

Patrick Bellenbaum

Schlanke Baumzerlegungen von Graphen

12. Dezember 2000

Diplomarbeit am Mathematischen Seminar der
Universität Hamburg

Zusammenfassung

Betrachtet man zwei Teile einer Baumzerlegung eines endlichen Graphen und eine Kante auf dem Weg zwischen den diesen Teilen zugeordneten Knoten im Zerlegungsbaum, so trennt die zu der Kante gehörige Eckenmenge im zugrunde liegenden Graphen die beiden Teile voneinander. Damit ist die Anzahl disjunkter Wege zwischen den beiden Teilen durch die kleinste Kardinalität einer solchen Eckenmenge beschränkt. Eine Baumzerlegung heißt schlank, wenn je zwei ihrer Teile tatsächlich immer durch so viele disjunkte Wege verbunden werden können, wie diese obere Schranke es angibt. Diese Arbeit gibt zwei kürzere Beweise des Satzes von Thomas ([1]), nach dem jeder endliche Graph eine schlanke Baumzerlegung optimaler Weite besitzt. Das Ergebnis wird unter anderem von Robertson und Seymour in [3] benutzt, um die Graphen mit beschränkter Baumweite als wohlquasi-geordnet zu erweisen.

1 Voraussetzungen

Alle Graphen in dieser Arbeit sind endlich und dürfen Schleifen und Mehrfachkanten enthalten. Die Terminologie und Notation entsprechen denen in [2] (bzw. in der deutschsprachigen Parallelausgabe); insbesondere bezeichnet $G[V]$ den von $V \subset V(G)$ im Graphen G induzierten Untergraphen, sowie $t_1 T t_2$ den in einem Baum T eindeutig bestimmten Weg zwischen zwei Ecken t_1 und t_2 .

2 Einleitung

Zunächst definieren wir eine *Baumzerlegung* eines Graphen entsprechend der Ausführungen in dem Lehrbuch von Reinhard Diestel ([2]):

Definition 2.1 (Baumzerlegung) Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine Baumzerlegung von G ist ein Paar (T, \mathcal{V}) — wobei T ein Baum und $\mathcal{V} = (V_t)_{t \in V(T)}$ eine durch $V(T)$ indizierte Familie von Teilmengen von $V(G)$ ist —, für das die folgenden Eigenschaften (T1)–(T3) gelten:

(T1) $\bigcup_{t \in T} V_t = V(G)$

(T2) Zu jeder Kante e von G existiert ein $V \in \mathcal{V}$, das beide Enden von e enthält.

(T3) Für alle $t_1, t_2, t_3 \in T$ mit $t_2 \in t_1 T t_3$ gilt $V_{t_1} \cap V_{t_3} \subset V_{t_2}$.

(T2) und (T3) sind äquivalent zu der Tatsache, dass jede Kante $xy \in E(T)$ ihre Trennungseigenschaft im Zerlegungsbaum T auf den zugrunde liegenden Graphen G überträgt:

Lemma 2.2 (Trennungslemma) Sei (T, \mathcal{V}) eine Baumzerlegung eines Graphen G gemäß Definition 2.1. Dann gilt für jede Kante $xy \in E(T)$, dass die Menge $V_x \cap V_y$ in G die beiden Eckenmengen $\bigcup_{t \in T_1} V_t$ und $\bigcup_{t \in T_2} V_t$ trennt, wobei T_1 und T_2 die beiden Komponenten von $T - \{xy\}$ seien. \square

Eine solche trennende Eckenmenge $V_x \cap V_y$ mit $xy \in E(T)$ wird im Folgenden als ein *Trenner* der Baumzerlegung bezeichnet. Wie üblich nennen wir den durch V_t in G induzierten Untergraphen $G[V_t]$ einen *Teil* der Baumzerlegung. Weiter sei die *Weite* einer Baumzerlegung (T, \mathcal{V}) die Zahl

$$\max \{ |V_t| - 1 \mid t \in T \}$$

und die *Baumweite* $\text{tw}(G)$ eines Graphen G die geringste Weite einer Baumzerlegung von G . Eine Baumzerlegung von G mit Weite $\text{tw}(G)$ sei dann von *optimaler Weite*. Für die Ecken des Zerlegungsbaums einer Baumzerlegung wird in dieser Arbeit immer der Begriff “Knoten” verwendet, um diese schon sprachlich von den “Ecken” des zugrunde liegenden Graphen zu unterscheiden.

Die *schlanken* Baumzerlegungen definieren wir äquivalent zu der von Robertson und Seymour in [3] benutzten Eigenschaft:

Definition 2.3 (Schlanke Baumzerlegung) Eine Baumzerlegung heißt schlank, wenn sie zusätzlich zu (T1)–(T3) noch folgende Eigenschaft besitzt:

(T4) Für alle $s \in \mathbb{N}$ und $t_1, t_2 \in T$ ($t_1 \neq t_2$) gibt es stets entweder s disjunkte Wege von V_{t_1} nach V_{t_2} in G oder ein $e = xy \in E(t_1 T t_2)$ mit $|V_x \cap V_y| < s$

Der Unterschied zu der — formal stärkeren — Schlankheit aus dem Buch von Diestel ([2]) ist rein technischer Natur: aus einer nach Definition 2.3 schlanken Baumzerlegung lässt sich leicht auch eine im Sinne des Buches schlanke gewinnen, indem man jeden Trenner der Baumzerlegung mit Hilfe einer Unterteilung der zugehörigen Kante im Zerlegungsbaum zu einem eigenständigen Teil macht.

