netzwerk (sogar mit kompakter Vervollständigung), in dem jeder Fluss endlicher Energie die Kirchhoffsche Knotenregel an einem Randpunkt verletzt.*

Im Laufe des Beweises entwickeln wir in Behauptung 5.5 und Lemma 4.6 eine Methode, um die Eindeutigkeit eines Flusses endlicher Energie für bestimmte elektrische Netzwerke zu zeigen.

Motiviert ist diese Arbeit durch folgendes Problem von Diestel und Georgakopoulos.

Problem 1.2 (Diestel und Georgakopoulos). *Gibt es in jedem elektrischen Netzwerk einen Fluss endlicher Energie, der die Kirchhoffsche Knotenregel für Randpunkte erfüllt?*

Ist die Summe der Widerstände endlich, hat Georgakopoulos [5] gezeigt, dass es einen solchen Fluss gibt und dieser sogar eindeutig bestimmt ist. Ist die Summe der Widerstände unendlich, zeigt Satz 1.1 dass dies nicht immer der Fall ist.

Diese Arbeit ist wie folgt aufgebaut: Nachdem wir in Abschnitt 2 die benötigten Definitionen und grundlegenden Fakten vorgestellt haben, werden wir in Abschnitt 3 das Problem vorstellen. Das Problem lösen wir, indem wir zwei Gegenbeispiele angeben. In Abschnitt 4 geben wir ein einfaches Gegenbeispiel. Ein Gegenbeispiel mit kompakter Vervollständigung folgt in Abschnitt 5.

2 Definitionen und grundlegende Fakten

Für Graphentheorie benutzen wir die Terminologie aus [3], für Topologie die aus [1] und für metrische Räume die aus [6].

2.1 Grundlagen elektrische Netzwerke

Um ein elektrisches Netzwerk zu definieren, brauchen wir erst einmal einen Graphen G und eine Widerstandsfunktion $r : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, die jeder Kante einen *Widerstand* zuweist. Wir denken uns eine Batterie zwischen 2 Ecken $p, q \in V(G)$ mit Stärke I . Ein *elektrisches Netzwerk* definieren wir also als 5-Tupel $N = (G, r, p, q, I)$, wobei G ein (ungerichteten) (Multi-) Graphen ist, $r : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ die Widerstandsfunktion, $p, q \in V(G)$ und $I \in \mathbb{R}$. Dabei bezeichnet man I als *Flussstärke von N* .

Wir arbeiten mit *Kantenrichtungen*. Die Menge aller Kantenrichtungen definiert man als $\vec{E}(G) := \{(e, x, y) \mid e \in E(G), x, y \in e, x \neq y\}$.¹ Damit

¹ $(\bullet, \bullet, \bullet)$ ist geordnetes Tupel.

hat jede Kante $e = \{x, y\}$ die 2 Richtungen (e, x, y) und (e, y, x) . Zu $\vec{e} = (e, x, y)$ setzen wir $init(\vec{e}) := x, ter(\vec{e}) := y$ und $\overleftarrow{e} := (e, y, x)$. Wir werden Abbildungen von der Menge der Kantenrichtungen nach \mathbb{R} betrachten. Solche Abbildungen nennen wir informell *Kantengewichtungen*.

Eine spannende Frage ist zu untersuchen, welche Flüsse in einem elektrischen Netzwerk fließen. Ein *Fluss* (im elektrischen Netzwerk N) ist eine Abbildung $\varphi : \vec{E}(G) \rightarrow \mathbb{R}$, die jeder Kantenrichtung eine Stromstärke zuweist und zwar so, dass $\varphi(\vec{e}) = -\varphi(\overleftarrow{e})$. Desweiteren muss φ die Kirchhoffsche Knoten- und Maschenregel erfüllen, die wir jetzt vorstellen werden.

2.1.1 Die Kirchhoffsche Knotenregel (K1)

Diese Regel besagt informell, dass φ aus p mit der Stromstärke I herausfließt und nach q mit der Stromstärke I hereinfließt und, dass φ in jede andere Ecke genauso stark rein wie raus fließt .

Formal sagen wir, dass $\varphi : \vec{E}(G) \rightarrow \mathbb{R}$ die Regel K1 (an den Ecken von G) erfüllt, wenn für jede Ecke $v \in V(G)$ gilt:

$$\sum_{\vec{e} \in \vec{E}(G) | v = ter(\vec{e})} \varphi(\vec{e}) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } v \in V \setminus \{p, q\} \\ -I, & \text{wenn } v = p \\ I, & \text{wenn } v = q \end{cases}$$

Man kann hieraus für endliche Eckenmengen W folgern:

$$\sum_{\vec{e} \in \vec{E} | \vec{e} = (e, v, w), w \in W, v \notin W} \varphi(\vec{e}) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } p, q \in W \text{ oder } p, q \notin W \\ -I, & \text{wenn } p \in W, q \notin W \\ I, & \text{wenn } q \in W, p \notin W \end{cases}$$

Um Kirchhoffs 2. Regel aufzustellen, brauchen wir eine Definition: Zu einem Kreis C definieren wir einen *gerichteten Kreis* \vec{C} . Sei $v_0 e_0 v_1 \dots v_n e_n v_0$ eine der beiden Orientierungen des Kreises. Dann setzen wir: $\vec{C} := \{(e_i, v_{i-1}, v_i) | 0 \leq i \leq n\}$ ². Analog definiert man zu einem Kantenzug K den *gerichteten Kantenzug* \vec{K} .

2.1.2 Die Kirchhoffsche Maschenregel (K2)

Wir sagen $\varphi : \vec{E}(G) \rightarrow \mathbb{R}$ erfüllt die Regel K2, wenn für jeden gerichteten Kreis $\vec{C} \subseteq \vec{E}$ gilt:

²Das Minus ist das Minus aus $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Man beachte, dass \vec{C} von der gewählten Orientierung abhängt.

$$\sum_{\vec{e} \in \vec{C}} r(e)\varphi(\vec{e}) = 0$$

Da jeder endliche gerichtete Kantenzug endliche Summe von gerichteten Kreisen ist, gilt K2 sogar für endliche gerichtete Kantenzüge \vec{K} . Das Produkt $r(e)\varphi(\vec{e})$ nennt man auch *Spannung*. Die Kirchhoffsche Maschenregel sagt also, dass in jedem Kreis die Summe der Spannungen 0 ist.

