Eine topologische Erweiterung des Orientierungs-Theorems von Nash-Williams auf lokal endliche Graphen

von

Lena Jannasch

Matrikelnummer: 6692226

Bachelorarbeit im Studiengang Mathematik
Universität Hamburg

1. Juli 2019

Betreuer: Dr. Max Pitz

Gutachter: Prof. Dr. Reinhard Diestel

0 Notation

Die grundlegenden Notationen und Definitionen, die in dieser Arbeit verwendet werden, wurden aus der deutschen Ausgabe von Diestels Buch über Graphentheorie [Q1] übernommen.

Das Definiendum ist immer fett geschrieben, außer es handelt sich dabei um einen mathematischen Ausdruck.

Nicht präzise definierte Begriffe, die der anschaulichen Erläuterung einer Idee dienen, sind durch Anführungszeichen '...' hervorgehoben.

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ enthalten die 0.

Einen Kantenzug $P = x_0e_1x_1 \dots e_nx_n$ in einem Graphen G, wobei $e_i \in E(G)$ und $x_i \in V(G)$ für alle $i \in \mathbb{N}$, bezeichnen wir als Pfad. Mit x_0Py ist der Teilpfad von P gemeint, der aus $x_0e_1 \dots e_jx_j$ besteht, wobei j die kleinste Zahl aus $\{0, \dots, n\}$ ist für die $x_j = y$ gilt.

Für eine Funktion $f : X \to Y$ und eine Teilmenge $U \subseteq X$ beschreibt $f(U)$ die Menge $\{f(u) : u \in U\} \subseteq Y$.

Die Worte „ohne Beschränkung der Allgemeinheit“ werden mit „o.B.d.A.“ abgekürzt.

Der Ausdruck „entweder... oder“ wird äquivalent zu „oder“ im einschließenden Sinne benutzt.

Sätze und Aussagen, deren Beweis in dieser Arbeit nicht angegeben ist, sind mit einem direkten Verweis zu der am Ende der Arbeit angegebenen Quelle gekennzeichnet.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Zusammenfassung

1959 zeigte Nash-Williams, dass jeder $2k$-kantenzusammenhängende, endliche Graph eine stark k-zusammenhängende Orientierung hat, siehe [Q2]. Ob das Theorem auch für unendliche Graphen gilt bleibt offen. In Artikel [Q9] wird die Vermutung geäußert, dass es möglich sei, eine topologische Version des Theorems zu zeigen. Ziel dieser Arbeit ist es, eine Erweiterung des Orientierungs-Theorems von Nash-Williams auf den topologischen Raum $|G|$ für lokal endliche Graphen G zu beweisen. Dazu zeigen wir auch, dass das Bild eines gerichteten, topologischen v-w-Pfades zu einem gerichteten v-w-Bogen ('Weg') ausgedünnt werden kann.

Wir wollen die Frage, die der Satz von Menger für ungerichtete Graphen beantwortet, auf gerichtete Graphen übertragen: Wann gibt es zu einem $k \in \mathbb{N}$ eine Orientierung eines Graphen G, sodass für jedes geordnete Tupel (v, w) von zwei Ecken des Graphen k gerichtete, kantendisjunkte v-w-Wege existieren?
Die gesuchte Orientierung von dem Graphen G zu festem k nennen wir gut. Für $k = 0$ ist die Frage trivial. Im Folgenden sei k immer eine positive, natürliche Zahl. Ein notwendiges Kriterium für die Existenz einer guten Orientierung in einem endlichen Graphen ist offensichtlich: Jeder gerichtete Schnitt $\vec{E}(X, V \setminus X)$ in einer guten Orientierung von G enthält mindestens k Kanten. Deshalb enthält jeder ungerichtete Schnitt von G mindestens $2k$ Kanten. Nash-Williams zeigte 1959 in [Q2], dass dies sogar ein hinreichendes Kriterium ist. Es gilt die Äquivalenz:

Satz 1.0.1. *Ein endlicher Multigraph G ohne Schlingen ist genau dann $2k$-kantenzusammenhängend, wenn für k eine gute Orientierung von G existiert.*

Auf Seite 556 derselben Publikation postulierte Nash-Williams, dass dies auch für unendliche Graphen gilt. Allerdings kam er in seiner Arbeit über unendliche Graphen von 1967 [Q7] und auch in späteren Publikationen nicht darauf zurück. Bis heute ist offen, ob das Theorem generell für unendliche Graphen gilt.
In einigen Spezialfällen existieren Beweise des Orientierungs-Theorems, die schon früher auf unendliche Graphen erweitert wurden. Robbins zeigte 1939, dass jeder 2-zusammenhängende Graph eine gute Orientierung für $k = 1$ besitzt [Q3] und Egyed hat dieses auf unendliche Graphen erweitert [Q4]. 2015 bewies Thomassen seine Vermutung von 1985, dass für jede positive, natürliche Zahl k ein kleinstes $f(k)$ existiert, sodass jeder $f(k)$-kantenzusammenhängende Graph eine gute Orientierung zu k besitzt. Außerdem bewies er in dieser Publikation [Q8, Theorem 7], dass jeder $8k$-kantenzusammenhängende Graph eine Einbettung eines hoch kantenzusammenhängenden, eulerschen Graphen enthält und deshalb $f(k) \leq 8k$ gilt. Diese Aussage lässt sich mit Hilfe des Lemmas von Zorn auf unendliche Graphen erweitern.
Generell scheint es, wie so oft beim Übertragen von Aussagen über endliche auf unendliche Graphen, schwierig zu sein ein direktes Gegenstück von Satz 1.0.1 für unendliche Graphen zu finden und Thomassens Schranke zu verbessern. Die in [Q6] konstruierten Graphen verdeutlichen dies. In dem Artikel [Q9] aus dem Jahr 2015 wird die Vermutung artikuliert, dass es möglich sei, eine topologische Version des Orientierungs-Teorems für unendliche Graphen zu zeigen, „but for the time being it even remains open how it would look like “.
Nash-Williams bezog sich in seiner Publikation [Q2] auf endliche Multigraphen ohne Schlingen. Wir werden eine Erweiterung des Orientierungs-Theorems auf die Freudenthal-Kompaktifizierung $|G|$ eines lokal endlichen, zusammenhängenden Multigraphen G ohne Schlingen beweisen. Die

Erweiterung gilt auch für lokal endliche, zusammenhängende Graphen, da diese Multigraphen ohne Doppelkanten und Schlingen sind. Die Forderung, dass der Graph G zusammenhängend sein soll, folgt direkt daraus, dass $k \geq 1$ gilt und wird für die Definition des topologischen Raumes $|G|$ benötigt.
Die genauen Definitionen sind in Kapitel 3 angegeben. Für ein festes k unterscheidet sich die gesuchte, gute Orientierung von $|G|$ von der guten Orientierung von G im Wesentlichen dadurch, dass gerichtete Wege in dem Raum $|G|$ auch unendliche Länge haben dürfen. Das Hauptresultat dieser Arbeit ist es, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 1.0.2. *Ein lokal endlicher, zusammenhängender Multigraph G ohne Schlingen ist genau dann $2k$-kantenzusammenhängend, wenn zu k eine gute Orientierung von $|G|$ existiert.*

Der vollständige Beweis wird in Abschnitt 5.5 angegeben. Auch in diesem Fall ist die Rückrichtung schnell gezeigt. Für den Beweis der Hinrichtung zeigen wir zunächst einige Zwischenschritte. Wie schon erwähnt benötigen wir eine Erweiterung der Definitionen von endlichen, gerichteten Pfaden und Wegen zu gerichteten, topologischen Pfaden und gerichteten Bögen. In dem Abschnitt 3.3 werden wir dies mit Hilfe von stetigen Funktionen aus dem Einheitsintervall umsetzen. Zu einem $2k$-kantenzusammenhängenden Graphen G werden wir in 5.1 eine geeignete Folge endlicher Graphen mit der Freudenthal Kompaktifizierung $|G|$ als 'Limes' finden, sodass wir *Königs Unendlichkeitslemma* anwenden und eine Orientierung von $|G|$ aus den guten Orientierungen der endlichen Graphen konstruieren können. Um zu zeigen, dass die konstruierte Orientierung von $|G|$ tatsächlich gut ist, wenden wir in Abschnitt 5.2 wiederum *Königs Unendlichkeitslemma* an. Für zwei beliebige Ecken $v, w \in V(G)$ finden wir die gesuchten k kantendisjunkten, gerichteten v-w-Bögen in $|G|$ in den 'Limites' geeigneter, gerichteter v-w-Pfade aus den endlichen Graphen. Dazu müssen wir die gerichteten Pfade zunächst in gerichtete, topologische Pfade, also stetige Funktionen, 'umwandeln', siehe Abschnitt 5.3. Die 'Limites' dieser, welche in Abschnitt 5.4 näher betrachtet werden, sind wiederum gerichtete, topologische v-w-Pfade. In diesen k kantendisjunkten, gerichteten, topologischen v-w-Pfaden finden wir die gesuchten v-w-Bögen. Wichtig ist, dass die Durchlaufrichtung weiterhin mit der Orientierung von $|G|$ übereinstimmt. Hierfür benötigen wir ein Lemma, dass wir in Kapitel 4 beweisen werden und dass es uns erlaubt einen gerichteten, topologischen Pfad zu einem gerichteten, topologischen Bogen auszudünnen. Erstmals wurde dies 2018 in [Q11] mit Hilfe einer Charakterisierung von gerichteten, topologischen Pfaden und Bögen über den Schnitt mit endlichen, gerichteten Schnitten bewiesen. Wir werden einen eigenen, direkteren Beweis angeben.

2 Spezialfälle

2.1 Eulersche Graphen

Als Einstieg in die Thematik beweisen wir Nash-Williams Theorem zunächst für endliche, eulersche Multigraphen. Die Notationen und Definitionen wurden aus Diestels Buch [Q1] übernommen und sind in Abschnitt 3 im Detail angegeben.

Satz 2.1.1. *Für jede positive, natürliche Zahl k und jeden endlichen, $2k$-kantenzusammenhängenden, eulerschen Multigraphen existiert eine gute Orientierung.*

Beweis. Sei G ein Graph wie in der Behauptung mit einem Eulerzug $P = v_0 e_o v_1 \dots e_l v_{l+1}, E(G) = \{e_0, \dots, e_l\}, v_i \in V(G)$ und $v_0 = v_{l+1}$. Durch Festlegung eines Drehsinns von P bekommen wir eine Orientierung D von G mit gerichteten Kanten $\vec{E} = \{\vec{e_0}, \dots, \vec{e_l}\}$, wobei $\vec{e_i} = (e_i, v_i, v_{i+1})$. Wir wollen nun zeigen, dass diese Orientierung die gewünschte Eigenschaft erfüllt. Seien $v, w \in V(G)$ beliebig.
Wir betrachten das Netzwerk $N = (G, s, t, c)$ (siehe [Q1, Kapitel 5]), wobei wir v als Quelle, w als Senke und die Kapazitätsfunktion wie folgt wählen:

$$c(t) := \begin{cases} 1 & \vec{e} \in \vec{E}, \\ 0 & \vec{e} \notin \vec{E}. \end{cases}$$

Ein Fluss der Stärke k in diesem Netzwerk benutzt k kantendisjunkte, gerichtete $v-w$-Pfade aus $\vec{E}$, welche wir zu gerichteten $v-w$-Wegen ausdünnen können. Es reicht also zu zeigen, dass so ein Fluss existiert. Dazu benutzen wir das *max-flow-min-cut theorem* von Ford und Fulkerson [Q1, Satz 5.2.2.], das besagt, dass die größte Stärke eines Flusses gleich der kleinsten Kapazität eines Schnittes ist.
Sei (V_1, V_2) eine beliebige, echte Partition der Eckenmenge des Graphen, sodass $v \in V_1$ und $F := E(V_1, V_2)$ ein Kantentrenner in G ist. Da G nach Annahme $2k$-kantenzusammenhängend ist, gilt $|F| \geq 2k$. Da $\vec{P} := v_0 \vec{e_0} v_1 \dots \vec{e_l} v_{l+1}$ ein gerichteter, geschlossener Kantenzug ist, der jede Kante aus $\vec{E}(G)$ beinhaltet, induziert dieser für jede Kante $\vec{e}$ einen gerichteten Eulerzug auf $G/\vec{e}$. Wir können also $G(V_1)$ und $G(V_2)$ jeweils zu einer einzigen Ecke ohne Schlingen kontrahieren und erhalten auf dem entstandenen Multigraphen, der aus zwei Ecken und den endlich vielen Kanten aus F besteht, einen von $\vec{P}$ induzierten Eulerzug. Dieser kann nur zwischen den beiden Ecken hin und her laufen und muss folglich gleich viele Kanten in jede Richtung enthalten. Es gibt mindestens k Kanten von V_1 nach V_2 und somit gilt nach Wahl unserer Kapazitätsfunktion $c(V_1, V_2) \geq k$ und wir sind fertig, da die Existenz eines Flusses der Stärke mindestens k nun aus dem *max-flow-min-cut theorem* folgt.