Wie im gerade erwähnten Buch ([2]) angedeutet kann man die Schlankheitsbedingung als weiteres Kriterium auf der Suche nach Baumzerlegungen in möglichst kleine Teile interpretieren. Im Gegensatz zu der Bedingung, von optimaler Weite zu sein, die “nur” die größten Teile möglichst klein hält, stellt die Schlankheitsbedingung auch Anforderung an eine Baumzerlegung abseits der größten Teile: Sind die Trenner aller Kanten eines beliebigen Weges im Zerlegungsbaum groß, so existieren auch viele disjunkte Wege im zugrunde liegenden Graphen.

Inwiefern garantiert dieser “Zusammenhang” der Teile aber auch, dass eine schlanke Baumzerlegung der Anschauung ihres Begriffes gerecht wird und wirklich die Baumstruktur des Graphen möglichst optimal widerspiegelt? Diesbezüglich ist die Schlankheitsbedingung nicht besonders stark: Wie man anhand der “offensichtlich verbesserungswürdigen” aber nach Definition schlanken Baumzerlegungen in den Abbildungen 1–3 sieht, werden unnötig “dicke” Teile (Abb. 1) ebenso wenig ausgeschlossen wie die Existenz von parallelen disjunkten Teilbäumen innerhalb eines Astes des Zerlegungsbaumes, die in einer anschaulich “dünnen” Zerlegung wohl in unterschiedlichen Ästen liegen sollten (Abb. 2). Auch ist es nicht notwendig, dass ein Trenner $V_x \cap V_y$ mit $xy \in E(T)$ den Graphen minimal trennt, dass also jede Ecke von $V_x \cap V_y$ sowohl einen Nachbarn “links” als auch einen Nachbarn “rechts” von sich hat (Abb. 3).¹

Die folgende Definition der starken Schlankheit, die von Robin Thomas in [1] (ohne den hier verwendeten Begriff) eingeführt wurde, schließt diese eher “unschlanken” Phänomene aus. Sie sichert die Existenz vieler disjunkter Wege nicht nur zwischen je zwei Teilen, sondern auch zwischen beliebigen

¹Im Englischen existieren zwei Bezeichnungen für eine schlanke Baumzerlegung: “lean” und “linked”, je nachdem, “welchen der beiden dualen Aspekte der Eigenschaft (T4) man betonen will” ([2]). Die obigen Betrachtungen lassen sich damit zusammenfassen, dass die Schlankheitsbedingung nur dem zweiten Begriff gerecht wird und für die deutsche Sprache gerade die schlechtere der beiden Übersetzungsmöglichkeiten gewählt wurde.

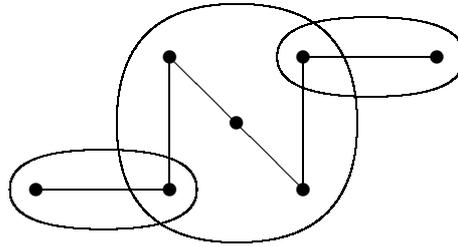


Abbildung 1:

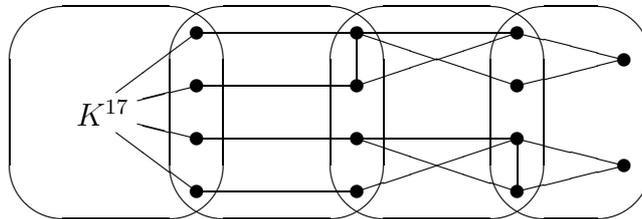


Abbildung 2:

Teilmengen von Teilen und ist damit echt stärker als Definition 2.3:

Definition 2.4 (Starkschlanke Baumzerlegung) Eine Baumzerlegung (T, \mathcal{V}) gemäß Definition 2.1 heißt starkschlanke, wenn sie zusätzlich zu (T1)–(T3) noch folgende Eigenschaft besitzt:

(T4*) Für je zwei Knoten $t_1, t_2 \in T$ und je zwei Eckenmengen X_1, X_2 mit $X_i \subset V_{t_i}$ ($i = 1, 2$) und $|X_1| = |X_2| =: k$ gibt es stets entweder k disjunkte X_1 – X_2 -Wege in G oder ein $e = xy \in E(t_1 T t_2)$ mit $|V_x \cap V_y| < k$.

Insbesondere die Tatsache, dass X_1 und X_2 in ein und demselben Teil liegen dürfen und dabei nicht notwendigerweise disjunkt sein müssen, macht diese Bedingung deutlich stärker als die vorige. (Man findet in den Beispielen der Abbildungen 1–3 leicht Mengen X_1 und X_2 , die der Bedingung (T4*)

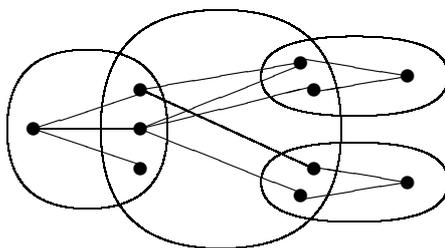


Abbildung 3:

nicht genügen.) Eine starkschlanke Baumzerlegung wird der Anschauung also zumindest in dem Sinne gerecht, dass die drei naheliegenden Methoden zur “Optimierung” einer beliebigen Baumzerlegung aus den drei Beispielen prinzipiell hier nicht anwendbar sind.