Eine Funktion ρ , die jeder Ecke eine reelle Zahl zuordnet, nennt man *Potential*. Durch $f(\vec{e}) := r(e)(\rho(\text{ter}(\vec{e})) - \rho(\text{init}(\vec{e})))$ induziert ρ eine Kantengewichtung. Diese Kantengewichtung erfüllt die Kirchhoffsche Maschenregel. Umgekehrt kann man jeder Kantengewichtung, die die Maschenregel erfüllt, ein bis auf Konstante eindeutiges Potential zuordnen. Wir nennen ein Potential h *harmonische Funktion*, falls für jede Ecke die Mittelwerteneigenschaft $h(v) = \sum_{\vec{e}=(e,w,v)} h(w) \frac{r(e)}{\sum_{\vec{f}=(f,u,v)} r(f)}$ gilt. Eine kurze Rechnung ergibt, dass die von h auf den Kanten induzierte Funktion K2 und K1 für $I = 0$ erfüllt. Also wird die Differenz zweier Flüsse von einer harmonischen Funktion induziert. Der Name harmonische Funktion kommt daher, dass h eine diskretisierte Laplace-Gleichung löst, siehe [2].

2.1.3 Energie

Ein weiteres wichtiges Konzept für endliche, aber auch für unendliche Graphen, ist das der *Energie* $\mathcal{E}(\varphi) := \sum_{e \in E} r(e)\varphi^2(\vec{e})$. Hier ist \vec{e} eine beliebige Richtung von e . Da wir anschließend quadrieren, kommt für beide Richtungen das selbe Ergebnis heraus.

Wir werden hier nur Flüsse endlicher Energie untersuchen. Dies ist eine in der Literatur [7], [9] übliche Forderung. Die Forderung der endlichen Energie macht die Funktionen auf den Kanten durch $\langle f | g \rangle := \sum_{e \in E} r(e)f(e)g(e)$ zu einem Hilbertraum. Dies ist strukturell interessant und liefert ein mächtiges Werkzeug. Man kann zeigen, dass jede Kantengewichtung, die K1 erfüllt, in einem endlichen Graphen genau dann K2 erfüllt, wenn sie minimale Energie hat. In diesem Sinne sind Flüsse minimaler oder mindestens endlicher Energie besser als solche unendlicher Energie. Weiterhin wird unsere Fragestellung erst durch die Forderung endlicher Energie nicht trivial.

2.2 ℓ -Top

Beim Studium unendlicher Graphen sind die Punkte im Unendlichen von zentraler Bedeutung, z. B. die Enden bei der Freudenthalkompaktifizierung [3]. Die natürliche Topologie auf dem Graphen G eines elektrischen Netzwerkes ist ℓ -Top. Diese weist jeder Kante als Länge die Größe ihres Widerstandes

zu. Die Punkte im Unendlichen erhält man via Vervollständigung. Den vervollständigten Raum nennen wir $|G|_r$. Genauer über ℓ -Top kann man in [4] erfahren.

2.3 Der Satz von Georgakopoulos

In einem elektrischen Netzwerk, dessen zugrundeliegender Graph endlich ist, gibt es genau einen Fluss [2]. Für endliche elektrische Netzwerke entspricht dies der physikalischen Tatsache, dass es in einem elektrischen Netzwerk genau einen Stromfluss gibt. Auch bei unendlichen elektrischen Netzwerken gibt es immer einen Fluss, der sogar endliche Energie hat [5]. Es kann aber auch mehrere Flüsse geben [5]. Georgakopoulos hat gezeigt, dass es unter bestimmten Voraussetzungen nur genau einen Fluss gibt.

Die zentrale Voraussetzung beruht auf folgender Beobachtung: Die Regel K1 sagt aus, dass an jeder Ecke außer p und q genauso viel reinfließt wie raus. Aber wieviel fließt in einen Randpunkte im Saldo hinein? Im Satz von Georgakopoulos sind die Randpunkte genau die Enden der Freudenthalkompaktifizierung: $|G|_r = |G|$, siehe [5]. Georgakopoulos fordert für jedes Ende ω , dass in keine Menge der Standardumgebungsbasis von ω , siehe dazu [3], im Saldo etwas hineinfließt. Dies motiviert folgende Definition. Ein Fluss erfüllt *K1 an den Enden*³, falls für jeden endlichen Schnitt (X, X') mit p und q auf der gleichen Seite gilt: $\varphi(X, X') = 0$. Dabei bezeichnet $\varphi(X, X')$ die Summe $\sum_{\vec{e} \mid \text{init}(\vec{e}) \in X, \text{ter}(\vec{e}) \in X'} \varphi(\vec{e})$. Es folgt, dass für $p \in X, q \in X'$ gilt: $\varphi(X, X') = \varphi(\{p\}, V \setminus \{q\}) = \varphi(V \setminus \{p\}, \{q\}) = I$.

Nun können wir den Satz von Georgakopoulos formulieren.

Satz 2.1 (Georgakopoulos). *Sei $N = (G, r, p, q, I)$ ein lokal endliches elektrisches Netzwerk mit $\sum_{e \in E} r(e) < \infty$. Dann gibt es einen eindeutigen p - q -Fluss mit Stärke I und endlicher Energie in N , der K1 an den Enden erfüllt.*

Lassen wir eine Bedingung an den Fluss weg, wird der Satz falsch, wie in [5] gezeigt ist.

2.4 Die Kirchhoffsche Knotenregel für Randpunkte

Nun werden wir K1 für Enden auf Randpunkte verallgemeinern. Sei O eine offene Menge. Wir definieren $T(O)$ als die Menge an Kantenrichtungen durch die etwas nach O hineinfließen könnte:

$$T(O) := \{\vec{e} \in \vec{E}(G) \mid \text{ter}(\vec{e}) \in O, \text{init}(\vec{e}) \notin O\}$$

³Georgakopoulos nennt einen solchen Fluss *non-elusive*.

Die Größe

$$\varphi(T(O)) := \sum_{\vec{e} \in T(O)} \varphi(\vec{e})$$

misst wie viel *im Saldo nach O hineinfließt*. Wir sagen φ erfüllt die Kirchhoffsche Knotenregel im Randpunkt x , falls jede offene Umgebung U von x mit absolut konvergenter Summe $\varphi(T(U))$ eine offene Umgebung O um x mit absolut konvergenter Summe $\varphi(T(O))$ und $\varphi(T(O)) = 0$ enthält.

Wir sagen φ erfüllt die Kirchhoffsche Knotenregel für Randpunkte, wenn φ die Kirchhoffsche Knotenregel in jedem Randpunkt erfüllt.

Sind die Enden gleich den Randpunkten, folgt aus K1 für Enden sofort K1 für Randpunkte.