$\square$

2.2 2-kantenzusammenhängende Graphen

Für den Fall $k = 1$ können wir eine gute Orientierung mit Hilfe eines normalen Spannbaumes direkt angeben.

Satz 2.2.1. *Für jeden endlichen 2-kantenzusammenhängenden Graphen existiert eine Orientierung, so dass es für je zwei Ecken v, w einen gerichteten v-w-Weg gibt.*

Beweis. Sei G ein endlicher, 2-kantenzusammenhängender Graph. Da G zusammenhängend ist, finden wir einen normalen Spannbaum T von G mit Wurzel r. Wir definieren nun eine Orientierung von G mit Hilfe der Baumordnung von T bezüglich r. Für $x, y \in V$ sagen wir $x \leq y$, wenn $x \in rTy$. Wir orientieren alle Kanten von $E(T)$ in Richtung der größeren und alle Kanten von $E(G) \setminus E(T)$ in Richtung der kleineren inzidenten Ecke. Dies gibt uns eine eindeutige Orientierung von G, da die Endecken eines jeden T-Weges vergleichbar sind. Wir wollen nun zeigen, dass diese die gewünschte Eigenschaft erfüllt.
Seien $v, w \in V(G)$ beliebig. Wenn wir einen gerichteten Pfad von v nach r finden, können wir diesen mit dem Weg in T von r nach w kombinieren und bekommen einen gerichteten v-w-Pfad, welchen wir dann zu einem gerichteten Weg ausdünnen können. Es reicht also zu zeigen, dass wir einen gerichteten v-r-Pfad finden können. Dies machen wir per Induktion über den Abstand $i := |E(vTr)|$ von v zu r. Die Distanzklassen D_i sind definiert als $\{u \in V(G) : r\text{-}u\text{-Weg in } T \text{ hat die Länge } i\}$.
Für $i = 0$ gilt die Aussage trivialerweise. Sei $v \in D_i$ und e die letzte Kante auf dem Weg von r nach v in T, also diejenige Kante mit $ter(e) = v$. Da der Graph 2-kantenzusammenhängend ist, existiert außer e noch mindestens eine weitere Kante xy von $\lfloor v \rfloor := \{u : u \geq v\}$ nach $G - \lfloor v \rfloor$, wobei $x \in \lfloor v \rfloor$ und $y \in G - \lfloor v \rfloor$. Da x und y in T vergleichbar sein müssen und $y \notin \lfloor v \rfloor$, gilt $y < v \leq x$ und die Kante xy ist nach Konstruktion der Orientierung von x nach y gerichtet. Zusammen mit dem gerichteten v-x-Weg in T haben wir nun einen gerichteten v-y-Weg gefunden. Da $y \in D_j$ mit $j < i$, finden wir nach der Induktionsannahme einen gerichteten y-r-Pfad. Durchlaufen wir den v-y und y-r-Pfad hintereinander bekommen wir einen gerichteten v-r-Pfad und sind fertig.

$\square$

Dieser Beweis lässt sich analog für abzählbare, 2-kantenzusammenhängende Graphen führen, da auch diese nach [Q1, Theorem 8.2.4.] einen normalen Spannbaum besitzen. Zwei gerichtete, topologische Pfade lassen sich zusammenfügen und zu einem gerichteten, topologischen Bogen ausdünnen. Wie genau wird in den Abschnitten 3 und 4 gezeigt. Der Beweis lässt sich nicht auf überabzählbare Graphen übertragen, da ein normaler Spannbaum dann nicht immer existiert. Dennoch gilt die Aussage auch, wie in der Einleitung erwähnt, generell für unendliche Graphen [Q4].

3 Definitionen

In diesem Abschnitt werden die für den Beweis von Satz 1.0.2 benötigten Definitionen eingeführt.

3.1 Die Freudenthal Kompaktifizierung $|G|$

Sei der Multigraph $G = (V, E, \Omega)$ ohne Schlingen lokal endlich und zusammenhängend, wobei $\Omega(G)$ die Menge aller Enden von G beschreibt. Ein einfaches, nicht endliches Beispiel für G wäre ein **Strahl** R, also ein Graph für den $V(R) = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ und $E(R) = \{x_0x_1, x_1x_2, x_2x_3, \ldots\}$ ist. Ein **Ende** $\omega \in \Omega(G)$ ist als Äquivalenzklasse von Strahlen in G definiert. Zwei Strahlen sind äquivalent genau dann, wenn sie für jede endliche Menge $S \subset V(G)$ einen Untergraphen, der ebenfalls ein Strahl ist, in der selben Komponente von $G - S$ haben. Für jede Kante $e = xy \in E$ fügen wir eine homöomorphe Kopie des offenen Einheitsintervalls $\mathring{e}$ hinzu, die disjunkt zueinander und zu V sind. Wir wählen eine feste Bijektion zu dem offenen Einheitsintervall und erweitern diese zu einer zwischen $[0, 1]$ und der **topologischen Kante** $e := \{x\} \cup \mathring{e} \cup \{y\}$, wodurch eine Metrik auf ihr induziert wird. Den fest gewählten Homöomorphismus von $[0, 1] \to e$ nennen wir φ^e. Der Raum $|G|$ besteht aus der Menge $V \cup \Omega$ zusammen mit der Menge $\mathring{E} := \{\mathring{e} : e \in E\}$, dem Inneren der topologischen Kanten. Dadurch können wir eine **Basis für die Topologie von** $|G|$ angeben:
(i) Für jede topologische Kante $e \in E$ nennen wir die Teilmengen von $\mathring{e}$ offen, deren Urbild unter φ^e in $[0, 1]$ offen ist.
(ii) Für jede Ecke $v \in V$ und $\epsilon \in (0, 1)$ ist der 'Stern um v mit Radius ϵ' offen. Dieser ist definiert als die Vereinigung der Mengen aller Punkte aus $vu \subseteq E$ über alle $u \in N(v)$, deren Abstand zu v kleiner ist als ϵ bezüglich der von φ^{vu} induzierten Metrik.
(iii) Für jedes Ende $\omega \in \Omega$ und jede endliche Menge $S \subseteq V$ existiert eine eindeutige Komponente $C(S, \omega)$ von $G - S$, die Strahlen aus der Äquivalenzklasse ω enthält. Die Menge $\Omega(S, \omega)$ ist definiert als $\{\omega' \in \Omega : C(S, \omega') = C(S, \omega)\}$ und für jedes $\epsilon \in (0, 1)$ sei $\mathring{E}_\epsilon(S, \omega)$ die Menge aller Punkte aus den S–$C(S, \omega)$-Kanten, deren Abstand zu ihrem Endpunkt in $C(S, \omega)$ kleiner als ϵ ist. Wir definieren nun alle Mengen der Form $\widehat{C}_\epsilon(S, \omega) := \mathring{E}_\epsilon(S, \omega) \cup C(S, \omega) \cup \Omega(S, \omega)$ als offen.
Dies gibt uns eine Topologie auf dem Raum $|G|$, welcher dadurch zu einem kompakten Hausdorff-Raum wird [Q1, Proposition 8.6.1.]. Der angegebene Beweis lässt sich analog für Multigraphen ohne Schlingen führen. Man sieht leicht, dass die Aussage für Multigraphen ohne Schlingen gilt, da diese durch das Einfügen einer Ecke in jede Kante zu einem Graphen werden und die Topologie des zugehörigen topologischen Raumes dadurch nicht geändert wird. Für einen endlichen Graphen G_n besteht $|G_n|$ aus $V(G_n) \cup \mathring{E}(G_n)$.

3.2 Orientierungen von Graphen

Ein **gerichteter Multigraph** besteht aus einem Paar disjunkter Mengen (V, E) von Ecken und Kanten und zwei Funktionen $init : E \to V$ und $ter : E \to V$, die jeder Kante e eine Anfangsecke $init(e)$ und eine Endecke $ter(e)$ zuordnen. Jede Kante hat somit eine Richtung, von ihrer Startecke zu ihrer Endecke. Die Menge aller gerichteten Kanten $\{\vec{e} = (e, init(e), ter(e)) \mid e \in E\}$ bezeichnen wir mit $\vec{E}$.
Ein gerichteter Multigraph D ist eine **Orientierung eines Multigraphen** G, wenn die Ecken- und Kantenmengen, $V(D)$ und $E(D)$, mit denen von G übereinstimmen und für jede Kante

$e \in E(G)$ die Menge der inzidenten Ecken in $V(G)$ gleich der Menge $\{init(e), ter(e)\}$ in $V(D)$ ist. Es gibt $2^{|E(G)|}$ verschiedene Orientierungen von einem ungerichteten Multigraphen G ohne Schlingen. Wenn wir eine feste Orientierung D von einem Multigraphen G gewählt haben, so sprechen wir von dem gerichteten Multigraphen G und meinen damit die Orientierung D.
Eine **Orientierung von** $|G|$ ist analog zu einer Orientierung von G durch die Abbildungen $init : E \to V$ und $ter : E \to V$ definiert, die jeder topologischen Kante $e \in E$ eine Anfangs- und eine Endecke zuordnen. Ein gerichteter $|G|$ besteht aus $V \cup \Omega$ zusammen mit der Menge der inneren Punkte der gerichteten topologischen Kanten $\vec{\mathring{E}}$.

3.3 Gerichtete Pfade und Wege

Sei $G = (V, E, \Omega)$ ein ungerichteter, lokal endlicher, zusammenhängender Multigraph ohne Schlingen, $x_i \in V(G)$ und $e_i \in E(G)$ für alle i. Einen Kantenzug $P = x_0 e_1 x_1 \ldots e_n x_n$ bezeichnen wir als Pfad in G oder dem zugehörigen topologischen Raum $|G|$. Betrachten wir P in einer Orientierung von G oder $|G|$, indem jede Kante $e_i \in E(P)$ durch eine gerichtete Kante $\vec{e_i}$ ersetzt wird, so wird er zu einem **gerichteten** x_0**-**x_n**-Pfad** $\vec{P} = x_0 \vec{e_1} x_1 \ldots \vec{e_n} x_n$, falls $\vec{e_i}$ für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ von x_{i-1} nach x_i gerichtet ist. Wir wollen diese Definitionen von endlichen Wegen und Pfaden nun erweitern.