Umso interessanter ist das nun folgende Ergebnis aus [1], nach dem sich zu jedem Graphen eine starkschlanke Baumzerlegung findet, die zudem noch von optimaler Weite ist.

Satz 2.5 (Thomas, 1990, [1]) *Jeder endliche Graph hat eine starkschlanke Baumzerlegung optimaler Weite.*

Dieses Resultat, für das in Kapitel 3 zwei kürzere Beweise gegeben werden, ermöglicht es bei jeglicher Anwendung von Baumzerlegungen die zusätzliche Eigenschaft der starken Schlankeheit ohne Einschränkungen vorauszusetzen. Insbesondere wird die einfache Schlankeheit in *Graph Minors IV* [3] ausgenutzt, um die Aussage des Satzes von Kruskal, nach dem die endlichen Bäume wohlquasi geordnet sind, auf die Graphen mit durch festes k beschränkter Baumweite zu verallgemeinern. Dies macht einen der beiden nun folgenden Beweise also zu einem möglichen Teil eines Komplettbeweises des Großen Minorensatzes.

3 Zwei Beweise des Satzes 2.5

Die beiden Beweise, die im Folgenden so dargestellt sind, dass sie unabhängig voneinander gelesen werden können, sind jeweils unterteilt in vier Abschnit-

te: Im ersten wird die *Größe* einer Baumzerlegung und eine *Ordnung* dieser Größen definiert. Unter der Annahme, eine in diesem Sinne minimale Baumzerlegung sei nicht starkschlank, wird im zweiten Abschnitt eine neue Baumzerlegung konstruiert. Mit Hilfe der im dritten Abschnitt bewiesenen Aussagen wird dann im vierten Abschnitt gezeigt, dass die neue Baumzerlegung von echt kleinerer Größe ist; aus dem damit erzeugten Widerspruch zur minimalen Wahl der Ausgangsbaumzerlegung folgt, dass diese bereits starkschlank ist.

3.1 Erster Beweis

Der erste Beweis folgt in seinem konstruktiven Teil dem von Robin Thomas in [1]. Allerdings unterscheidet sich die hier definierte Größe einer Baumzerlegung und die daraus resultierende Ordnung auf diesen Größen maßgeblich von denen Thomas', was die Beweisführung nachvollziehbarer und weniger technisch werden lässt.

Die Baumzerlegung (T, \mathcal{V}) mit minimaler Größe

Sei G ein endlicher Graph. Für eine Baumzerlegung (T, \mathcal{V}) bezeichne

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad a_n = \# \{t \in V(T) \mid |V_t| = n\}$$

ihre Größe. Die Größen von Baumzerlegungen seien koxikographisch geordnet, d.h. für zwei Größen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Baumzerlegungen von G gelte

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} < (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad :\Leftrightarrow \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad a_{n_0} < b_{n_0} \quad \forall n > n_0 \quad a_n = b_n .$$

Sei (T, \mathcal{V}) nun eine Baumzerlegung minimaler Größe in diesem Sinne. Damit ist (T, \mathcal{V}) also insbesondere auch von optimaler Weite.

Konstruktion von (R, \mathcal{W}) unter der Annahme, dass (T, \mathcal{V}) nicht starkschlank sei

Angenommen, (T, \mathcal{V}) wäre nicht starkschlank. Dann existieren also Quadrupele (t_1, t_2, X_1, X_2) wie in (T4*), die diese Eigenschaft verletzen. Betrachte

unter all diesen Quadrupeln eines, in dem der Abstand $d_T(t_1, t_2)$ der Knoten t_1 und t_2 in T möglichst gering ist. Dieses Quadrupel sei im Folgenden mit (t_1, t_2, X_1, X_2) bezeichnet.

Des Weiteren betrachtet man für dieses Gegenbeispiel die X_1 - X_2 -trennenden Eckenmengen kleinstmöglicher Kardinalität und wählt unter diesen ein $A \subset V(G)$, das "möglichst nah an $t_1 T t_2$ " liegt, d.h. mit kleinstmöglicher Summe $\sum_{a \in A} d_a$, wobei

$$d_a := \min \{d_T(t, t') \mid a \in V_t, t' \in t_1 T t_2\}.$$

Sei $F^1 \subset V(G)$ die Menge der Ecken aller Komponenten von $G - A$, die X_1 treffen; F^2 die Menge der Ecken der übrigen Komponenten. Dann ergibt sich aufgrund der Trennungseigenschaften von A :

- $F^1 \dot{\cup} F^2 \dot{\cup} A = V(G)$
- A trennt F^1 und F^2 in G
- $X_i \subset F^i \cup A \quad (i = 1, 2)$