3 Das Problem

Der Satz von Georgakopoulos sagt für $\sum_{e \in E} r(e) < \infty$ aus, dass genau ein Fluss existiert, der K1 an den Enden erfüllt. Ist die Summe der Widerstände endlich, sind die Enden gleich den Randpunkten [5].

Für unendliche Widerstandssumme ist zwar die Existenz eines Flusses durch N immer noch gesichert, aber die Eindeutigkeit kann fehlschlagen - selbst wenn K1 an Enden erfüllt ist [5]. Um die Eindeutigkeit zu sichern, liegt es nahe, zusätzlich zu fordern, dass K1 nicht nur an den Enden sondern an allen Randpunkten gelten soll: diese sind nämlich nicht mehr einfach die Enden, sondern sie sind für unendliche Widerstandssumme feiner. Genauer kann man auf natürliche Weise eine surjektive Abbildung von den Randpunkten auf die Enden definieren. Diese Abbildung ist im Allgemeinen nicht injektiv.

Wir lösen das Problem, ob sich der Satz von Georgakopoulos, durch eine Verfeinerung der Enden zu Randpunkten, auf elektrische Netzwerke mit unendlicher Widerstandssumme verallgemeinern lässt:

Problem 1.2 (Diestel und Georgakopoulos). *Gibt es in jedem elektrischen Netzwerk einen Fluss endlicher Energie, der die Kirchhoffsche Knotenregel für Randpunkte erfüllt?*

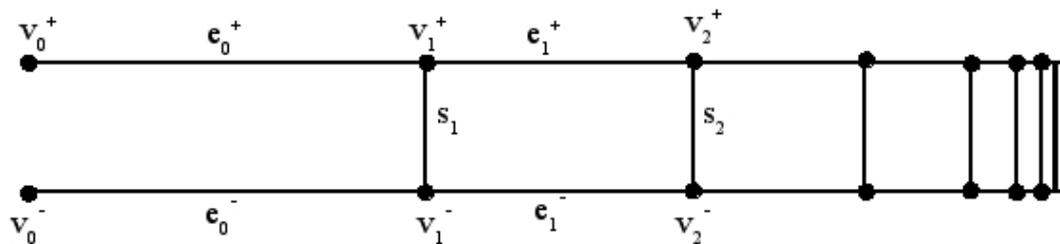
Wir werden zeigen, dass es nicht immer einen solchen Fluss gibt. Demnach ist K1 an den Randpunkten, wie erwartet, eine Verstärkung von K1 an den Enden. Diese Verstärkung ist aber so stark, dass nicht immer ein Fluss endlicher Energie existiert, der K1 an den Randpunkten erfüllt.

In den folgenden Abschnitten werden wir jeweils ein elektrisches Netzwerk angeben, in dem jeder Fluss endlicher Energie die Kirchhoffsche Knotenregel für Randpunkte verletzt. Das zeigt, dass es für das Problem 1.2 keine natürliche Voraussetzung gibt. Das erste Beispiel ist einfacher. Das zweite Beispiel hat kompakte Vervollständigung.

4 Elektrisches Netzwerk auf der unendlichen Leiter

4.1 Das elektrische Netzwerk N_1

Als unterliegenden Graphen wählen wir die unendliche Leiter, bei der die nullte Sprosse gelöscht ist, siehe Abbildung.



Wie im Bild eingezeichnet, wählen wir folgende Bezeichnungen:

1. Die Ecken auf dem oberen Holm der Leiter bezeichnen wir mit v_n^+ , die auf dem unteren mit v_n^- , beginnend bei 0.
2. Die Kanten auf dem oberen Holm der Leiter bezeichnen wir mit e_n^+ , die auf dem unteren mit e_n^- , beginnend bei 0.
3. Die Sprossen bezeichnen wir mit s_n , beginnend bei 1.

Weiter setzen wir die Widerstände wie folgt:

4. $r(s_n) := 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
5. $r(e_n^+) := \frac{2^{-(n+4)}}{3+2^{-(n+2)}}, r(e_n^-) := r(e_n^+) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Und:

6. $p := v_0^+, q := v_0^-, I = 1$

7. Wir definieren folgende Kantenrichtungen: $e_n^{\vec{+}} := (e_n^+, v_n^+, v_{n+1}^+)$, $e_n^{\vec{-}} := (e_n^-, v_n^-, v_{n+1}^-)$, $s_n^{\vec{+}} := (s_n, v_n^+, v_n^-)$

Damit ist das elektrische Netzwerk N_1 vollständig bestimmt.

4.1.1 Der Rand von G

Wir untersuchen nun den Rand $\partial|G|_r$. Die Folgen $(v_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(v_n^-)_{n \in \mathbb{N}}$ sind Cauchyfolgen. Es gilt:

$$(v_n^+) \text{ und } (v_n^-) \text{ sind nicht äquivalent.} \quad (1)$$

Beweis. Jeder Weg von v_n^+ nach v_n^- benutzt eine Kante $s_i, i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Also haben alle Wege von v_n^+ nach v_n^- Länge mindestens 1. Nach der Definition der Metrik, gilt daher: $d(v_n^+, v_n^-) \geq 1$. Damit sind (v_n^+) und (v_n^-) nicht äquivalent. \square

$$\text{Jede Folge } (f_n) \text{ von Ecken hat } [(v_n^+)], [(v_n^-)] \text{ oder eine konstante Folge als Häufungspunkt.} \quad (2)$$

Beweis. Hat (f_n) keine konstante Teilfolge, so hat sie eine Teilfolge (f'_n) , bei der alle Folgenglieder verschieden sind. Sind darunter unendlich viele v_n^+ , so ist (f'_n) Teilfolge von (v_n^+) und damit zu dieser konvergenten Cauchyfolge äquivalent. Hat (f'_n) nur endlich viele v_n^+ , so hat (f'_n) unendlich viele v_n^- und ist zu (v_n^-) äquivalent. \square

Die Aussagen (1) und (2) implizieren:

Satz 4.1. *Der Rand von G besteht genau aus den 2 Punkten $[(v_n^+)]$ und $[(v_n^-)]$.*

Satz 4.2. *$|G|_r$ ist nicht kompakt.*

Beweis. $H := \bigcup_{n=0}^{\infty} (e_n^+)^{\circ} \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} (e_n^-)^{\circ} \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} K_{\frac{1}{4}}(v_n^+)^{\circ} \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} K_{\frac{1}{4}}(v_n^-)^{\circ}$.