Definition 3.3.1. Sei X ein beliebiger Hausdorffraum mit zwei Punkten $x, y \in X$.

1. Ein **topologischer** x**-**y**-Pfad** ist eine stetige Abbildung $\pi : [0,1] \to X$, die 0 auf x und 1 auf y abbildet. Er hat einen **Durchlaufsinn** von x nach y.

2. Wir nennen P einen x**-**y**-Bogen** in X, falls ein Homöomorphismus $f : [0,1] \to P$ mit $f(0) = x$ und $f(1) = y$ existiert. Er verbindet x mit y.

Das Bild eines topologischen Pfades in $|G|$ soll die Rolle eine Pfades in G ersetzen und der Bogen ('arc') ist das Pendant zu einem Weg. Weder das Bild eines topologischen Pfades, noch ein Bogen müssen aus endlich vielen Ecken und Kanten bestehen.
Sei $P = x_0 e_1 x_1 \ldots e_n x_n$ mit $x_0 =: x$ und $x_n =: y$ ein x-y-Pfad in einem lokal endlichen, zusammenhängenden Multigraphen G ohne Schlingen. Jede topologische Kante e_i ist als Bild des Homöomorphismus φ^{e_i} ein x_{i-1}-x_i-Bogen. Wir können eine stetige Abbildung $\pi(t) : [0,1] \to |G|$ stückweise definieren durch $\pi(t) := \varphi^{e_i}\left(n\left(t - \frac{i-1}{n}\right)\right)$ für $t \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ und $i \in \{1, \ldots, n\}$, da $\varphi^{e_i}(1) = \varphi^{e_{i+1}}(0)$. Also ist P das Bild eines topologischen x-y-Pfades in $|G|$ mit Durchlaufsinn von x nach y. Falls P ein Weg ist, so ist π injektiv und P ein x-y-Bogen. Die Definitionen sind kongruent mit denen für endliche Multigraphen.
Ein Lemma aus der Topologie besagt, dass das Bild eines topologischen x-y-Pfades in einem Hausdorffraum einen x-y-Bogen enthält [Q5]. Wir wollen dies in Abschnitt 4 auf gerichtete, topologische Pfade und Bögen erweitern. Die Definition eines gerichteten, topologischen Pfades soll gewährleisten, dass der Durchlaufsinn des topologischen Pfades und die Orientierung der Kanten im Bild zueinanderpassen.

Definition 3.3.2. Seien $x, y \in V$.

1. Ein **gerichteter, topologischer** x**-**y**-Pfad** in dem gerichteten $|G|$ ist eine stetige Abbildung π aus dem Einheitsintervall nach $|G|$, die 0 auf x und 1 auf y abbildet, sodass für alle $a < b$ aus $[0,1]$ mit $\pi(a), \pi(b) \in \vec{\mathring{e}}$ für eine gerichtete, topologische Kante $\vec{e} \in \vec{E}$ mit fester Bijektion φ^e zum Einheitsintervall gilt, dass $\pi(a) \in \varphi^e((0, b])$. Das Bild von π nennen wir einen **gerichteten** x**-**y**-Pfad** in $|G|$.

2. P ist ein **gerichteter x-y-Bogen** in dem gerichteten $|G|$, falls ein gerichteter, topologischer x-y-Pfad π' mit Bild $P \subseteq |G|$ existiert, der injektiv ist.

Bemerkung 3.3.3. Dann ist $\pi' : [0,1] \to P$ aus Definition 3.3.2 (2.) als stetige, bijektive Abbildung von einem Kompaktum in einen Hausdorffraum ein Homöomorphismus.

Wir nennen eine Orientierung von $|G|$ **gut** für $k \in \mathbb{N}$, falls für je zwei Ecken v, w aus V mindestens k kantendisjunkte gerichtete v-w-Bögen existieren. Jetzt stehen alle benötigten Definitionen fest, um die Erweiterung 1.0.2 des Theorems von Nash-Williams auf den topologischen Raum $|G|$ zu beweisen.

4 Ausdünnen gerichteter Pfade

Es sei $G = (V, E, \Omega)$ ein lokal endlicher, zusammenhängender, gerichteter Multigraph ohne Schlingen. Ziel ist es, einen eigenen Beweis für ein Theorem anzugeben, dass 2018 von Pascal Gollin und Karl Heuer gezeigt wurde [Q11, Korollar 3.3.]: Jeder gerichtete Pfad in $|G|$ lässt sich zu einem gerichteten Bogen ausdünnen. Dafür erweitern wir in dem nun folgenden Unterkapitel 4.1 ein Lemma aus der Topologie über stetige Abbildungen (topologische Pfade) auf gerichtete, topologische Pfade und beweisen zwei weitere Hilfslemmata in 4.2, die wir in 4.3 zu einem vollständigen Beweis zusammenfügen.

4.1 Umparametrisierung

Einen gerichteten, topologischen Pfad in dem topologischen Raum $|G|$ können wir so umparametrisieren, dass wir an keinem Punkt des Bildes 'warten'.

Definition 4.1.1. Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Wir nennen f **leicht**, wenn in $f^{-1}(y) \subseteq X$ keine Zusammenhangskomponente mehr als einen Punkt enthält für jedes $y \in Y$.

Lemma 4.1.2. *Zu $x, y \in V$ und einem gerichteten x-y-Pfad $\vec{P}$ in dem gerichteten Raum $|G|$ existiert ein gerichteter, topologischer x-y-Pfad $\widetilde{g}$ mit Bild $\vec{P}$, der leicht ist.*

Beweis. Sei $g : [0, 1] \to |G|$ ein gerichteter, topologischer x-y-Pfad mit Bild $\vec{P}$. Mit $\mathcal{B}$ bezeichnen wir die Menge aller bezüglich Teilmengen maximalen Intervalle in $[0, 1]$, auf denen g konstant ist. Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf dem kompakten, metrischen Raum $[0, 1]$ durch $a \sim b :\Leftrightarrow \{a, b\} \subseteq B$ für ein $B \in \mathcal{B}$. Der Quotientenraum $[0, 1]/\sim$ ist mit der Finaltopologie bezüglich der kanonischen Projektion $\pi : [0, 1] \to [0, 1]/\sim$ versehen und π ist stetig. Sei ϕ eine Abbildung von $[0, 1]/\sim \to |G|$, die durch $\phi(t) := g(\pi^{-1}(t))$ definiert ist. Sie ist wohldefiniert, da $\pi^{-1}(t) = t$ ist oder ein $B \in \mathcal{B}$ existiert mit $\pi^{-1}(t) = B$ und g auf B konstant ist. Es gilt $\phi \circ \pi = g$, weshalb ϕ stetig ist wegen der Eigenschaft der Finaltopologie von $[0, 1]/\sim$. Außerdem ist ϕ leicht per Konstruktion.
Des Weiteren gilt, dass die Projektion π abgeschlossen ist. Aus [Q10, Theorem 3.7 und 3.10] folgt, dass $[0, 1]/\sim$ homöomorph zu dem Einheitsintervall ist. Sei $\psi : [0, 1] \to [0, 1]/\sim$ ein Homöomorphismus. Dann ist $\widetilde{g} := \psi \circ \phi$ eine stetige, leichte Abbildung mit Bild $\vec{P}$. Da g und $\widetilde{g}$ den selben Durchlaufsinn haben, ist $\widetilde{g}$ ein leichter, gerichteter, topologischer x-y-Pfad. □

4.2 Ausdünnen des Bildes

Wir beweisen in diesem Unterkapitel zwei Lemmata, die uns helfen das Bild eines gerichteten, topologischen Pfades in $|G|$ auszudünnen, indem wir an geeigneten Punkten in $|G|$ 'warten' und dadurch 'Kreise entfernen'. Dazu müssen wir zunächst geeignete Intervalle in $[0, 1]$ finden, auf denen wir den gerichteten Pfad 'konstant machen' können.

Definition 4.2.1. Sei $\mathcal{A}$ eine abzählbare Familie von abgeschlossenen Intervallen $A_i := [a_i, a_i']$ in $[0, 1]$ mit $a_i \neq a_i'$ und g eine stetige Funktion aus dem Einheitsintervall in einen kompakten Hausdorffraum.

1. Wir nennen $\mathcal{A}$ **quasigeschachtelt**, falls für alle $A_i, A_j \in \mathcal{A}$ gilt, dass
   i) $\mathring{A}_i \cap \mathring{A}_j = \emptyset$ oder
   ii) $A_i \subseteq A_j$ oder
   iii) $A_j \subseteq A_i$.
2. $[a_j, a'_j] \in \mathcal{A}$ heißt g-**kompatibel**, falls $g(a_j) = g(a'_j)$. Falls alle $A_i \in \mathcal{A}$ dies erfüllen, nennen wir $\mathcal{A}$ selbst g-kompatibel.

Lemma 4.2.2. *Seien g und $\mathcal{A}$ wie in Definition 4.2.1 und sei $\mathcal{A}$ quasigeschachtelt und g-kompatibel. Dann existiert eine abzählbare Familie $\mathcal{B}$ von abgeschlossenen Intervallen in $[0,1]$ mit paarweise disjunktem Inneren (I), die g-kompatibel ist (II), sodass für alle $A_n \in \mathcal{A}$ gilt, dass ein $B_n \in \mathcal{B}$ existiert mit $A_n \subseteq B_n$ (III).*

Beweis. Seien eine stetige Funktion g aus dem Einheitsintervall und eine quasigeschachtelte, g-kompatible Familie $\mathcal{A}$ gegeben. Da $\mathcal{A}$ abzählbar ist, finden wir eine Aufzählung $A_0, A_1, \ldots$ der Elemente von $\mathcal{A}$. Für ein beliebiges $t \in [0,1]$ definieren wir $A^t := \bigcup\{A_n \in \mathcal{A} : t \in \mathring{A}_n\} \subseteq [0,1]$. Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $A_n, A_m \subseteq A^t$ gilt $\mathring{A}_n \cap \mathring{A}_m \neq \emptyset$, weshalb $A_n \subseteq A_m$ oder $A_m \subseteq A_n$. Ausgehend von dem kleinsten n für das $A_n \subseteq A^t$ finden wir eine bezüglich Teilmengen aufsteigende Folge $\left(A^t_{n_i}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ in A^t, wobei $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine monoton steigende Teilfolge von $\mathbb{N}$ ist, sodass $A_i \subseteq A^t_{n_i}$ für alle $i \geq 0$ mit $A_i \subseteq A^t$ gilt. A^t ist in dem Supremum $\bigcup\{A^t_{n_i} : i \in \mathbb{N}\}$ dieser Folge enthalten. Andersherum gilt $\bigcup\{A^t_{n_i} : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \bigcup\{A_n \in \mathcal{A} : t \in \mathring{A}_n\} = A^t$, da für jedes $i \in \mathbb{N}$ ein j existiert, sodass $A^t_{n_i} = A_j \subseteq A^t$. Da $[0,1]$ kompakt ist, liegt der Limes $\bigcup\{A^t_{n_i} : i \in \mathbb{N}\}$ der aufsteigenden Intervallschachtelung in $[0,1]$. Wir setzen $B^t := \overline{A^t}$ und zeigen, dass die Menge $\mathcal{B} := \{B^t : t \in [0,1]\} \subseteq [0,1]$ die gewünschten Eigenschaften (I)-(III) erfüllt.
(I) Es gilt erstens (i): Seien $B^s, B^{s'} \in \mathcal{B}$ mit $B^s \subseteq B^{s'}$. Aus der Definition folgt direkt, dass $A^s = A^{s'}$ und somit auch $B^s = B^{s'}$. Und zweitens (ii): Sei $t'' \in \mathring{B}^t \cap \mathring{B}^{t'}$ für $B^t, B^{t'} \in \mathcal{B}$. Dann existieren $A_{n_i} \subseteq A^t, A_{n_j} \subseteq A^{t'}$ und $t'' \in \mathring{A}_{n_i} \cap \mathring{A}_{n_j}$. Daraus folgt, dass $A^t \cup A^{t'} \subseteq A^{t''}$ und nach (i) gilt $B^t = B^{t''} = B^{t'}$.
(II) Sei $t \in [0,1]$ beliebig. Wir bezeichnen die monoton fallende Folge der Minima der Intervalle $\left(A^t_{n_i}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ und die monoton steigende Folge der Maxima mit $\left(a'_{n_i}\right)_{i\in\mathbb{N}}$. Da g stetig ist und $g(a_{n_i}) = g\left(a'_{n_i}\right)$ gilt für alle $i \in \mathbb{N}$, ist $g\left(\lim_{i\to\infty} a_{n_i}\right) = \lim_{i\to\infty} g(a_{n_i}) = \lim_{i\to\infty} g\left(a'_{n_i}\right) = g\left(\lim_{i\to\infty} a'_{n_i}\right)$, womit die g-Kompatibilität von $\mathcal{B}$ gezeigt ist.
(III) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Es gilt $A_n \subseteq \overline{A^t} = B^t$ für alle $t \in A_n$.