Die Baumzerlegung (T, \mathcal{V}) induziert jeweils eine Baumzerlegung auf $G^1 := G[F^1 \cup A]$ und $G^2 := G[F^2 \cup A]$. Ziel ist es, diese beiden Zerlegungen durch Hinzufügen einer neuen Kante zwischen den beiden Zerlegungsbäumen zu einer Baumzerlegung von ganz G zusammenzuführen. Diese neue Struktur erfüllt automatisch (T1) und (T2); damit sie auch (T3) erfüllt, müssen die Ecken, die in beiden Zerlegungen vorkommen (also die Ecken aus A), in allen Teilen enthalten sein, die im neuen Baum zwischen ihren jeweiligen Teilen in den beiden Einzelzerlegungen liegen. Wie immer die beiden Endknoten der neuen Kante auch gewählt werden: Dies wird im Allgemeinen nicht von selbst der Fall sein. Man muss also in beiden Zerlegungen jede einzelne Ecke $a \in A$ zu den Teilen hinzufügen, die in T zwischen einem Teil, der a enthält, und dem Teil, der zu dem Endknoten der neuen Kante gehört, liegen. Dadurch können die entsprechenden Teile größer werden, was kritisch ist, da die neu konstruierte Baumzerlegung ja gerade von echt kleinerer Größe als (T, \mathcal{V}) sein soll. Wie wir aber sehen werden, bleibt diese Größenzunahme dann ungefährlich, wenn man als Endknoten der neuen Kante im Zerlegungsbaum von G^1 den Knoten t_2 und im Zerlegungsbaum von G^2 den Knoten t_1 wählt.

Formal wählen wir für jedes $a \in A$ ein $t(a) \in T$ mit $a \in V_{t(a)}$ und setzen

$$W_t^i := (V_t \cap (F^i \cup A)) \cup \{a \in A \mid t \in t(a)Tt_{3-i}\}$$

für alle $t \in T$ und $i = 1, 2$. Dann ist (T, \mathcal{W}^i) mit $\mathcal{W}^i := (W_t^i)_{t \in V(T)}$ jeweils für $i = 1, 2$ eine Baumzerlegung von G^i . (Die Eigenschaften (T1) und (T2) gelten aufgrund der entsprechenden Eigenschaften für (T, \mathcal{V}) . Die Eigenschaft (T3) für (T, \mathcal{W}^i) ist äquivalent zu der Tatsache, dass für alle Ecken $v \in G$ die Knoten $t \in T$ mit $v \in W_t^i$ einen zusammenhängenden Teilgraphen im Zerlegungsbaum aufspannen. Für $v \in V(G) \setminus A$ folgt dies direkt aus (T3) für (T, \mathcal{V}) . Ist $v := a \in A$, so ist $a \in W_t^i$ genau dann, wenn $a \in V_t$ oder $t \in t(a)Tt_{3-i}$ gilt. Die $t \in T$, die die erste Bedingung erfüllen, spannen wegen (T3) für (T, \mathcal{V}) einen zusammenhängenden Teilgraphen in T auf, der insbesondere auch $t(a)$ enthält. Damit ist auch die Vereinigung dieses Teilgraphen mit dem Weg $t(a)Tt_{3-i}$ wiederum zusammenhängend.)

Die neue Baumzerlegung (R, \mathcal{W}) von ganz G definieren wir formal wie folgt: seien T^1 und T^2 zwei (disjunkte) isomorphe Kopien von T und t_2^1 der Knoten in T^1 , der t_2 in T entspricht; analog sei t_1^2 der Knoten in T^2 , der t_1 in T entspricht. Wir setzen

$$\begin{aligned} R &:= T^1 \cup T^2 \cup \{t_2^1 t_1^2\}, \\ \mathcal{W} &:= (W_r)_{r \in R}, \text{ wobei} \\ W_r &:= W_r^i \text{ für } r \in T^i. \end{aligned}$$

(Da die gemeinsamen Ecken von G^1 und G^2 (nämlich die Ecken aus A) jeweils in $V_{t_2^1}$ und in $V_{t_1^2}$ enthalten sind, ist (R, \mathcal{W}) tatsächlich eine Baumzerlegung von G .)

Nach dem Satz von Menger und der Minimalwahl von A gibt es weiterhin $|A| =: m$ disjunkte X_1 – X_2 -Wege in G , die jeweils A in genau einer Ecke treffen. Der Weg, der $a \in A$ enthält, sei mit P_a bezeichnet. Da (t_1, t_2, X_1, X_2) ein Gegenbeispiel zu (T4*) ist, gilt $m < |X_1| = |X_2|$.

Die Aussagen (W1)–(W3)

In diesem Abschnitt beweisen wir die folgenden drei Aussagen:

(W1) Für alle $t \in V(T)$ und $i = 1, 2$ ist $|W_t^i| \leq |V_t|$.

(W2) Gilt für ein $s \in T$ und ein $i \in \{1, 2\}$ die Gleichheit $|W_s^i| = |V_s|$, so ist $W_s^{3-i} \subset A$.

(W3) Es gibt ein $t_0 \in t_1 T t_2$ mit $|W_{t_0}^1|, |W_{t_0}^2| < |V_{t_0}|$.

Zu (W1): Als zusätzliche Ecken von W_t^i im Vergleich zu V_t kommen nur $a \in A$ in Frage. Für jedes $a \in W_t^i$, welches nicht schon in V_t liegt, gilt (nach Definition von W_t^i) $t \in t(a) T t_{3-i}$. Nach dem Trennungslemma 2.2 enthält daher der $V_{t(a)}$ und $V_{t_{3-i}}$ verbindende Weg $P_a \cap G^{3-i}$ eine Ecke $v \neq a$ aus V_t . Wegen $v \in P_a \cap G^{3-i} \subset F^{3-i}$ liegt v nicht in W_t^i . Für verschiedene a sind solche Ecken v aufgrund der Disjunktheit der Wege verschieden und es folgt (W1).