Folgende Menge ist offene unendliche minimale Überdeckung:

$$\{s_n^{\circ} | n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \cup \{H\}$$

Damit ist $|G|_r$ nicht kompakt. \square

4.2 Flüsse auf N_1

Satz 4.3. *Jeder Fluss φ endlicher Energie auf N_1 verletzt die Kirchhoffsche Knotenregel für Randpunkte.*

Wir werden zuerst einen Fluss f endlicher Energie angeben, der die Kirchhoffsche Knotenregel für Randpunkte verletzt. Anschließend werden wir beweisen, dass es in N_1 höchstens einen Fluss endlicher Energie gibt. Daraus folgt obiger Satz.

4.2.1 Der Fluss f

$$f(e_n^\pm) := \frac{3}{4} + 2^{-(n+2)}, \quad f(s_n) := 2^{-(n+2)}$$

Nun müssen wir einiges nachrechnen:

Behauptung 4.4. *f erfüllt K1 und K2, hat endliche Energie und verletzt die Kirchhoffsche Knotenregel für Randpunkte.*

Beweis. **K1** ist an p und q erfüllt. An $v_n^\pm, n \geq 1$, gilt K1 ebenfalls:

$$\pm f(e_{n-1}^\pm) \mp f(e_n^\pm) \mp f(\vec{s}_n) = \pm \left[\frac{3}{4} + 2^{-(n+1)} - \left(\frac{3}{4} + 2^{-(n+2)} \right) - 2^{-(n+2)} \right] = 0$$

Es genügt **K2** an den endlichen Kreisen $v_n^+ e_n^+ v_{n+1}^+ s_{n+1} v_{n+1}^- e_n^- v_n^- s_n v_n^+$ zu überprüfen, da diese alle endlichen Kreise erzeugen. Es gilt:

$$\begin{aligned} & r(e_n^+) f(e_n^\vec{+}) + r(s_{n+1}) f(s_{n+1}^\vec{+}) + r(e_n^-) f(e_n^\vec{-}) - r(s_n) f(s_n^\vec{-}) = \\ &= \frac{2^{-(n+4)}}{\frac{3}{4} + 2^{-(n+2)}} \left(\frac{3}{4} + 2^{-(n+2)} \right) + 2^{-(n+3)} + \frac{2^{-(n+4)}}{\frac{3}{4} + 2^{-(n+2)}} \left(\frac{3}{4} + 2^{-(n+2)} \right) - 2^{-(n+2)} = \\ &= 2^{-(n+4)} + 2^{-(n+3)} + 2^{-(n+4)} - 2^{-(n+2)} = 0 \end{aligned}$$

Die **Energie** ist endlich:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(f) &= \sum_{e \in E} r(e) f^2(\vec{e}) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} r(e_n^+) f^2(e_n^\vec{+}) + \sum_{n=1}^{\infty} r(s_n) f^2(s_n^\vec{-}) \leq \\ &\leq 2 \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-(n+3)} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2(n+2)} < \infty \end{aligned}$$

f verletzt die **Kirchhoffsche Knotenregel** im Randpunkt $x = [(v_n^+)]$.

Sei U eine ϵ -Kugel um x mit $\epsilon < 1$. Wählen wir ϵ nicht zu klein, sind in $T(U)$ höchstens 3 Kanten und $\varphi(T(U))$ ist absolut konvergent. Weiter sei O eine beliebige offene Umgebung von x in U mit $\varphi(T(O))$ absolut konvergent. Wir zeigen $|\varphi(T(O))| > 0$. Sei W die Menge aller Ecken $v_n^+, n \neq 0$, die nicht in O sind. Da O offene Umgebung von x ist, ist W endlich. Nun addieren wir für jedes $w \in W$ alle mit dieser Ecke inzidenten Kanten mit Gewicht zu $\varphi(T(O))$ hinzu. Da dort überall K1 gilt, folgt:

$$\varphi(T(O)) = \varphi(T(O)) + \sum_{\vec{e}=(e,w,u), w \in W, u \in V(G)} \varphi(\vec{e})$$

Diese Summe enthält nach dem Zusammenfassen gleicher Kanten genau die Kante e_0^+ des Strahls (e_n^+), keine Kante e_n^- und jede andere Kante maximal mit Vielfachheit 1. Wir rechnen:

$$|\varphi(T(O))| \geq \frac{3}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-(n+2)} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} > 0$$

Damit verletzt f die Kirchhoffsche Knotenregel im Randpunkt $[x = (v_n^+)]$. \square

4.2.2 Es gibt nur einen Fluss endlicher Energie

Der Hauptteil der Arbeit steckt in Behauptung 4.5. Aus dieser folgt leicht, dass es höchstens einen Fluss endlicher Energie gibt. Um 4.5 zu beweisen, brauchen wir eine kleine Vorüberlegung:

Sei $C > 0$ beliebig. Dann gilt $|\varphi(\vec{s}_n)| \leq C$ für fast alle n . (3)

Beweis. Angenommen nicht: Es gibt also ein $C > 0$ mit $|\varphi(\vec{s}_n)| > C$ für unendlich viele n . Sei J die Menge dieser n . Dann gilt für die Energie $\mathcal{E}(\varphi)$:

$$\mathcal{E}(\varphi) \geq \sum_{n \in J} r(s_n) \varphi(\vec{s}_n)^2 = \sum_{n \in J} \varphi(\vec{s}_n)^2 \geq \sum_{n \in J} C^2 = \infty$$

Das ist ein Widerspruch zur Endlichkeit der Energie. \square

Es lässt sich leicht überprüfen, dass für jedes endliche elektrische Netzwerk die Flusswerte durch I beschränkt sind: $|\varphi(\vec{e})| \leq I$ gilt für den Fluss φ und jede Kantenrichtung \vec{e} . Auf den ersten Blick könnte man denken, dass

dies auch für unendliche elektrische Netzwerke stimmt. Das ist im Allgemeinen nicht der Fall. Lemma 4.6 zeigt unten, dass die Beschränktheit aller Flüsse schon die Eindeutigkeit impliziert. Trotzdem gilt:

Behauptung 4.5. *In N_1 gilt für jede Kantenrichtung \vec{e} und jeden Fluss φ endlicher Energie $|\varphi(\vec{e})| \leq 1$.*

Beweis. Da für $\vec{e} = (e, x, y)$ gilt $\varphi((e, x, y)) = -\varphi((e, y, x))$, genügt $\varphi(\vec{e}) \leq 1$ zu zeigen. Angenommen es gibt ein $\vec{f} \in \vec{E}(G)$ mit $\varphi(\vec{f}) > 1$. Wir werden dies zu einem Widerspruch führen.