□

Lemma 4.2.3. *Sei $g : [0,1] \to |G|$ ein gerichteter, topologischer x-y-Pfad, $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \ldots\}$ quasigeschachtelt und g-kompatibel und $\mathcal{B} = \{B_0, B_1, \ldots\}$ eine Familie von abgeschlossenen Intervallen in $[0,1]$, die (I), (II) und (III) aus Lemma 4.2.2 erfüllt, wobei $B_n = [b_n, b'_n]$. Es gelte $g(b_n) \in V \cup \Omega$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann wird durch*

$$\widetilde{g}(t) := \begin{cases} g(b_n) & t \in \mathring{B}_n \\ g(t) & t \notin \bigcup\{\mathring{B}_n : n \in \mathbb{N}\} \end{cases}$$

ein gerichteter, topologischer x-y-Pfad in $|G|$ definiert.

Beweis. Die Wohldefiniertheit von $\widetilde{g}$ folgt direkt aus der Wohldefiniertheit von g. Falls $\widetilde{g}(t) \neq g(t)$, so ist $t \in \mathring{B}_n$ für ein $B_n \in \mathcal{B}$. Also gilt $\widetilde{g}(0) = g(0) = x$ und $\widetilde{g}(1) = g(1) = y$.
Wir wollen zeigen, dass $\widetilde{g}$ stetig ist. Dazu betrachten wir ein beliebiges $t \in [0,1]$. Falls $t \in \mathring{B}_n$ für ein n oder $t \notin \overline{\bigcup \mathcal{B}}$, existiert eine Umgebung U' von t, sodass $U' \subseteq \left([0,1] \setminus \overline{\bigcup \mathcal{B}}\right)$ oder $U' \subseteq \mathring{B}_n$. Es gilt entweder $\widetilde{g}|_{U'} = g|_{U'}$ oder $\widetilde{g}$ ist konstant auf U' und deshalb stetig in t.
Ansonsten betrachten wir ein beliebiges Intervall $[a,b] \subseteq [0,1]$ mit $t \in (a,b)$. Wir behaupten, dass dann

$$(\star) \qquad \widetilde{g}([a,b]) \subseteq g([a,b])$$

gilt, woraus die Stetigkeit sofort folgt. Angenommen $(\star)$ gilt nicht. Dann existiert ein $t' \in [a,b]$ mit $\widetilde{g}(t') \notin g([a,b])$. Es gilt $\widetilde{g}(t') \neq g(t')$ und deshalb $t' \in \mathring{B}_l$ für ein $B_l = [b_l, b_l'] \in \mathcal{B}$. Da $t \notin \mathring{B}_l$, gilt entweder $b_l \in [a,b]$ oder $b_l' \in [a,b]$ und $\widetilde{g}(t') = g(b_l) = g(b_l') \subseteq g([a,b])$, was ein Widerspruch ist.
Sei $a < b$ aus $[0,1]$ mit $\widetilde{g}(a), \widetilde{g}(b) \in \mathring{\vec{e}}$. Dann ist $\widetilde{g}|_{\vec{e}} = g|_{\vec{e}}$ und der Durchlaufsinn von $\widetilde{g}$ stimmt mit der Orientierung der topologischen Kanten überein. □

4.3 Ausdünnen gerichteter Pfade

Wir benutzen Lemma 4.1.2, 4.2.2 und 4.2.3 nun, um einen gerichteten, topologischen Pfad injektiv zu machen. In einem ersten Schritt werden wir einen gerichteten Pfad konstruieren, der jede Kante höchstens einmal enthält. Für die spätere Anwendung in dem Beweis von Satz 1.0.2 ist dieser Schritt nicht mehr notwendig, wie wir in Bemerkung 5.2.2 sehen werden. Der Allgemeingültigkeit halber ist er an dieser Stelle dennoch mit angegeben. In einem zweiten Schritt werden wir alle Kreise aus dem resultierenden, gerichteten Pfad 'löschen', denn es könnte immer noch passieren, dass Enden mehrfach benutzt werden. Zuletzt werden wir Lemma 4.1.2 anwenden, um mögliche 'Wartezeiten zu eliminieren'.

Lemma 4.3.1. *Seien $x, y \in V$ und $x \neq y$. Dann enthält jeder gerichtete x-y-Pfad in dem gerichteten $|G|$ einen gerichteten x-y-Bogen.*

Beweis. Sei $\pi : [0,1] \to |G|$ ein gerichteter, topologischer x-y-Pfad mit Bild $\vec{P}$. Da $\vec{E}(\vec{P}) \subseteq \vec{E}(G)$ und G lokal endlich ist, ist $\vec{E}(\vec{P}) = \{\vec{e_0}, \vec{e_1}, \ldots\}$ abzählbar.

Schritt 1: Wir betrachten $\pi^{-1}(init(e_n))$ für $n \in \mathbb{N}$. Wir wollen rekursiv eine quasigeschachtelte Familie $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \ldots\}$ von Intervallen in $[0,1]$ konstruieren, die π-kompatibel ist und die $|([0,1] \setminus \bigcup\{A_0 \cup \ldots \cup A_n\}) \cap \pi^{-1}(init(e_n))| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Für $i \geq 0$ betrachten wir das kleinste n für das die Menge $M_n := ([0,1] \setminus \bigcup\{A_0 \cup \ldots \cup A_{i-1}\}) \cap \pi^{-1}(init(e_n))$ mehr als ein Element enthält, wobei $A_{-1} := \emptyset$. Falls kein solches n existiert, setzen wir $\mathcal{A} = \{A_0, \ldots, A_{i-1}\}$. Der endliche Schnitt $M_n \subseteq [0,1]$ ist abgeschlossen, da das Urbild einer abgeschlossenen Menge unter einer stetigen Funktion wieder abgeschlossen ist, und wir finden ein Minimum und ein Maximum in ihr bezüglich der linearen Ordnung von $[0,1] \subset \mathbb{R}$. Wir definieren $\alpha_{min}^{n_i}$ als das Minimum und $\alpha_{max}^{n_i}$ als das Maximum von M_n und setzen $A_i := [\alpha_{min}^{n_i}, \alpha_{max}^{n_i}]$. Es gilt $\pi(\alpha_{min}^{n_i}) = init(e_{n_i}) = \pi(\alpha_{max}^{n_i})$ und $([0,1] \setminus \bigcup\{A_0 \cup \ldots \cup A_i\}) \cap \pi^{-1}(init(e_n)) = \emptyset$. Da $n \geq i$ ist, folgt $|([0,1] \setminus \bigcup\{A_0 \cup \ldots \cup A_i\}) \cap \pi^{-1}(init(e_i))| \leq 1$. Außerdem gilt für alle $j < i$ dann $A_j \subseteq A_i$ oder $\mathring{A}_i \cap \mathring{A}_j = \emptyset$ und $\mathcal{A}$ ist quasigeschachtelt und π-kompatibel. Wie in Lemma 4.2.2 gezeigt finden wir eine abzählbare, π-kompatible Familie $\mathcal{B}$ von abgeschlossenen Intervallen in $[0,1]$, deren Inneres paarweise disjunkt ist und die für jedes $A_i \in \mathcal{A}$ ein B_i mit $A_i \subseteq B_i$ enthält.

Die Endpunkte von jedem $B_i \in \mathcal{B}$ werden wegen der Stetigkeit von π nach $V \cup \Omega$ abgebildet. Lemma 4.2.3 gibt uns einen gerichteten, topologischen x-y-Pfad $=: \widetilde{\pi}$ mit Bild in $\vec{P}$, der konstant ist auf B_n für jedes $n \in \mathbb{N}$.
Wir betrachten $\widetilde{\pi}^{-1}(\mathit{init}(e_n))$. Falls ein $i \in \mathbb{N}$ existiert mit $\pi^{-1}(\mathit{init}(e_n)) \subseteq A_i$, so ist $\widetilde{\pi}^{-1}(\mathit{init}(e_n)) \in \{B_i, \emptyset\}$ für dasjenige $B_i \in \mathcal{B}$ mit $A_i \subseteq B_i$. Ansonsten gilt $|\pi^{-1}(\mathit{init}(e_n))| \leq 1$. In jedem Fall ist $\widetilde{\pi}^{-1}(\mathit{init}(e_n))$ zusammenhängend oder leer. Sei $w \in \vec{e_n}$ beliebig für ein $n \in \mathbb{N}$ und $b \in (\widetilde{\pi})^{-1}(w)$. Wegen der Stetigkeit von $\widetilde{\pi}$ besteht das Urbild von der abgeschlossenen, topologischen Kante $\vec{e_n}$ aus abgeschlossenen Intervallen und b liegt in einem davon $=: [c, d]$. Da $\widetilde{\pi}$ ein gerichteter, topologischer Pfad ist, muss $\widetilde{\pi}(c) = \mathit{init}(e_n)$ gelten und b liegt in derselben Zusammenhangskomponente wie das zusammenhängende Urbild von $\mathit{init}(e_n)$. Deshalb ist das Urbild einer jeden Kante $\vec{e_n} \in \vec{E}(P)$ unter $\widetilde{\pi}$ zusammenhängend oder leer.