Zu (W2): Aus Symmetriegründen ist es hinreichend, den Fall $i = 1$ zu betrachten, es sei also im Folgenden $s \in T$ mit $|W_s^1| = |V_s|$. Wir nehmen an, W_s^2 wäre nicht in A enthalten, es gelte also $V_s \cap F^2 \neq \emptyset$. Dann definieren wir

$$B := W_s^1 \setminus V_s = \{b \in A \mid s \in t(b) T t_2\} \setminus V_s.$$

Wegen $|W_s^1| = |V_t|$ ist $|B| = |V_s \cap F^2|$ und für $A' := (A \setminus B) \cup (V_s \cap F^2)$ gilt damit $|A'| = |A|$.

Wir zeigen nun, dass A' sowohl V_s von X_2 als auch X_1 von X_2 trennt: Sowohl jeder V_s - X_2 -Weg als auch jeder X_1 - X_2 -Weg, der A' vermeidet, trifft einen Punkt von B . (Im ersten Falle folgt dies aus der Tatsache, dass $V_s \setminus A'$ in $F^1 \cup A$, X_2 aber in $F^2 \cup A$ enthalten ist; im zweiten Falle folgt es einfach aus der Trennungseigenschaft von A .) Betrachtet man von einem solchen Weg aber das Endstück, welches den letzten Punkt des Weges in B mit X_2 verbindet, so folgt, dass dessen Ecken in $F^2 \cup B$ liegen und —mit der Definition von B und dem Trennungslemma 2.2— dass dieser Weg auch V_s trifft, also eine Ecke mit $V_s \cap (F^2 \cup B) = V_s \cap F^2 \subset A'$ gemein hat. Widerspruch!

Für den Fall, dass $s \in t_1 T t_2$ ist, bildet (s, t_2, X_s, X_2) (wobei X_s eine beliebige k -elementige Teilmenge von V_s sei) also ein Gegenbeispiel zu (T4*), dessen Existenz der geforderten Minimalität der Länge des Weges $t_1 T t_2$ widerspricht.

Betrachten wir nun den noch übrig gebliebenen Fall $s \notin \overset{\circ}{t_1 T t_2}$: Wir zeigen, dass dann $d_{a'} < d_b$ für alle $a' \in V_s \cap F^2$ und $b \in B$; aus der Annahme von $V_s \cap F^2 \neq \emptyset$ folgt dann $\sum_{a \in A'} d_a < \sum_{a \in A} d_a$, was der Wahl von A statt A' als X_1 - X_2 -Trenner widerspricht. Seien also $a' \in V_s \cap F^2$ und $b \in B$ gegeben. Für jedes $t \in T$ mit $b \in V_t$ gilt nach Definition von B dann $t \neq s$ und $s \in t T t_2$. (Die Definition von B liefert dies zunächst nur für $t(b)$, da die $t \in T$ mit $b \in V_t$ aber einen zusammenhängenden Teilgraphen in $T - s$ aufspannen, gilt $s \in t T t_2$ auch für alle diese t .) Mit $s \notin \overset{\circ}{t_1 T t_2}$ folgt hieraus, dass s in T sogar ganz $t_1 T t_2$ von t trennt. Wegen $a' \in V_s$ folgt wie gewünscht $d_{a'} < d_b$.

Zu (W3): Es gibt einen Teil V_{t_0} mit $t_0 \in t_1 T t_2$, der A kreuzt, d.h. der sowohl F^1 als auch F^2 trifft. (Sonst wäre $V_{t_1} \subset (F^1 \cup A)$ und $V_{t_2} \subset (F^2 \cup A)$ und es gibt eine Kante $xy \in E(t_1 T t_2)$, wobei V_x ganz in G^1 und V_y ganz in G^2 enthalten ist. Der zur Kante xy gehörende Trenner $V_x \cap V_y$ liegt dann ganz in A und es gilt $|V_x \cap V_y| \leq m$, was einen Widerspruch zur Wahl von (t_1, t_2, X_1, X_2) als Gegenbeispiel zur Eigenschaft (T4*) ergibt.) Gelte für dieses t_0 und ein $i \in \{1, 2\}$ wiederum $|W_{t_0}^i| = |V_{t_0}|$, so würde nach (W2) folgen, dass $V_{t_0} \cap F^{3-i} = \emptyset$. Widerspruch! Zusammen mit (W1) folgt (W3).

(R, \mathcal{W}) ist von echt kleinerer Größe als (T, \mathcal{V})

Mit den Eigenschaften (W1)–(W3) lässt sich nun zeigen, dass die Größe der neu konstruierten Baumzerlegung (R, \mathcal{W}) tatsächlich kleiner ist als die von (T, \mathcal{V}) . Sei also $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Größe von (T, \mathcal{V}) und $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die von (R, \mathcal{W}) .

Nach (W3) gibt es ein $t_0 \in T$ mit $|W_{t_0}^1|, |W_{t_0}^2| < |V_{t_0}|$ und $|V_{t_0}| > m$; wir betrachten ein solches t_0 mit maximalem $n_0 := |V_{t_0}|$. Für alle $t \in T$ mit $|V_t| > n_0$ hat nach (W1) somit einer der beiden neu konstruierten Teile W_t^1, W_t^2 die gleiche Größe wie V_t . Der andere hat nach (W2) höchstens m Ecken, beeinflusst also kein w_n mit $n \geq n_0$. Es folgt $w_n = v_n$ für alle $n > n_0$ sowie $w_{n_0} < v_{n_0}$.