Ein gerichteter Weg \vec{P} heißt gut, falls $\varphi(\vec{e}) \geq 0 \forall \vec{e} \in \vec{P}$. Sei R die Menge aller Ecken, die Endecke eines guten gerichteten Weges mit Anfangsecke $ter(\vec{f})$ sind. Sei analog B die Menge aller Ecken, die Anfangsecke eines guten gerichteten Weges mit Endecke $init(\vec{f})$ sind.

Wir zeigen nun

$$R \text{ und } B \text{ sind disjunkt.} \quad (4)$$

Anderenfalls gäbe es ein $v \in R \cap B$. Dann gibt es einen guten Weg \vec{P}_1 von $ter(\vec{f})$ nach v und einen guten Weg \vec{P}_2 von v nach $init(\vec{f})$.

Im endlichen geschlossenen gerichteten Kantenzug $ter(\vec{f})\vec{P}_1v\vec{P}_2init(\vec{f})fter(\vec{f})$ gilt die Regel K2 nicht, weil φ auf allen Kanten größer oder gleich 0 ist und auf f echt größer als 0 ist. Das ist ein Widerspruch, deshalb ist (4) bewiesen.

Da $init(\vec{f}) \in B$, gilt $init(\vec{f}) \notin R$.

Wir zeigen nun

$$|R| \text{ ist unendlich.} \quad (5)$$

Widerspruchsbeweis: Angenommen $|R|$ ist endlich. Dann gilt für den endlichen Schnitt $Z = E(R, V(G) \setminus R)$ die Regel K1. Wir setzen $\vec{Z} = \{\vec{z} | z \in Z, ter(\vec{z}) \in R\}$.

Wäre $\varphi(\vec{z}) < 0$ für ein $\vec{z} \in \vec{Z}$, dann gäbe es einen guten Weg von einer Ecke aus R zu einer außerhalb. Da das Hintereinanderschalten von guten Wegen gute Wege ergibt, kann das nicht sein.

Deshalb gilt $\varphi(\vec{z}) \geq 0 \forall \vec{z} \in \vec{Z}$.

Da $ter(\vec{f}) \in R$ und $init(\vec{f}) \notin R$, ist $\vec{f} \in \vec{Z}$ und somit folgt:

$$\sum_{\vec{z} \in \vec{Z}} \varphi(\vec{z}) \geq \varphi(\vec{f}) > 1$$

Das ist ein Widerspruch zu K1 für die Menge R , da die Summe maximal 1 sein kann, selbst wenn $p \in R$.

Damit ist (5) bewiesen. Analog zeigt man:

$$|B| \text{ ist unendlich.} \quad (6)$$

Wir finden einen endlichen geschlossenen Kantenzug in N_1 , indem K2 verletzt ist. Aussage (3) liefert mit $C = \frac{r(f)\varphi(\vec{f})}{2}$ ein i , sodass $r(s_i)|\varphi(\vec{s}_i)| \leq C$. Die Eckenmenge $s_i = \{v_i^+, v_i^-\}$ ist ein endlicher Eckentrenner, der G in eine unendliche und eine endliche Komponente teilt. Wegen K1 an p und q , ist $f \neq e_0^\pm$. Daher sind die Ecken $init(\vec{f})$ und $ter(\vec{f})$ mit Kanten s_n inzident. Also können wir das i so groß wählen, dass \vec{f} komplett in der endlichen Komponente ist. p und q sind ebenfalls in der endlichen Komponente.

Da $G[R]$ unendlicher Graph ist, kann $G[R]$ nicht komplett in der endlichen Komponente enthalten sein. Da $G[R]$ zusammenhängend ist, gibt es ein $r \in R \cap \{v_i^+, v_i^-\}$. Genauso gibt es ein $b \in B \cap \{v_i^+, v_i^-\}$. Deswegen gibt es gute Wege \vec{P}_r und \vec{P}_b nach r und b .

In folgendem endlichen geschlossenen gerichteten Kantenzug gilt die Regel K2 nicht:

$$K := fter(\vec{f})P_r r s_i b P_b init(\vec{f})f$$

Es gilt nämlich:

$$\sum_{\vec{e} \in \vec{K}} r(e)\varphi(\vec{e}) \stackrel{\text{Def. } R, B}{\geq} r(f)\varphi(\vec{f}) - C \geq \frac{r(f)\varphi(\vec{f})}{2} > 0$$

Das ist ein Widerspruch. □

Lemma 4.6. *Es gibt maximal einen Fluss endlicher Energie in N_1 .*

Vorüberlegung Seien a, b Flüsse endlicher Energie, dann hat $a + b$ auch endliche Energie, da:

$$\begin{aligned} \sum_{e \in E} r(e)(a(\vec{e}) + b(\vec{e}))^2 &= \sum_{e \in E} r(e)(a^2(\vec{e}) + b^2(\vec{e}) + 2a(\vec{e})b(\vec{e})) \leq \\ &\leq 2 \sum_{e \in E} r(e)a^2(\vec{e}) + 2 \sum_{e \in E} r(e)b^2(\vec{e}), \end{aligned}$$

$$\text{wegen } (a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

Beweis. Angenommen φ_1 und φ_2 sind verschiedene Flüsse endlicher Energie. Dann ist $h := \varphi_1 - \varphi_2$ von einer harmonischen Funktion induziert, erfüllt also K2 und K1 für $I = 0$. Weiter gibt es ein $\vec{e} \in \vec{E}$ mit $h(\vec{e}) \neq 0$. Wir setzen:

$c := \varphi_1 + \frac{3}{h(\vec{e})}h$. c ist ein Fluss und hat nach der Vorüberlegung endliche Energie. Weiter gilt: $c(\vec{e}) = \varphi_1(\vec{e}) + 3$. Daher gilt: $|c(\vec{e})| > 1$ oder $|\varphi_1(\vec{e})| > 1$ im Widerspruch zu Behauptung 4.5.

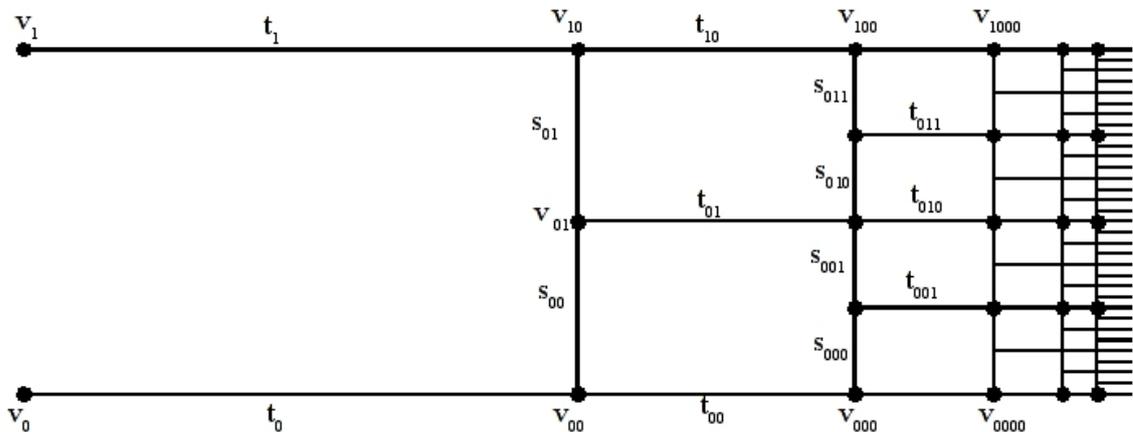
□

Damit ist Satz 4.3 bewiesen.