Schritt 2: Nun wollen wir einen gerichteten, topologischen x-y-Pfad f mit Bild in $\vec{P}$ konstruieren, sodass $f^{-1}(f(t))$ zusammenhängend ist für alle $t \in [0,1]$, auch wenn $f(t) \notin \vec{E}(P)$. Analog zum ersten Schritt, wollen wir eine quasigeschachtelte Familie $\mathcal{A}' = \{A'_0, A'_1, \ldots\}$ von abgeschlossenen Intervallen in $[0,1]$ konstruieren, sodass die Funktion, die gemäß Lemma 4.2.3 konstant auf diesen Intervallen ist, die gewünschte Eigenschaft erfüllt. Für $i \geq 0$ betrachten wir das kleinste n für das $t_n \neq t'_n \in [0,1]$ existieren mit $\emptyset \neq \left(\widetilde{\pi}^{-1}(\vec{e_n}) \cap [0,1] \setminus \bigcup\{\mathring{A}'_0 \cup \ldots \cup \mathring{A}'_{i-1}\}\right) \subseteq [t_n, t'_n]$ und $\widetilde{\pi}(t_n) = \widetilde{\pi}(t'_n)$. Dann gilt aufgrund der Eigenschaft von $\widetilde{\pi}$ auch $\widetilde{\pi}(t_n) \in \Omega$, da das Urbild von $\widetilde{\pi}(t_n) = \widetilde{\pi}(t'_n)$ unter $\widetilde{\pi}$ nicht zusammenhängend ist. Wir wählen feste t_{n_i}, t'_{n_i}, die dies erfüllen und definieren $A'_i := [t_{n_i}, t'_{n_i}]$. Falls kein solches n existiert, setzen wir $\mathcal{A}' = \{A'_0, \ldots, A'_{i-1}\}$. Die abzählbare Familie $\mathcal{A}' = \{A'_0, A'_1, \ldots\}$ ist quasigeschachtelt und $\widetilde{\pi}$-kompatibel. Analog zu Schritt 1 erhalten wir aus Lemma 4.2.2 eine geeignete Familie von Intervallen $=: \mathcal{B}'$ zu $\mathcal{A}'$ und aus Lemma 4.2.3 erhalten wir einen gerichteten, topologischen x-y-Pfad $=: f$, dessen Bild in $\widetilde{\pi}([0,1])$ enthalten ist und der konstant ist auf allen Intervallen aus $\mathcal{B}'$.
Sei $w \in f([0,1])$. Wir wollen zeigen, dass $f^{-1}(w)$ zusammenhängend ist. Angenommen nicht: Dann existieren $q_1 < q_2$ in verschiedenen Zusammenhangskomponeten von $f^{-1}(w)$. Da $f|_{[q_1,q_2]}$ zusammenhängend ist und $V \cup \Omega$ total unzusammenhängend ist, existiert ein $t \in (q_1, q_2)$ und ein $N \in \mathbb{N}$ mit $f(t) \in \vec{e_N}$. Dann gilt nach Konstruktion von f, dass $f^{-1}(e_N) = \widetilde{\pi}^{-1}(e_N)$, welches nach Schritt 1 zusammenhängend ist. Wiederum wegen der Eigenschaft von $\widetilde{\pi}$ muss $w \in \Omega, t \in ([0,1] \setminus \bigcup \mathcal{B}')$ gelten und $\widetilde{\pi}^{-1}(e_N) \subseteq [q_1, q_2]$. Für $i \in \{1,2\}$ ist entweder $f(q_i) = \widetilde{\pi}(q_i)$ oder $q_i \in B'_i$ für ein $B'_i = [b_i, b'_i] \in \mathcal{B}'$. In letzterem Fall gilt $w = f(q_i) = \widetilde{\pi}(b_i) = \widetilde{\pi}(b'_i)$. Also finden wir $\widetilde{q_1} \leq q_1 < q_2 \leq \widetilde{q_2}$, sodass $\widetilde{\pi}(\widetilde{q_1}) = w = \widetilde{\pi}(\widetilde{q_2})$ und $\widetilde{\pi}^{-1}(\vec{e_N}) \subseteq [\widetilde{q_1}, \widetilde{q_2}]$. Außerdem gilt $t \in \widetilde{\pi}^{-1}(\vec{e_N}) \cap ([0,1] \setminus \bigcup \mathcal{A}')$ und $[\widetilde{q_1}, \widetilde{q_2}]$ erfüllt die Bedingungen, die an A'_N gestellt wurden. Dies ist ein Widerspruch, da $t \notin \mathcal{B}'$.

Schritt 3: Auf den gerichteten x-y-Pfad in $|G|$, der durch f gegeben ist $=: \vec{F}$, wenden wir Lemma 4.1.2 an und bekommen einen leichten, gerichteten, topologischen x-y-Pfad $=: f_\infty$, sodass eine monoton steigende Funktion $m : [0,1] \to [0,1]$ existiert mit $f_\infty \circ m = f$. Wenn das Urbild einer Menge unter f_∞ nicht zusammenhängend ist, so ist auch das Urbild unter $f_\infty \circ m$ nicht zusammenhängend. Also hat f_∞ die Eigenschaft von f geerbt, dass $f_\infty^{-1}(f_\infty(t))$ zusammenhängend ist für jedes $t \in [0,1]$. Da f_∞ zusätzlich leicht ist, besteht $f_\infty^{-1}(f_\infty(t))$ aus einem Punkt. Deshalb ist $f_\infty : [0,1] \to \vec{F}$ injektiv und $\vec{F}$ ein gerichteter x-y-Bogen. $\square$

5 Beweis des Nash-Williams-Theorems für topologische Graphen

Von nun an sei $k \in \mathbb{N}$ fest und der Multigraph $G = (V, E, \Omega)$ ohne Schlingen weiterhin lokal endlich und zusammenhängend. Dann ist G abzählbar und es sei eine feste Aufzählung $v_0, v_1, v_2, \ldots$ von V gewählt. Wir benötigen noch einige Hilfsaussagen, die wir in Abschnitt 5.5 zu einem vollständigen Beweis zusammenfügen.

5.1 Zulässige Orientierung

Definition 5.1.1. Sei $n \in \mathbb{N}$.

1. S_n bezeichnet die Teilmenge $\{v_0, \ldots, v_n\}$ von V
2. G_n ist der Multigraph, der entsteht, wenn wir jede Komponente von $G - S_n$ zu einer Ecke kontrahieren und alle Schlingen löschen. Es gilt $E(G_n) \subseteq E$. Die Ecken aus G_n, welche aus einer Komponente von $G - S_n$ durch Kontraktion entstanden sind, nennen wir **Kontraktionsecken**.

Der Multigraph G_n entsteht aus G_{n+1} durch Kontraktion und Löschen von dadurch entstandenen Schlingen. Andersherum kann man sagen G_{n+1} entstehe aus G_n, indem man eine Ecke durch einen zusammenhängenden Multigraphen ohne Schlingen ersetzt: Die Ecke $v_{n+1} \in V$ liegt in einer Komponente C von $G - S_n$, welche in G_n von einer Ecke c repräsentiert wird. Falls $C \neq v_{n+1}$ gilt, so ist c eine Kontraktionsecke. Der Graph G_{n+1} entsteht aus G_n, indem die Ecke c durch endlich viele, **neue Ecken** ersetzt wird, die v_{n+1} und den Komponenten von $C - v_{n+1}$ entsprechen. Die mit c inzidenten Kanten aus $E(G_n)$ verbinden in G_{n+1} eine von diesen neuen Ecken mit S_n. Es gilt $E(G_n) \subseteq E(G_{n+1})$. Alle Kanten aus $E(G_{n+1}) \setminus E(G_n)$ haben nur neue Ecken als Endecken.

Lemma 5.1.2. *Es sei G ein Multigraph ohne Schlingen, der $2k$-kantenzusammenhängend ist. Dann sind die Graphen G_n auch $2k$-kantenzusammenhängend.*

Beweis. Sei G ein Graph wie in der Behauptung. Angenommen es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ für das G_n nicht $2k$-kantenzusammenhängend ist. Dann finden wir eine Partition der Eckenmenge von G_n in V_n^1 und V_n^2, sodass $|E(V_n^1, V_n^2)| < 2k$ ist. Ersetzen wir jede Kontraktionsecke in V_n^i für $i = 1, 2$ durch die Ecken in der von ihr repräsentierten Komponente von $G - S_n$ erhalten wir eine Partition von V mit denselben Partitionskanten. Dies ist ein Widerspruch zu dem $2k$-Kantenzusammenhang von G.

□

Definition 5.1.3. Sei D eine Orientierung von G beziehungsweise $|G|$ mit dazugehörigen Abbildungen $init : V \to E$ und $ter : V \to E$

1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir nennen eine Orientierung D_n von G_n mit Abbildungen $init_{G_n}, ter_{G_n} : V(G_n) \to E(G_n)$ **von D induziert**, wenn die Richtung jeder Kante in D_n mit der Richtung in D übereinstimmt im folgenden Sinne: Sei $e \in E(G_n)$. Setze $C_1 \subseteq G$ als $\{init_{G_n}(e)\}$, falls diese keine Kontraktionsecke ist und als die Komponente von $G - S_n$, die der Kontraktionsecke $init_{G_n}(e)$ entspricht, falls doch und definiere C_2 analog als $\{ter_{G_n}(e)\}$, beziehungsweise die entsprechende Komponente von $G - S_n$. Dann stimmt die Richtung von e in D_n mit der in D überein, wenn gilt $init(e) \subseteq C_1$ und $ter(e) \subseteq C_2$. Analog kann eine Orientierung von G_m für $m \geq n$ eine Orientierung auf G_n induzieren.

2. Wir nennen D **zulässig** für gegebenes k genau dann, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ die von D auf G_n induzierte Orientierung gut ist.

Für den folgenden Beweis benötigen wir ein, in der Graphentheorie viel genutztes, Hilfsmittel [Q1, Satz 7.1.3.], welches wir auch in Abschnitt 5.2 noch einmal verwenden:

Satz 5.1.4. *[Königs Unendlichkeitslemma] Es sei $V_0, V_1, \dots$ eine unendliche Folge disjunkter, nicht leerer, endlicher Mengen, und G ein Graph auf ihrer Vereinigung. Für jedes $n \geq 1$ habe jede Ecke $v \in V_n$ einen Nachbarn $f(v)$ in V_{n-1}. Dann enthält G einen unendlichen Weg $v_0 v_1 \dots$ mit $v_n \in V_n$ für alle n.*

Lemma 5.1.5. *Wenn es für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine gute Orientierung von G_n gibt, dann existiert eine für G zulässige Orientierung.*