Damit ist die Größe von (R, \mathcal{W}) echt kleiner als die von (T, \mathcal{V}) ; ein Widerspruch zur Wahl von (T, \mathcal{V}) . Die Annahme, dass (T, \mathcal{V}) nicht starkschlank sei, ist also widerlegt und es folgt die Behauptung. \square

3.2 Zweiter Beweis

Der Beweis in Kapitel 3.1 beinhaltet die Wahl eines “minimalen” Gegenbeispiels. Der in diesem Kapitel vorgestellte Beweis verzichtet auf diese Einschränkung und zeigt, dass sich zu jedem beliebigen Gegenbeispiel immer eine Baumzerlegung echt kleinerer Größe konstruieren lässt. Neben der bereits im ersten Beweis eingeführten Ordnung unterscheidet sich hier auch die Beweisführung in den einzelnen Teilschritten von der in [1].

Die Baumzerlegung (T, \mathcal{V}) mit minimaler Größe

Sei G ein endlicher Graph. Für eine Baumzerlegung (T, \mathcal{V}) bezeichne

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad a_n = \# \{t \in V(T) \mid |V_t| = n\}$$

ihre Größe. Die Größen von Baumzerlegungen seien koxikographisch geordnet, d.h. für zwei Größen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Baumzerlegungen von G gelte

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} < (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad :\Leftrightarrow \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad a_{n_0} < b_{n_0} \quad \forall n > n_0 \quad a_n = b_n .$$

Sei (T, \mathcal{V}) nun eine Baumzerlegung minimaler Größe in diesem Sinne. Damit ist (T, \mathcal{V}) also insbesondere auch teilmengenteilfrei und von optimaler Weite.

Konstruktion von (R, \mathcal{W}) unter der Annahme, dass (T, \mathcal{V}) nicht starkschlank sei

Angenommen, (T, \mathcal{V}) wäre nicht starkschlank. Dann existiert ein Quadrupel (t_1, t_2, X_1, X_2) wie in (T4*), das diese Eigenschaft verletzt.

Des Weiteren betrachtet man für dieses Gegenbeispiel die X_1 - X_2 -trennenden Eckenmengen kleinstmöglicher Kardinalität und unter diesen ein $A \subset V(G)$ mit möglichst vielen Ecken in $\bigcup_{t \in t_1 T t_2} V_t$.

Sei $F^1 \subset V(G)$ die Menge der Ecken aller Komponenten von $G - A$, die X_1 treffen; F^2 die Menge der Ecken der übrigen Komponenten. Dann ergibt sich aufgrund der Trennungseigenschaften von A :

- $F^1 \dot{\cup} F^2 \dot{\cup} A = V(G)$
- A trennt F^1 und F^2 in G
- $X_i \subset F^i \cup A$ ($i = 1, 2$)

Die Baumzerlegung (T, \mathcal{V}) induziert jeweils eine Baumzerlegung auf $G^1 := G[F^1 \cup A]$ und $G^2 := G[F^2 \cup A]$. Ziel ist es, diese beiden Zerlegungen durch Hinzufügen einer neuen Kante zwischen den beiden Zerlegungsbäumen zu einer Baumzerlegung von ganz G zusammenzufügen. Diese neue Struktur erfüllt automatisch (T1) und (T2); damit sie auch (T3) erfüllt, müssen die Ecken, die in beiden Zerlegungen vorkommen (also die Ecken aus A), in allen Teilen enthalten sein, die im neuen Baum zwischen ihren jeweiligen Teilen in den beiden Einzelzerlegungen liegen. Wie immer die beiden Endknoten der neuen Kante auch gewählt werden: Dies wird im Allgemeinen nicht von selbst der Fall sein. Man muss also in beiden Zerlegungen jede einzelne Ecke $a \in A$ zu den Teilen hinzufügen, die in T zwischen einem Teil, der a enthält, und dem Teil, der zu dem Endknoten der neuen Kante gehört, liegen. Dadurch können die entsprechenden Teile größer werden, was kritisch ist, da die neu konstruierte Baumzerlegung ja gerade von echt kleinerer Größe als (T, \mathcal{V}) sein soll. Wie wir aber sehen werden, bleibt diese Größenzunahme wegen des Satzes von Menger dann ungefährlich, wenn man als Endknoten der neuen Kante im Zerlegungsbaum von G^1 den Knoten t_2 und im Zerlegungsbaum von G^2 den Knoten t_1 wählt.

Formal wählen wir für jedes $a \in A$ ein $t(a) \in T$ mit $a \in V_{t(a)}$ und setzen

$$W_t^i := (V_t \cap (F^i \cup A)) \cup \{a \in A \mid t \in t(a)Tt_{3-i}\}$$

für alle $t \in T$ und $i = 1, 2$. Dann ist (T, \mathcal{W}^i) mit $\mathcal{W}^i := (W_t^i)_{t \in V(T)}$ jeweils für $i = 1, 2$ eine Baumzerlegung von G^i . (Die Eigenschaften (T1) und (T2) gelten aufgrund der entsprechenden Eigenschaften für (T, \mathcal{V}) . Die Eigenschaft (T3) für (T, \mathcal{W}^i) ist äquivalent zu der Tatsache, dass für alle Ecken $v \in G$ die Knoten $t \in T$ mit $v \in W_t^i$ einen zusammenhängenden Teilgraphen im Zerlegungsbaum aufspannen. Für $v \in V(G) \setminus A$ folgt dies direkt aus (T3) für (T, \mathcal{V}) . Ist $v := a \in A$, so ist $a \in W_t^i$ genau dann, wenn $a \in V_t$ oder $t \in t(a)Tt_{3-i}$ gilt. Die $t \in T$, die die erste Bedingung erfüllen, spannen wegen (T3) für (T, \mathcal{V}) einen zusammenhängenden Teilgraphen in T auf, der insbesondere auch $t(a)$ enthält. Damit ist auch die Vereinigung dieses Teilgraphen mit dem Weg $t(a)Tt_{3-i}$ wiederum zusammenhängend.)