Im elektrischen Netzwerk N_1 gibt es keinen Fluss endlicher Energie, der die Kirchhoffschen Knotenregel für Randpunkte erfüllt. Wir haben bereits gesehen, dass es dennoch eine solche für elektrische Netzwerke mit endlichem Gesamtwiderstand gibt. Eine wichtige Klasse zwischen diesen beiden ist die Klasse der elektrischen Netzwerke mit kompaktem ℓ -Top. Nun werden wir zeigen, dass es auch hier nicht immer einen Fluss endlicher Energie gibt, der die Kirchhoffschen Knotenregel für Randpunkte erfüllt.

5 Elektrisches Netzwerk mit kompakter Vollständigkeit

5.1 Das elektrische Netzwerk N_2



Die Indizes sind endliche 0-1-Ziffernfolgen. Dabei schreiben wir 0^n für die Ziffernfolge aus n Nullen und 1^n für n Einsen. Weiter sei l die Abbildung, die jeder Ziffernfolge ihre Länge zuordnet.

Den obigen Graphen kann man wie folgt aus dem Graphen aus Abschnitt 4, der unendlichen Leiter ohne die 0. Sprosse, gewinnen. Die n . Sprosse s_n ersetzen wir durch den senkrechten Weg $v_{0^n} \dots v_{10^{n-1}}$. Die horizontalen Kanten erhalten wir, indem wir je zwei Ecken vom v_a und v_{a0} verbinden.

Wie im Bild eingezeichnet, wählen wir folgende Bezeichnungen:

Sei im folgenden a eine beliebige Ziffernfolge.

1. $t_a := \{v_a, v_{a0}\}$
2. $s_a := \{v_a, v_{a+1}\}$, dabei ist $+$ die Standardaddition und $v_a, v_{a+1} \in V(G)$.

Weiter setzen wir die Widerstände wie folgt:

3. $r(s_a) = 2^{-l(a)+1}$
4. $S_n := 2^{-2n-5}$. Wir brauchen unten:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n S_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n-5} = 2^{-5} \quad (7)$$

$$5. r(t_a) := \frac{2^{-l(a)} S_{l(a)} - 2^{-l(a)-1} S_{l(a)+1}}{4} = 2^{-3l(a)-7} - 2^{-3l(a)-10}$$

Und:

6. $p := v_1, q := v_0, I = 1$
7. Wir definieren die Kantenrichtungen $\vec{t}_a := (t_a, v_a, v_{a0})$ und $\vec{s}_a := (s_a, v_a, v_{a+1})$.
8. Eine Kantenmenge, in der nur Kanten vom Typ s_a sind nennen wir senkrecht. Entsprechend nennen wir eine Kantenmenge horizontal, wenn in ihr nur Kanten vom Typ t_a sind.

Damit ist das elektrische Netzwerk N_2 vollständig bestimmt.

5.1.1 Der Rand von G

Satz 5.1. $\partial|G|_r$ ist isometrisch zum reellen Einheitsintervall.

Beweis. Erst betten wir das reelle Einheitsintervall I mit einer Isometrie f in $\partial|G|_r$ ein. Zuerst zeigen wir, dass f eine Isometrie ist (8). Dann zeigen wir, dass $G \cup f(I)$ folgenkompakt ist, (9). Deshalb konvergiert jede Cauchyfolge in $G \cup f(I)$. Also ist $G \cup f(I)$ vollständig. Nach der universellen Eigenschaft der Vervollständigung war damit $G \cup f(I)$ schon die Vervollständigung: $G \cup f(I) = |G|_r$.

Wir definieren $f : I \rightarrow |G|_r$ wie folgt:

$$f\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i 2^{-i}\right) := [v_{a_0}, v_{a_0 a_1}, v_{a_0 a_1 a_2}, \dots]$$

Es bleiben (8) und (9) zu zeigen. Wir beginnen mit

$$f \text{ ist eine Isometrie.} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} d\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i 2^{-i}, \sum_{i=0}^{\infty} b_i 2^{-i}\right) &= \left| \sum_{i=0}^{\infty} (a_i - b_i) 2^{-i} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{i=0}^n (a_i - b_i) 2^{-i} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} d(v_{a_0 \dots a_n}, v_{b_0 \dots b_n}) = d([v_{a_0}, v_{a_0 a_1}, v_{a_0 a_1 a_2}, \dots], [v_{b_0}, v_{b_0 b_1}, v_{b_0 b_1 b_2}, \dots]) = \\ &= d\left(f\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i 2^{-i}\right), f\left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i 2^{-i}\right)\right) \end{aligned}$$

Damit ist (8) gezeigt. Wir zeigen nun

$$G \cup f(I) \text{ ist folgenkompakt.} \quad (9)$$

Sei (a_n) eine Folge. Wir konstruieren nun eine in $G \cup f(I)$ konvergente Teilfolge mit dem Stern-Kamm-Lemma. Hat (a_n) keine unendliche konstante Teilfolge, hat (a_n) eine Teilfolge (a'_n) , sodass je zwei Folgenglieder verschieden sind.

Als Graphen wählen wir den binären Baum T_2 und löschen eine Eckenmenge W . Wir benennen die Ecken von T_2 mit den endlichen 0–1-Ziffernfolgen wie üblich: Die Wurzel kriegt die leere Menge, ihre Söhne die 0 und 1, usw.. Als zu löschende Eckenmenge W nehmen wir die Ziffernfolgen, die mit zwei Einsen beginnen. Jeder Ecke aus G , weisen wir ihren Index zu und erhalten so eine injektive Abbildung nach $V(T_2) \setminus W$. Nach der Wahl von W ist diese Abbildung bijektiv.

Als U wählen wir die unendlich vielen Ecken aus (a'_n) . Nach dem Stern-Kamm-Lemma besitzt T_2 einen Kamm mit allen Zinken in U . Jede Ecke v auf dem Rücken R des Kamms ist ein Trenner in T_2 . Deshalb enthält $[v]$ fast ⁴ den Rücken R und deswegen unendlich viele Ecken aus U .