Beweis. Sei G so, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine gute Orientierung von G_n existiert. Um eine Orientierung von G zu finden, möchten wir *Königs Unendlichkeitslemma* anwenden. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen O_n als die Menge aller guten Orientierungen von G_n und ein Element $o_n \in O_n$ sei mit allen Elementen aus O_{n-1} verbunden, die von o_n induziert sind. Da G lokal endlich ist, ist $E(G_n)$ endlich und somit $|O_n| \leq 2^{|E(G_n)|}$. Nach der Voraussetzung bilden $O_1, O_2, \dots$ somit eine unendliche Folge disjunkter, nicht leerer und endlicher Mengen.
Es bleibt zu zeigen, dass jedes $o_n \in O_n$ einen Nachbarn in O_{n-1} hat, dass also die von einer guten Orientierung von G_n induzierte Orientierung von G_{n-1} gut ist. Sei $o_n \in O_n$ beliebig. Wir betrachten die von o_n induzierte Orientierung $\widetilde{o_n}$ auf G_{n-1}. Für beliebige $v, w \in V(G_{n-1})$ wollen wir k kantendisjunkte, gerichtete v-w-Wege in $\widetilde{o_n}$ finden. Da der Multigraph G_{n-1} durch Kantenkontraktion und Löschen von Schlingen aus G_n entsteht, wird ein gerichteter Weg in o_n zu einem gerichteten Pfad in $\widetilde{o_n}$.
Seien $v, w \in V(G_{n-1})$. Falls $v = w$ ist, sind wir trivialerweise fertig. Seien v und w also verschieden. Wir wollen geeignete Ecken v', w' in $V(G_n)$ finden, so dass wir v mit v' und w mit w' identifizieren können und die k kantendisjunkten gerichteten v'-w'-Wege aus o_n bei dem Übergang von G_n zu G_{n-1} zu k kantendisjunkten, gerichteten v-w-Pfaden in $\widetilde{o_n}$ werden. Es gibt drei Möglichkeiten für eine Ecke $u \in V(G_{n-1})$: entweder u ist Element von S_{n-1}, dann ist sie auch Element von S_n und wir können sie mit sich selbst identifizieren, oder sie ist aus einer kontrahierten Komponente C von $G - S_{n-1}$ entstanden. Dann ist C entweder auch eine Komponente von $G - S_n$, in diesem Fall können wir u ebenfalls mit sich selbst identifizieren, oder sie zerfällt in $G - S_n$ und wir wählen die Kontraktion einer beliebigen Komponente C' von $G - S_n$ mit $C' \subset C$, um sie mit u zu identifizieren. Falls v und w einem der ersten beiden Fälle entsprechen wählen wir $v' := v$ und $w' := w$. Aus den kantendisjunkten v'-w'-Wegen in G_n erhalten wir kantendisjunkte v-w-Pfade in G_{n-1}. Ansonsten entspricht eine der beiden Ecken dem dritten Fall. Beide können es nicht, da von G_{n-1} nach G_n nur eine Komponente von $G - S_{n-1}$ verändert wird und v und w verschieden sind. o.B.d.A. sei v diese Ecke, C die v entsprechende Komponente von $G - S_{n-1}$ und C' eine beliebige Komponente von $G - S_n$ mit $C' \subset C$. Als v' wählen wir dann die Kontraktion von C' zu einer Ecke in G_n. Auch dann bekommen wir aus einem v'-w'-Weg in G_n einen v-w-Pfad in G_{n-1}, da wegen $C' \subset C$ in G_n jeder C'-w'-Weg auch ein C-w'-Weg ist. Ein gerichteter v'-w'-Weg in o_n wird zu einem gerichteten v-w-Pfad in $\widetilde{o_n}$. Wir haben also k kantendisjunkte, gerichtete v-w-Pfade in der von o_n auf G_{n-1} induzierten Orientierung gefunden, welche wir zu gerichteten Wegen ausdünnen können.
Königs Unendlichkeitslemma 5.1.4 gibt uns einen unendlichen Weg, der für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $o_n \in O_n$ enthält. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $m \geq n$ ist o_n die von o_m induzierte Orientierung. Jede Kante $e \in E(G)$ ist in $E(G(S_n))$ enthalten für ein groß genüges n und für alle $m \geq n$ stimmt

die Richtung von e in o_n und o_m überein. Seien $init_{o_n}$ und ter_{o_n} die zu o_n gehörigen Abbildungen. Wir setzen $init\,(e) := init_{o_n}\,(e)$ und $ter\,(e) := ter_{o_n}\,(e)$. Dies gibt uns eine zulässige Orientierung von G.

$\square$

5.2 Geeignete, gerichtete Pfade in den endlichen Graphen

Es bleibt noch zu zeigen, dass eine zulässige Orientierung von G eine gute Orientierung von $|G|$ ist. Die Grundidee ist, gerichtete v-w-Pfade in $|G|$ aus den 'Limites' gerichteter v-w-Pfade in den G_n zu konstruieren. Das folgende Lemma hilft uns, zunächst geeignete Folgen gerichteter Pfade in den G_n zu finden.

Lemma 5.2.1. *Sei D eine zulässige Orientierung auf G und die zugehörigen G_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit der von D induzierten Orientierung versehen. Dann gibt es für je zwei beliebige Ecken v, w aus dem Graphen ein $\widetilde{n} \in \mathbb{N}$ und k Folgen gerichteter v-w-Pfade $(P_n^1)_{n\in\mathbb{N}_{\geq\widetilde{n}}}, (P_n^2)_{n\in\mathbb{N}_{\geq\widetilde{n}}}, \dots, \left(P_n^k\right)_{n\in\mathbb{N}_{\geq\widetilde{n}}}$, sodass $\{P_n^1, P_n^2, \dots, P_n^k\}$ für alle $n \geq \widetilde{n}$ aus k kantendisjunkten, gerichteten v-w-Pfaden in G_n besteht und für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ und jedes $m \geq n$ gilt $\vec{E}\,(P_m^i) \cap \vec{E}\,(G_n) = \vec{E}\,(P_n^i)$.*

Beweis. Seien v, w beliebige Ecken aus G. Wir möchten wieder *Königs Unendlichkeitslemma* benutzen, um die gesuchten k Folgen von gerichteten Pfaden zu finden. Wir wählen $\widetilde{n} \in \mathbb{N}$, sodass $v, w \in S_{\widetilde{n}}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq\widetilde{n}}$ definieren wir Q_n als die Menge aller geordneten k-Tupel von kantendisjunkten, gerichteten v-w-Pfaden in G_n, die jede Kante höchstens einmal benutzen. Diese ist nicht leer, da wir sogar k kantendisjunkte, gerichtete v-w-Wege in G_n finden, und endlich, da $\vec{E}\,(G_n)$ endlich ist. Ein geordnetes k-Tupel $\left(P_{n+1}^i\right)^{i\in\{1,\dots,k\}} \in Q_{n+1}$ sei mit jedem Tupel $(P_n^i)^{i\in\{1,\dots,k\}}$ aus Q_n verbunden, für das $\vec{E}\left(P_{n+1}^i\right) \cap \vec{E}\,(G_n) = \vec{E}\,(P_n^i)$ für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ gilt.
Ein gerichteter Pfad $P \in \left(P_{n+1}^i\right)^{i\in\{1,\dots,k\}}$ induziert einen gerichteten v-w-Pfad $=: P\mid_{G_n}$ in G_n im folgenden Sinn: Sei $P = x_0\vec{e_1}x_1 \dots \vec{e_l}x_l$. Wir definieren $P|_{G_n}$ als denjenigen Pfad, der aus P in G_{n+1} nach Kontrahieren und Löschen von Kanten beim Übergang zu G_n entsteht. Sei $i_1, i_2, \dots, i_m$ eine Teilfolge von $1, \dots, l$, so dass $\{\vec{e_{i_1}}, \dots, \vec{e_{i_m}}\} = \{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_l}\} \cap E\,(\vec{G}_n)$. Dann ist $P\mid_{G_n} = init\,(e_{i_1})\,\vec{e_{i_1}}\,init\,(e_{i_2}) \dots init\,(e_{i_m})\,\vec{e_{i_m}}\,ter\,(e_{i_m})$. Es gilt also $\vec{E}\,(P|_{G_n}) = \vec{E}\,(P) \cap \vec{E}\,(G_n)$. Da P jede Kante höchstens einmal benutzt, erfüllt auch $P|_{G_n}$ dies.
Somit induziert jede Familie $\left(P_{n+1}^i\right)^{i\in\{1,\dots,k\}} \in Q_{n+1}$ eine Familie kantendisjunkter, gerichteter v-w-Pfade $\left(P_{n+1}^i|_{G_n}\right)^{i\in\{1,\dots,k\}}$ in Q_n und Königs Unendlichkeitslemma 5.1.4 gibt uns einen unendlichen Weg von Familien aus den Q_n, der uns wiederum die gesuchten k Folgen von kantendisjunkten, gerichteten v-w-Pfaden gibt.

$\square$

Korollar 5.2.2. *Unter den Bedingungen von Lemma 5.2.1 finden wir sogar k Folgen gerichteter v-w-Pfade $(P_n^1)_{n\in\mathbb{N}_{\geq\widetilde{n}}}, (P_n^2)_{n\in\mathbb{N}_{\geq\widetilde{n}}}, \dots, \left(P_n^k\right)_{n\in\mathbb{N}_{\geq\widetilde{n}}}$, die zusätzlich zu denen im Lemma geforderten Bedingungen noch erfüllen, dass jeder Pfad $P_m^j \in (P_n^j)_{n\in\mathbb{N}_{\geq\widetilde{n}}}$ für jedes $j \in \{1, \dots, k\}$ jede Kante höchstens einmal enthält und, dass die Kanten aus P_m^j in P_{m+1}^j und P_m^j in der selben Reihenfolge durchlaufen werden.*

Beweis. Dies folgt direkt aus der Definition der Q_n und der Konstruktion von $P_{n+1}|_{G_n}$ im Beweis von Lemma 5.2.1. $\square$

5.3 Konstruktion gerichteter, topologischer Pfade

Wir wollen zunächst eine Definition angeben, die es uns erlaubt mehrere gerichtete, topologische Pfade in dem gerichteten Raum $|G|$ durch das 'Hintereinander Durchlaufen' der Bilder zu einem zusammenzufügen.

Definition 5.3.1. Seien f und g zwei gerichtete, topologische Pfade mit Bildern $f([0,1]) =: \vec{P_1}$ und $g([0,1]) =: \vec{P_2}$, wobei $f(1) = g(0)$. Dann ist die **Abbildungsaddition** $f + g$ auf $[0,1]$ definiert durch

$$(f+g)(t) := \begin{cases} f\left(\frac{t}{a}\right) & t \in [0,a], \\ g\left(\frac{t}{1-a} - \frac{a}{1-a}\right) & t \in [a,1] \end{cases}$$

für ein beliebiges $a \in (0,1)$.

Bemerkung 5.3.2. Die Abbildung $f+g$ ist ein gerichteter, topologischer $f(0)$-$g(1)$-Pfad, da $f(1) = g(0)$ gilt und der Durchlaufsinn von $f+g$ auf $\vec{E}\left(\vec{P_1}\right)$ mit f und auf $\vec{E}\left(\vec{P_2}\right)$ mit g übereinstimmt. Dies lässt sich rekursiv auf endliche Summen von gerichteten, topologischen Pfaden $f_1 + f_2 + \ldots + f_n$ mit $f_i(1) = f_{i+1}(0)$ für alle $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ fortsetzen. Für die spätere Anwendung ist es wichtig zu bemerken, dass wir auch dann den Urbildbereich 'beliebig skalieren' können, sodass wir beliebige $0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < 1$ wählen können mit $(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)|_{[t_{i-1},t_i]} = f_i|_{[0,1]}$ für alle $i \in \{2, \ldots, n-1\}$.