Die neue Baumzerlegung (R, \mathcal{W}) von ganz G definieren wir formal wie folgt: seien T^1 und T^2 zwei (disjunkte) isomorphe Kopien von T und t_2^1 der Knoten in T^1 , der t_2 in T entspricht; analog sei t_1^2 der Knoten in T^2 , der t_1 in T entspricht. Wir setzen

$$\begin{aligned} R &:= T^1 \cup T^2 \cup \{t_2^1 t_1^2\}, \\ \mathcal{W} &:= (W_r)_{r \in R}, \text{ wobei} \\ W_r &:= W_r^i \text{ f\"ur } r \in T^i. \end{aligned}$$

(Da die gemeinsamen Ecken von G^1 und G^2 (nämlich die Ecken aus A) jeweils in $W_{t_2^1}^1$ und in $W_{t_1^2}^2$ enthalten sind, ist (R, \mathcal{W}) tatsächlich eine Baumzerlegung von G .)

Nach dem Satz von Menger und der Minimalwahl von A gibt es weiterhin $|A|$ disjunkte X_1 – X_2 -Wege in G , die jeweils A in genau einer Ecke treffen. Der Weg, der $a \in A$ enthält, sei mit P_a bezeichnet. Aufgrund der Trennungseigenschaft von A ist $P_a \cap G^i$ wieder ein Weg, der a mit X_i in $G[F^i \cup \{a\}]$ verbindet. Da (t_1, t_2, X_1, X_2) ein Gegenbeispiel zu (T4*) ist, gilt außerdem $|A| < |X_1| = |X_2|$.

Des Weiteren sei zu jedem $t \in T$ und $i = 1, 2$ die Abbildung $f_t^i : W_t^i \rightarrow V_t$ wie folgt definiert: Auf $W_t^i \cap V_t$ sei f_t^i die Identität. Für den Fall $a \in W_t^i \setminus V_t \subset A$ gilt $a \notin V_t$, aber $t \in t(a)Tt_{3-i}$; nach dem Trennungslemma 2.2 und den Überlegungen des vorigen Abschnitts hat also der Weg $P_a \cap G^{3-i}$ eine Ecke mit V_t gemein, die dann in F^{3-i} liegt. Wähle als $f_t^i(a)$ beliebig eine solche Ecke. Wegen der Disjunktheit der Wege aus $(P_a)_{a \in A}$ ist die Abbildung $f_t^i : W_t^i \rightarrow V_t$ dann injektiv.

Die Aussagen (W1)–(W3)

In diesem Abschnitt werden die drei folgenden Aussagen bewiesen:

- (W1) Für alle $t \in V(T)$ und $i = 1, 2$ ist $|W_t^i| \leq |V_t|$.
- (W2) Gilt für ein $s \in V(T)$ und ein $i \in \{1, 2\}$ die Gleichheit $|W_s^i| = |V_s|$, so liegt der entsprechende Teil W_s^{3-i} der anderen Baumzerlegung (T, \mathcal{W}^{3-i}) ganz in deren nächstem Teil auf dem Weg Richtung t_{3-i} , d.h. es gilt $W_s^{3-i} \subset W_{s'}^{3-i}$ mit $ss' \in E(sTt_{3-i})$.

(W3) Es gibt ein $t_0 \in t_1 T t_2$ mit $|W_{t_0}^1|, |W_{t_0}^2| < |V_{t_0}|$.

Zu (W1): Dies folgt aus der bereits am Ende des letzten Abschnitts festgestellten Injektivität der Abbildung f_t^i .

Zu (W2): Aus Symmetriegründen ist es hinreichend, den Fall $i = 1$ zu betrachten. Sei also im Folgenden $s \in T$ mit $|W_s^1| = |V_s|$.

Zunächst sei festgestellt, dass $s \neq t_2$, dass es also den zu s nächsten Teil in Richtung t_2 gibt: Nach Definition von $W_{t_2}^1$ gilt $W_{t_2}^1 \setminus V_{t_2} \subset A \setminus X_2$ und $V_{t_2} \setminus W_{t_2}^1 \supset X_2 \setminus A$. Wegen $|A| < |X_2|$ folgt daher $|W_{t_2}^1| < |V_{t_2}|$.

Sei $v \in W_s^2$. Es bleibt zu zeigen, dass v auch im nächsten Teil in Richtung t_2 , also in $W_{s'}^2$ liegt. Es unterscheiden sich zwei Fälle: im ersten liegt v bereits im Ursprungsteil V_s , im zweiten nicht.