Anders gesagt: Unendlich viele Ecken aus U haben einen Abstand kleiner gleich $2^{-l(v)}$ zu v . Deshalb ist R Häufungspunkt von (a'_n) in $|G|_r$. R ist Endstück eines Strahls aus $f(I)$. Also hat (a_n) einen Häufungspunkt in $G \cup f(I)$. Damit ist (9) bewiesen. □

Da folgenkompakt für metrische Räume äquivalent zu kompakt ist, folgt aus (9):

Korollar 5.2. $|G|_r$ ist kompakt.

⁴bis auf endlich viele Ecken

5.2 Flüsse auf N_2

Satz 5.3. *Jeder Fluss φ endlicher Energie auf N_2 verletzt die Kirchhoffsche Knotenregel für Randpunkte.*

5.2.1 Beweisskizze

Wie bei der unendlichen Leiter zeigen wir $|\varphi(\vec{e})| \leq 1 \forall e \in \vec{E}(G)$. Mit Lemma 4.6 könnten wir dann wieder schließen, dass es maximal einen Fluss endlicher Energie gibt. Schließlich müssten wir dann den einen Fluss angeben. Da der Graph aber komplizierter als die unendliche Leiter ist, können wir das nicht. Stattdessen nutzen wir $|\varphi(\vec{e})| \leq 1 \forall e \in \vec{E}(G)$, um direkt zu zeigen, dass jeder Fluss mit endlicher Energie die Kirchhoffsche Knotenregel für Randpunkte verletzt.

5.2.2 Der Beweis

Wir brauchen erst einmal eine zu (3) ähnliche Aussage. Die Sprossen der Leiter wurden durch senkrechte Wege ersetzt. Diese Ersetzungswege nennen wir maximale senkrechte Wege. Es gilt:

$$\text{Sei } C > 0 \text{ beliebig. Dann ist für fast jeden maximalen senkrechten Weg } W \text{ die Summe } \sum_{w \in W} r(w) |\varphi(\vec{w})| \leq C. \quad (10)$$

Zum Beweis brauchen wir:

Lemma 5.4. *Sei W eine Menge und r, i Abbildungen von W nach $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann gilt:*

$$\left(\sum_{w \in W} r(w) i(w)^2 \right) \left(\sum_{w \in W} r(w) \right) \geq \left(\sum_{w \in W} r(w) i(w) \right)^2$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \left(\sum_{w \in W} r(w) i(w)^2 \right) \left(\sum_{w \in W} r(w) \right) &= \sum_{w, u \in W} r(w) i(w)^2 r(u) = \\ &= \sum_{w \in W} r(w)^2 i(w)^2 + \sum_{\{w, u\} \in [W]^2} r(w) r(u) (i(w)^2 + i(u)^2) \geq \end{aligned}$$

Das Umstellen der 2. Binomischen Formel ergibt: $a^2 + b^2 \geq 2ab \forall a, b \in \mathbb{R}$.

$$\geq \sum_{w \in W} r(w)^2 i(w)^2 + \sum_{\{w,u\} \in [W]^2} r(w)r(u)2i(w)i(u) = \left(\sum_{w \in W} r(w)i(w) \right)^2$$

□

Nun können wir (10) beweisen.

Beweis. Sei $\sum_{w \in W} r(w)|\varphi(\vec{w})| > C$ für unendlich viele W . Sei J die Menge dieser W . Wir wenden Lemma 5.4 an mit: $W = W, i(w) := |\varphi(\vec{w})|, r(w) := r(w)$. Es gilt $\sum_{w \in W} r(w) = 1$. Damit ist die Energie entlang jedes Weges W mindestens C^2 . Da J unendlich ist und je zwei maximale senkrechte Wege disjunkt sind, ist die Gesamtenergie $\geq C^2 \cdot \infty$. Das ist ein Widerspruch. □

Wie bei der unendlichen Leiter gilt:

Behauptung 5.5. *Für jede Kantenrichtung \vec{e} und jeden Fluss φ gilt $|\varphi(\vec{e})| \leq 1$.*

Beweis. Diese Behauptung beweisen wir wie 4.5. Dort haben wir die Aussagen (4), (5) und (6) für jedes lokal endliche elektrische Netzwerk gezeigt. Diese besagen: Die im Beweis von 4.5 definierten Mengen R und B sind disjunkt und unendlich. Der letzte Abschnitt des Beweises läuft ebenfalls analog: Wir müssen lediglich die Leitersprosse durch den entsprechenden senkrechten Weg W ersetzen:

Wir finden einen endlichen geschlossenen Kantenzug in N_2 , indem K2 verletzt ist. Aussage (10) liefert mit $C = \frac{r(f)\varphi(\vec{f})}{2}$ ein W , sodass gilt:

$$\sum_{w \in W} r(w)|\varphi(\vec{w})| \leq C$$

Die Eckenmenge $V(W)$ von W ist ein endlicher Eckentrenner, der G in eine unendliche und eine endliche Komponente teilt. Wir können den senkrechten Weg W so wählen, dass \vec{f} komplett in der endlichen Komponente ist. p und q sind ebenfalls in der endlichen Komponente.

Da $G[R]$ unendlicher Graph ist, kann $G[R]$ nicht komplett in der endlichen Komponente enthalten sein. Da $G[R]$ zusammenhängend ist, gibt es ein $r \in R \cap V(W)$. Genauso gibt es ein $b \in B \cap V(W)$. Deswegen gibt es gute Wege \vec{P}_r und \vec{P}_b nach r und b .

In folgendem endlichen geschlossenen gerichteten Kantenzug gilt die Regel K2 nicht:

$$K := fter(\vec{f})P_r rWbP_b init(\vec{f})f$$

Es gilt nämlich:

$$\sum_{\vec{e} \in \vec{K}} r(e)\varphi(\vec{e}) \stackrel{\text{Def. } R, B}{\geq} r(f)\varphi(\vec{f}) - C \geq \frac{r(f)\varphi(\vec{f})}{2} > 0$$

Das ist ein Widerspruch. □

Wie oben angekündigt, werden wir nun mit Behauptung 5.5 zeigen, dass φ die Kirchhoffsche Knotenregel verletzt. Dazu bestimmen wir genauer φ an den senkrechten Kanten. Oben haben wir S_n als Folge sehr kleiner Zahlen definiert, genauer $S_n := 2^{-2n-5}$.

$$\text{Für die senkrechte Kante } s_a \text{ gilt: } |\varphi(\vec{s}_a)| \leq S_{l(a)}. \quad (11)$$

Beweis. Angenommen nicht. Dann gibt es ein a mit $|\varphi(\vec{s}_a)| > S_{l(a)}$. Wir werden 3 Wege finden, die zusammen mit s_a einen Kreis bilden. Die Spannung entlang jedes der drei Wege wird kleiner als $\delta := \frac{S_{l(a)}}{4}$ sein. Das ergibt einen Widerspruch zu K2.