Wir wollen nun die gerichteten, topologischen v-w-Pfade konstruieren. Es sei $|G|$ mit zulässiger Orientierung D und Abbildungen *init* und *ter* gegeben. Die von D induzierte Orientierung D_n auf G_n ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ durch die Abbildungen $init_{G_n}$ und ter_{G_n} festgelegt. Weiter sei $\{P^i_{\tilde{n}}\}^{i \in \{1,\ldots,k\}}$ wie in Lemma 5.2.1, $l \in \mathbb{N}$ und $P^j_{\tilde{n}} = u_0 \vec{e_1} u_1 \ldots \vec{e_l} u_l \in \{P^i_{\tilde{n}}\}^{i \in \{1,\ldots,k\}}$, wobei $u_0 = v$ und $u_l = w$ ist. Wir wollen $P^j_{\tilde{n}}$ als Bild eines gerichteten topologischen Weges in $G_{\tilde{n}}$ betrachten. Für jede Kante $\vec{e_i}$ in $P^j_{\tilde{n}}$ ist φ^{e_i} der zugehörige Homöomorphismus von dem Einheitsintervall zu der gerichteten, topologischen Kante $\vec{e_i}$. Für jede Ecke u_i in $P^j_{\tilde{n}}$ sei f^{u_i} die konstante Funktion aus dem Einheitsintervall nach $G_{\tilde{n}}$, die auf u_i abbildet. Da φ^{e_i} und f^{u_i} gerichtete, topologische Pfade mit $f^{u_{i-1}}(1) = \varphi^{e_i}(0)$ und $\varphi^{e_i}(1) = f^{u_i}(0)$ sind, können wir einen gerichteten, topologischen v-w-Pfad $f^j_{\tilde{n}} := f^{u_0} + \varphi^{e_1} + f^{u_1} + \ldots + \varphi^{e_l} + f^{u_l}$ definieren.
Für eine Folge gerichteter v-w-Pfade $(P^j_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq \tilde{n}}}$, die die Bedingungen von Korollar 5.2.2 erfüllt, definieren wir nun rekursiv eine Folge gerichteter, topologischer v-w-Pfade $(f^j_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq \tilde{n}}}$ mit Bildern $(P^j_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq \tilde{n}}}$. Diese sollen der folgenden Eigenschaft genügen:

> $(\star)$ Ein gerichteter, topologischer v-w-Pfad f in G erfüllt $(\star)$, genau dann, wenn gerichtete topologische Pfade $f^1, \ldots, f^h$ existieren, sodass $f = f^1 + \ldots + f^h$, wobei für jedes $i \in \{1, \ldots, h\}$ gilt, dass f^i entweder eine gerichtete topologische Kante aus $\vec{E}$ als homöomorphes Bild oder eine Ecke aus V als konstantes Bild hat und für jede Ecke im Bild von f ein f^i existiert, welches auf diese abbildet.

$f^j_{\tilde{n}} : [0,1] \to P^j_{\tilde{n}}$ erfüllt $(\star)$ per Konstruktion. Sei also $n \in \mathbb{N}_{\geq \tilde{n}}$ und ein gerichteter, topologischer v-w-Pfad f^j_n mit Bild P^j_n, der $(\star)$ erfüllt, gegeben. Wir wollen $f^j_{n+1} : [0,1] \to P^j_{n+1}$ definieren: Sei $l \in \mathbb{N}$, $P^j_n = u_0 \vec{e_1} u_1 \ldots \vec{e_l} u_l$ und $f^j_n = f^{u_0} + \varphi^{e_1} + f^{u_1} + \ldots + \varphi^{e_l} + f^{u_l}$, wobei $\vec{e_i}$ das Bild von φ^{e_i} ist.

Fall 1: $|\vec{E}\left(P^j_{n+1}\right)| = |\vec{E}\left(P^j_n\right)|$

Da $\vec{E}\left(P^j_{n+1}\right) \cap \vec{E}(G_n) = \vec{E}\left(P^j_n\right)$ und nach Korollar 5.2.2 die Kanten in P^j_{n+1} in der selben Reihenfolge durchlaufen werden wie in P^j_n, können wir für die Konstruktion von f^j_{n+1} gemäß $(\star)$ die gerichteten, topologischen Pfade φ^{e_i} für jede Kante $\vec{e_i} \in \vec{E}\left(P_{n+1}^j\right)$ benutzen. Für $i \in \{1,\dots,l\}$ sei $f^{u_i} : V(G_n) \to V(G_{n+1})$ die konstante Funktion, die auf $ter_{G_{n+1}}(e_i)$ abbildet. Die Funktion f^{u_0} von $V(G_n)$ nach $V(G_{n+1})$ sei konstant v. Definieren wir die konstante Abbildung $f_{n+1}^{u_i}(t) := f^{u_i}(f_n^{u_i}(t))$, können wir einen gerichteten, topologischen v-w-Pfad f_{n+1}^j gemäß Bemerkung 5.3.2 mit Bild $f_{n+1}^j([0,1]) = P_{n+1}^j$ durch $f_{n+1}^j := f_{n+1}^{u_0} + \varphi^{e_1} + f_{n+1}^{u_1} + \dots + \varphi^{e_l} + f_{n+1}^{u_l}$ definieren. Dieser erfüllt die Eigenschaft $(\star)$ und wir wählen die Urbildbereiche der einzelnen Summanden so, dass zusätzlich gilt:

$$(\star\star) \qquad \left(f_{n+1}^j\right)^{-1}\left(\vec{\mathring{e}_i}\right) = \left(f_n^j\right)^{-1}\left(\vec{\mathring{e}_i}\right) \text{ für alle } \vec{\mathring{e}_i} \in \vec{E}(G_n).$$

Fall 2: $|\vec{E}\left(P_{n+1}^j\right)| > |\vec{E}\left(P_n^j\right)|$

Da $\vec{E}\left(P_n^j\right)$ und $\vec{E}\left(P_{n+1}^j\right)$ dieselben Kanten aus $\vec{E}(G_n)$ enthalten, existiert eine Kontraktionsecke $c \in V\left(P_n^j\right)$, sodass die von ihr repräsentierte Komponente C in $G - S_n$ die Ecke v_{n+1} enthält. Die Kanten aus $\vec{E}(G_{n+1})$, deren beide Endecken innerhalb von C liegen, sind genau die Kanten aus $\vec{E}(G_{n+1}) \setminus \vec{E}(G_n)$. Sei $P_{n+1}^j = x_0\vec{e_1'}x_1 \dots \vec{e_m'}x_m$, wobei $m > l, r \in \mathbb{N}$ und $x_{i_1}, \dots x_{i_r}$ die Teilfolge der $(x_i)_{i\in\{0,\dots,m\}}$, bestehend aus denjenigen neuen Ecken $x_{i_s} \in V(G_{n+1})$, die in P_{n+1}^j direkt vor oder nach einer Kante aus $\vec{E}(G_n)$ stehen. Zusätzlich setzen wir $x_{i_0} := v \in V(G_{n+1})$ und $x_{i_{r+1}} := w \in V(G_{n+1})$.

Wir suchen einen gerichteten, topologischen v-w-Pfad f_{n+1}^j mit Bild P_{n+1}^j, der in den 'Wartezeiten' von f_n^j an den Ecken x_{i_s} die Kanten aus $\vec{E}\left(P_{n+1}^j\right) \setminus \vec{E}\left(P_n^j\right)$ in der gewünschten Reihenfolge durchläuft. Sei $s \in \{0,\dots,r\}$. Wir betrachten den gerichteten x_{i_s}-$x_{i_{s+1}}$-Pfad $x_{i_s}P_{n+1}^j x_{i_{s+1}}$. Die 'erste' Kante nennen wir $\vec{e_s^1}$ und die 'letzte' nennen wir $\vec{e_s^2}$, sodass $init_{G_{n+1}}(e_s^1) = x_{i_s}$ und $ter_{G_{n+1}}(e_s^2) = x_{i_{s+1}}$. Falls $e_s^1 \in \vec{E}(G_n)$, so gilt dies nach Wahl der x_{i_s} für alle Kanten aus $x_{i_s}P_{n+1}^j x_{i_{s+1}}$ und wir definieren einen gerichteten, topologischen x_{i_s}-$x_{i_{s+1}}$-Pfad f_{n+1}^s analog zu Fall 1 als $\varphi^{e_s^1} + f^{x_{i_s+1}} + \dots + \varphi^{e_s^2}$, wobei wir die konstanten Funktionen auf den Endecken x_{i_s} und $x_{i_{s+1}}$ weglassen. Ansonsten ist $e_s^1 \in \vec{E}(G_{n+1}) \setminus \vec{E}(G_n)$ und damit gilt $\vec{E}\left(x_{i_s}P_{n+1}^j x_{i_{s+1}}\right) \subseteq \vec{E}(G_{n+1}) \setminus \vec{E}(G_n)$. Sei $l' \in \mathbb{N}$ und $x_{i_s}P_{n+1}^j x_{i_{s+1}} = x_{i_s}\vec{e'_{i_s+1}}x_{i_s+1} \dots \vec{e'_{i_s+l'}}x_{i_s+l'}$, wobei $i_s + l' = i_{s+1}$. Wir definieren f_{n+1}^s auf dieselbe Weise, wie wir auch $f_{\tilde{n}}^j$ definiert haben. Für jedes $i' \in \{0,\dots l'\}$ sei $f_{n+1}^{x_{i_s+i'}} : [0,1] \to V(G_{n+1})$ die konstante Funktion, die auf $x_{i_s+i'}$ abbildet. Dann ist durch $f_{n+1}^s := f^{x_{i_s}} + \varphi^{e'_{i_s+1}} + f^{x_{i_s+1}} + \dots + \varphi^{e'_{i_s+l'}} + f^{x_{i_s+l'}}$ ein gerichteter, topologischer x_{i_s}-$x_{i_{s+1}}$-Pfad definiert.

Es seien f_{n+1}^v mit Bild v und f_{n+1}^w mit Bild w konstante, topologische Pfade in G_{n+1}. Dann ist $f_{n+1}^j := f_{n+1}^v + f_{n+1}^0 + f_{n+1}^1 + \dots + f_{n+1}^r + f_{n+1}^w$ ein gerichteter topologischer v-w-Pfad in G_{n+1} mit Bild P_{n+1}^j, der $(\star)$ erfüllt. Wir wählen f_{n+1}^j so, dass auch $(\star\star)$ erfüllt ist.

5.4 Limesbildung

Der Raum $|G|$ sei mit der zulässigen Orientierung D versehen. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei der Multigraph G_n ohne Schlingen weiterhin mit der von der zulässigen Orientierung D von $|G|$ induzierten, guten Orientierung D_n versehen. Aus denen in 5.3 konstruierten Folgen gerichteter, topologischer v-w-Pfade $\left(f_n^j : [0,1] \to G_n\right)_{n \ge \tilde{n}}$ wollen wir nun gerichtete, topologische v-w-Pfade f^j in dem gerichteten $|G|$ konstruieren, sodass $\vec{E}\left(f^j([0,1])\right) \subseteq \bigcup\{\vec{E}\left(P_n^j\right) : n \in \mathbb{N}_{\ge \tilde{n}}\}$ gilt. Da die Bilder der f_n^j für verschiedene n in verschiedenen topologischen Räumen liegen, definieren wir den 'Limes' f^j punktweise wie folgt:

Definition 5.4.1. Sei $j \in \{1, \ldots, k\}$ und $t \in [0,1]$.

Fall 1: $\exists N \in \mathbb{N}$, sodass $\forall n \geq N : f_n^j(t) = f_N^j(t)$.
Wir setzen $f^j(t) := f_N^j(t)$.

Fall 2: $\forall n \in \mathbb{N} : \exists N > n$ mit $f_N^j(t) \neq f_n^j(t)$.
Also wird t, wegen $(\star\star)$ aus dem vorherigen Abschnitt 5.3 für jedes n auf eine Kontraktionsecke abgebildet. Die Komponente von $G - S_n$, die in G_n zu dem Bild von $f_n^j(t)$ kontrahiert wird, nennen wir C_n. Dann gilt für alle $m > n : C_m \subseteq C_n$. Also existiert ein eindeutiges Ende ω mit $C(S_n, \omega) = C_n$ für alle $n \geq \widetilde{n}$. Wir setzen $f^j(t) := \omega$.