Aussage(10) liefert uns ein W mit $u'(W) := \sum_{w \in W} r(w)|\varphi(\vec{w})| < \delta$. Sei T_0 der eindeutige waagerechte Verbindungsweg von $init(\vec{s}_a)$ nach W und x_0 dessen Endpunkt. Analog sei T_1 der eindeutige waagerechte Verbindungsweg von $ter(\vec{s}_a)$ nach W und x_1 dessen Endpunkt. Wegen $u'(W) < \delta$, ist die Spannung entlang $W' := x_0 W x_1$ kleiner δ . Für T_0 rechnen wir:

$$\begin{aligned} u(T_0) &:= \sum_{t \in T_0} r(t)\varphi(\vec{t}) \stackrel{\text{Beh. 5.5}}{\leq} \sum_{t \in T_0} r(t) \leq \sum_{j=l(a)}^{\infty} \frac{2^{-j}S_j - 2^{-(j+1)}S_{j+1}}{4} \\ &=_{\text{Teleskopsumme}} \frac{2^{-l(a)}S_{l(a)}}{4} < \frac{S_{l(a)}}{4} = \delta \end{aligned}$$

Analog gilt $u(T_1) := \sum_{t \in T_1} r(t)\varphi(\vec{t}) < \delta$. $s_a T_0 W' T_1 s_a$ ist ein Kreis, indem K2 verletzt ist. Das ist ein Widerspruch. □

5.2.3 Beweis von Satz 5.3

Wir zeigen, dass φ die Kirchhoffsche Knotenregel für Randpunkte in $x := [(v_{10^n})]$ verletzt. Wir wählen als offene Umgebung U von x die Menge aller Punkte in $|G|_r$, die nicht $v_1 = p$ sind und nicht auf dem unteren Strahl liegen. $T(U)$ enthält also die Kantenrichtung \vec{t}_1 und alle senkrechten Kantenrichtungen, die vom unteren Strahl ausgehen. Wegen 11 ist $\varphi(T(U))$ absolut konvergent. Sei O eine Umgebung von x in U , so dass $\varphi(T(O))$ absolut konvergent ist. Wir zeigen $\varphi(T(O)) \neq 0$.

Jeder horizontale Strahl hat entweder nur endlich viele Ecken in O oder ist schließlich in O . Zu einem horizontalen Strahl Q , der schließlich in O ist, sei v_Q die erste Ecke, so dass alle Nachfolger auf dem Strahl auch in O sind. Unser Wahl von U garantiert: Der untere Strahl ist nie in O , die Ecke $v_1 = p$ ist nicht in O . Weiter sei W_Q die Menge aller Vorgänger von v_Q auf Q , die nicht in O sind außer $v_1 = p$. Sei W die Vereinigung über alle Mengen W_Q , wobei Q ein horizontalen Strahl ist, der schließlich in O ist. Wir setzen:

$$T'(O) := \{\vec{e} \in \vec{E}(G) \mid \text{ter}(\vec{e}) \in O \cup W, \text{init}(\vec{e}) \notin O \cup W\},$$

$$T'' := \{\vec{e} \in \vec{E}(G) \mid \text{ter}(\vec{e}) \in W, \text{init}(\vec{e}) \notin W\},$$

$$\varphi(T'(O)) := \sum_{\vec{e} \in T'(O)} \varphi(\vec{e}), \varphi(T'') := \sum_{\vec{e} \in T''} \varphi(\vec{e})$$

Da $T'(O)$ außer t_1 nur senkrechte Kanten enthält und im folgenden über diese maximal zweimal summiert wird gilt:

$$\sum_{\vec{e} \in T'(O)} |\varphi(\vec{e})| \leq |\varphi(\vec{t}_1)| + 2\text{Senk},$$

wobei Senk die Summe über die Gewichte aller senkrechten Kanten ist. Es gibt 2^{n-1} senkrechte Kanten s_a mit $l(a) = n$. Nach (11) tragen diese maximal mit $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} S_n \stackrel{\text{Gl. (7)}}{\leq} \frac{1}{8}$ bei. Damit ist $\varphi(T'(O))$ absolut konvergent. Wegen $\varphi(T(O)) - \varphi(T'(O)) = \varphi(T'')$ ist auch $\varphi(T'')$ absolut konvergent. Da an jeder Ecke aus W die Regel K1 gilt, ist $\varphi(T'') = 0$. Also gilt:

$$\varphi(T(O)) = \varphi(T'(O)) \geq |\varphi(\vec{t}_1)| - 2|\text{Senk}| \geq \frac{1}{2} - 2\frac{1}{8} > 0$$

Damit ist der Satz 5.3 bewiesen.

6 Danksagung

Ich bedanke mich bei Reinhard Diestel und Agelos Georgakopoulos für ihre intensive Betreuung.

Literatur

- [1] M. A. Armstrong. *Basic Topology*. Springer-Verlag, 1983.
- [2] N. L. Biggs. Algebraic potential theory on graphs. *Bull. London Math. Soc.*, 29:641–682, 1997.
- [3] R. Diestel. *Graph Theory* (3rd edition). Springer-Verlag, 2005.
Electronic edition available at:
<http://www.math.uni-hamburg.de/home/diestel/books/graph.theory>.
- [4] A. Georgakopoulos. Graph topologies induced by edge lengths. Preprint 2009.
- [5] A. Georgakopoulos. Uniqueness of electrical currents in a network of finite total resistance. *J. London Math. Soc.*, 2010. doi: 10.1112/jlms/jdq034.
- [6] K. Königsberger. *Analysis 2*. Springer-Verlag, 2003.
- [7] R. Lyons and Y. Peres. *Probability on Trees and Networks*. Cambridge University Press. In preparation, current version available at <http://mypage.iu.edu/~rdlyons/prbtree/prbtree.html>.
- [8] S. McGuinness S. Markvorsen and C. Thomassen. Transient random walks on graphs and metric spaces with applications to hyperbolic surfaces. *Proc. London Math. Soc.*, 64:1–20, 1992.
- [9] P. M. Soardi. *Potential Theory on Infinite Networks*. Springer-Verlag, 1991.