Lemma 5.4.2. *Die Funktion f^j aus dem Einheitsintervall in den gerichteten $|G|$ aus Definition 5.4.1 ist ein gerichteter, topologischer v-w-Pfad.*

Beweis. Sei $t \in [0,1]$ und U eine Umgebung von $f^j(t)$. Für die Stetigkeit von f^j muss gezeigt werden, dass das Urbild von U eine Umgebung von t enthält. Sei o.B.d.A. U ein Basiselement der Topologie von $|G|$. Dann ist U in dem Inneren einer topologischen Kante enthalten, von der Form $B_\epsilon(x)$ für ein $x \in V$, oder es gilt $U = \widehat{C}_\epsilon(S, \omega')$ für ein $\omega' \in \Omega$ und endliches $S \subset V$. Falls $U \subseteq \mathring{\vec{e}}$ für eine Kante $\vec{e} \in \vec{E}$, wählen wir ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $\vec{e} \in \vec{E}(G_N)$. Dann gilt für alle $m > N$, dass $f_N^j|_{(f_N^j)^{-1}(\mathring{\vec{e}})} = f_m^j||_{(f_N^j)^{-1}(\mathring{\vec{e}})} = f^j||_{(f_N^j)^{-1}(\mathring{\vec{e}})}$ und wir finden eine geeignete Umgebung von t aufgrund der Stetigkeit von f_N^j. Sei $\epsilon \in (0,1)$. Im Fall von $U = B_\epsilon(x)$ für ein $x \in V$ folgt dies wiederum direkt aus der Stetigkeit der f_n^j. Wir finden nämlich ein $N \in \mathbb{N}$, sodass die endlich vielen mit x in G inzidenten Kanten alle in $\vec{E}(G_N)$ liegen. Wie in dem vorherigen Fall gilt dann $f_N^j|_{\left(f_N^j\right)^{-1}(U)} = f^j|_{\left(f_N^j\right)^{-1}(U)}$ und wir sind fertig. Den Fall von $U = \widehat{C}_\epsilon(S, \omega')$ können wir, wenn ein n existiert für das $f^j(t)$ in der offenen Menge $S_n \cup \mathring{\vec{E}}(G_n)$ liegt, auf den ebigen zurückführen: Dann existieren ein $\epsilon' \in (0,1)$ und ein $x \in S_n$, sodass $B_{\epsilon'}(x) \subset \left(\vec{E}(G_n) \cap U\right)$ eine Umgebung von $f(t)$ ist. Ansonsten gilt für t der zweite Fall aus Definition 5.4.1 und wir wählen N, so dass $S \subset S_N$. Dann gilt $C(S_N, \omega') \subseteq C(S, \omega')$. In dem topologischen Raum G_N entspricht die Komponente $C(S_N, \omega')$ von G_{SN} einer Kontraktionsecke $=: c_N$. Da f_N^j stetig ist, existieren $t_1 < t < t_2$ mit $f_N^j((t_1, t_2)) \subseteq B_\epsilon(c_N)$. Wegen der Eigenschaft $(\star\star)$ aus 5.3 liegt für alle $n \geq N$ das Bild $f_n^j((t_1, t_2))$ in dem Teilgraphen von G_n, der durch Kontraktionen aus $C(S_N, \omega')$ entstanden ist, vereinigt mit $B_\epsilon(c_N) \cap \mathring{\vec{E}}(G_N) = \mathring{\vec{E}}_\epsilon(S_N, \omega')$. Deshalb gilt $f^j((t_1, t_2)) \subseteq \left(\mathring{E}_\epsilon(S_N, \omega') \cup C(S_N, \omega') \cup \Omega(S_N, \omega')\right) = \widehat{C}_\epsilon(S_N, \omega') \subset \widehat{C}_\epsilon(S, \omega')$. Also ist f^j eine stetige Abbildung aus dem Einheitsintervall in den gerichteten Raum $|G|$, die 0 auf v und 1 auf w abbildet. Es bleibt zu prüfen, ob der 'Durchlaufsinn' des topologischen Pfades zu der Orientierung D von $|G|$ passt. Seien $a < b$ aus $[0,1]$ mit $f^j(a), f^j(b) \in \mathring{\vec{e}}$ für eine gerichtete, topologische Kante $\vec{e} \in \vec{E}$. Wir wählen $n' \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\vec{e} \in \vec{E}(G_{n'})$. Aus der Konstruktion von f^j und der Eigenschaft $(\star\star)$ folgt, dass für alle $n \geq n'$ gilt $f^j(a) = f_n^j(a) = f_{n'}^j(a) \in \varphi^e((0,b])$. □

5.5 Beweis

Beweis von Satz 1.0.2 Sei $G = (V, E, \Omega)$ ein lokal endlicher, zusammenhängender Multigraph ohne Schlingen und k eine positive, natürliche Zahl. Wir wollen zeigen, dass G genau dann $2k$-kantenzusammenhängend ist, wenn eine gute Orientierung für k von $|G|$ existiert.

Um die Hinrichtung der Äquivalenz zu zeigen, benutzen wir die in dieser Arbeit bewiesenen Resultate der vorherigen Abschnitte. Es sei G ein $2k$-kantenzusammenhängender Graph wie in der Behauptung und $v_0, v_1, \ldots$ eine feste Aufzählung der Eckenmenge V. Dann ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ nach Lemma 5.1.2 auch der Multigraphen G_n ohne Schlingen, der aus G durch Kontraktion entsteht, $2k$-kantenzusammenhängend und besitzt eine gute Orientierung nach Satz 1.0.1. Lemma 5.1.5 liefert eine zulässige Orientierung D von $|G|$. Wir behaupten, dass diese gut ist für k. Es sei ein beliebiges geordnetes Tupel (v, w) von zwei Ecken aus V gegeben. Lemma 5.2.1 gibt uns ein $\widetilde{n} \in \mathbb{N}$ und k Folgen gerichteter v-w-Pfade $(P_n^1)_{n \in \mathbb{N}_{\geq \widetilde{n}}}, (P_n^2)_{n \in \mathbb{N}_{\geq \widetilde{n}}}, \ldots, \left(P_n^k\right)_{n \in \mathbb{N}_{\geq \widetilde{n}}}$, welche die Bedingungen aus Korollar 5.2.2 erfüllen. Für jedes $j \in \{1, \ldots k\}$ finden wir eine Folge gerichteter, topologischer v-w-Pfade $(f_n^j)_{n \in \mathbb{N}_{\geq \widetilde{n}}}$ mit Bildern $(P_n^j)_{n \in \mathbb{N}_{\geq \widetilde{n}}}$ wie in 5.3 konstruiert und ein $f^j : [0,1] \to |G|$, wie in Definition 5.4.1, sodass $\vec{E}\,(f^j\,([0,1])) \subseteq \bigcup\{\vec{E}\,(P_n^j) : n \in \mathbb{N}_{\geq \widetilde{n}}\}$ gilt. Nach Lemma 5.4.2 ist f^j ein gerichteter, topologischer v-w-Pfad in dem gerichteten $|G|$ und nach Lemma 4.3.1 können wir dessen Bild zu einem gerichteten v-w-Bogen $=: P^j$ ausdünnen. Da die $P_n^1, \ldots, P_n^k$ kantendisjunkt sind für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq \widetilde{n}}$ und $\vec{E}\,(P^j) \subseteq \bigcup\{\vec{E}\,(P_n^j) : n \geq \widetilde{n}\}$, besteht $\{P^1, \ldots, P^k\}$ aus k kantendisjunkten, gerichteten v-w-Bögen in dem gerichteten $|G|$. Dies zeigt, dass die Orientierung D von $|G|$ gut ist.

Wir zeigen nun die Rückrichtung. Es sei eine gute Orientierung D von $|G|$ zu k gegeben. Sei (V_1, V_2) eine Partition von V und $F := E\,(V_1, V_2)$ ein endlicher Kantentrenner von G. Angenommen es gilt $|F| < 2k$. Dann ist o.B.d.A. $|\vec{F} := \vec{E}\,(V_1, V_2)| < k$. Da $V_1 \neq \emptyset \neq V_2$, können wir $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ und k-kantendisjunkte, gerichtete v_1-v_2-Bögen in dem gerichteten $|G|$ finden, deren ungerichtete Kanten in G kantendisjunkte v_1-v_2-Bögen bilden. Nach dem *Jumping-Arc-Lemma* [Q1, 8.6.3 (i)] über endliche Schnitte, welches auch für Multigraphen gilt, enthalten diese Bögen jeweils Kanten aus F. Deshalb muss ein v_1-v_2-Bogen $=: P$ existieren, der keine Kante aus $\vec{F}$, dafür mindestens eine Kante $\overleftarrow{f_1}$ aus $\overleftarrow{F} = \vec{E}\,(V_2, V_1)$ enthält. Dann ist $v_1 P init\,(f_1) \subseteq P \setminus \overleftarrow{\mathring{f}_1}$ ein Bogen in dem ungerichteten G, mit einem Ende in V_1 und einem in V_2. Deshalb enthält dieser, wiederum nach dem *Jumping-Arc-Lemma*, eine weitere Kante f_2 aus F. Dann gilt $\overleftarrow{f_2} \in \overleftarrow{F} \setminus \overleftarrow{\mathring{f}_1}$. Da $v_1 P init\,(f_2)$ wieder ein Bogen in G mit einem Ende in V_1 und dem anderen in V_2 ist, finden wir eine weitere Kante $\overleftarrow{f_3} \in \overleftarrow{F} \setminus \{\overleftarrow{\mathring{f}_1}, \overleftarrow{\mathring{f}_2}\}$. Dies können wir fortsetzen bis wir eine Folge paarweise verschiedener, gerichteter Kanten $\{\overleftarrow{f_1}, \overleftarrow{f_2}, \ldots, \overleftarrow{f_{2k}}\} \subset \overleftarrow{F}$ gefunden haben. Wir bekommen einen Widerspruch zu der Annahme, dass $|F| < 2k$ ist. Also gilt $|F| \geq 2k$ und G ist $2k$-kantenzusammenhängend. $\square$

Literatur

[Q1] Reinhard Diestel, *Graph Theory*, Springer Spektrum, Heidelberg, 5th edition (2016)

[Q2] C. St. J. A. Nash-Williams, *on orientations, connectivity and odd-vertex-pairings in finite graphs*, Canad. J. Math. 12, 555–567 (1960)

[Q3] H. E. Robbins, *A theorem on graphs, with an application to a problem of traffic control*, Amer. Math. Monthly 46, 281-3 (1939)

[Q4] L. Egyed, *Ueber die wohlgerichteten unendlichen Graphen*, Math. phys. Lapok, 48, 505-509 (1941)

[Q5] D. W. Hall und G. L. Spencer, *Elementary Topology*, John Wiley, New York (1955)

[Q6] R. Aharoni und C. Thomassen, *Infinite, highly connected digraphs with no two arc-disjoint spanning trees.*, J. Graph Theory 13, 71–74 (1989)

[Q7] C. St. J. A. Nash-Williams, *Infinite graphs- a survey*, J. Combin. Theory 3, 286–301 (1967)

[Q8] Carsten Thomassen, *Orientations of infinite graphs with prescribed edge-connectivity*, Combinatorica, 36 (5), 601-621 (7.Dezember 2015)

[Q9] János Barát und Matthias Kriesell, *What is on his mind?*, Elsevier B.V. (Juli 2010)

[Q10] Sam B. Nadler, Jr., *Continuum theory: An Introduction*, Marcel Dekker, Inc. (1992)

[Q11] J. Pascal Gollin und Karl Heuer, *An Analogue of Edmonds' Branching Theorem for infinite Digraphs*, arXiv:1805.02933 (Mai 2018)

Eidesstattliche Versicherung

Die vorliegende Arbeit habe ich selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel - insbesondere keine im Quellenverzeichnis nicht benannten Internet-Quellen - benutzt. Die Arbeit habe ich vorher nicht in einem anderen Prüfungsverfahren eingereicht. Die eingereichte schriftliche Fassung entspricht genau der auf dem elektronischen Speichermedium.

Hamburg, den