Für den ersten Fall ist also $v \in V_s \cap W_s^2$; wegen $v \in G^2$ reicht es dann zu zeigen, dass $v \in V_{s'}$: Aufgrund der Gleichheit $|W_s^1| = |V_s|$ ist offenbar f_s^1 nicht nur injektiv sondern auch surjektiv, d.h. v liegt entweder auch in W_s^1 und damit in A oder ist Bild einer Ecke $a \in W_s^1 \setminus V_s$ und liegt dann in $P_a \cap F^2$. In beiden Fällen liegt v also auf einem Weg P , der X_1 mit X_2 verbindet und V_t nur in v schneidet. Ist $v \in V_{t_2}$ so folgt wie gewünscht $v \in V_{s'}$ bereits aus (T3). Anderenfalls hat der Weg vP eine erste Kante vw , die nach (T2) in einem Teil $V_{t'}$ liegt. Da vP den Teil V_t nur in v trifft, gilt $s \notin t' T t_2$ (sonst müsste aufgrund des Trennungslemmas 2.2 auch wP eine Ecke in V_s haben). Der Nachbar s' von s auf $s T t_2$ liegt somit auch auf $s T t'$, und es folgt $v \in V_s \cap V_{t'} \subset V_{s'}$ mit (T3).

Betrachten wir nun den Fall $v \in W_s^2 \setminus V_s$. Nach Definition von W_s^2 ist dann $v =: a \in A$ und $s \in t(a) T t_1$. Gilt auch $s' \in t(a) T t_1$, so folgt $v = a \in W_{s'}^2$ wie gewünscht; wir nehmen daher $s' \notin t(a) T t_1$ an. Nach Definition von s' folgt daraus zunächst $s \in t_1 T t_2$ (da aus $s' \notin t(a) T t_1$, $s' \in s T t_2$ und $s \in t(a) T t_1$ folgt, dass $s T t_2 \cap t_1 T s = \{s\}$), und weiter, dass s in T den Knoten $t(a)$ von dem Weg $t_1 T t_2$ trennt (sonst wäre $s \notin t(a) T t_1$ oder $s' \in t(a) T t_1$). Wegen $a \notin V_s$ gilt dann mit (T3) auch $a \notin \bigcup_{t \in t_1 T t_2} V_t$. Wir konstruieren nun zur Vollendung des Beweises von (W2) einen neuen X_1 - X_2 -Trenner A' , dessen Existenz der Wahl von A mit möglichst vielen Ecken in $\bigcup_{t \in t_1 T t_2} V_t$ widerspricht.

Bezeichnet man mit B die Teilmenge von A , die in $W_s^1 \setminus V_s$ liegt, so gilt wegen der bereits eingesehenen Bijektivität von f_s^1 auch $|B| = |V_s \cap F^2|$. Daher gilt also mit $A' := (A \setminus B) \cup (V_s \cap F^2)$ die Gleichheit $|A'| = |A|$. Des Weiteren wird zumindest $a \in B \subset A$ durch eine Ecke aus $\bigcup_{t \in t_1 T t_2} V_t$ in A' ersetzt und alle anderen neuen Ecken von A' liegen ebenfalls in $V_s \subset \bigcup_{t \in t_1 T t_2} V_t$. Die konstruierte Menge A' hat also im Vergleich zu A wenigstens eine Ecke mehr in $\bigcup_{t \in t_1 T t_2} V_t$.

Bleibt zu zeigen, dass A' die Mengen X_1 und X_2 trennt. Nehmen wir also an, es gäbe einen X_1 – X_2 -Weg P , der A' vermeidet. Wegen der Trennungseigenschaft von A hat P eine Ecke mit $A \setminus A' = B$ gemein. Sei b die bezüglich P letzte Ecke, in der P die Menge B trifft, der Teilweg bP liegt damit in $F^2 \cup B$. Des Weiteren ist $b \notin V_s$ und $s \in t(b)Tt_2$. bP verbindet aber die beiden Teilen $V_{t(b)}$ und V_{t_2} und hat entsprechend des Trennungslemmas 2.2 eine Ecke mit V_s gemein, die damit auch in $V_s \cap (F^2 \cup B) = V_s \cap F^2 \subset A'$ enthalten ist. Widerspruch!

Zu (W3): Angenommen, (W3) gelte nicht, zu jedem $t \in t_1 T t_2$ wäre also einer der beiden Teile W_t^1 und W_t^2 so groß wie V_t . Wie wir zum Beginn des Beweises von (W2) sahen, ist $|W_{t_2}^1| < |V_{t_2}|$ und somit $|W_{t_2}^2| = |V_{t_2}|$; entsprechend ist $|W_{t_1}^1| = |V_{t_1}|$. Der Weg $t_1 T t_2$ enthält somit benachbarte Ecken x, y (in dieser Reihenfolge) mit $|W_x^1| = |V_x|$ und $|W_y^2| = |V_y|$.

Jede Ecke $v \in V_x \cap V_y$ aus F^2 liegt auf einem P_a ; diese a sind für verschiedene v verschieden und liegen selbst nicht in V_x , da f_x^1 bijektiv ist. Analog liegt jede Ecke $v \in V_x \cap V_y$ aus F^1 auf einem P_a ; diese a sind für verschiedene v verschieden und liegen selbst nicht in V_y , da f_y^2 bijektiv ist. Es bleibt zu zeigen, dass kein P_a die Menge $V_x \cap V_y$ sowohl in F^2 als auch in F^1 treffen kann: dann nämlich haben wir eine Injektion $V_x \cap V_y \rightarrow A$, mit Widerspruch zur Annahme $|A| < |V_x \cap V_y|$.

Nehmen wir also an, ein P_a träfe $V_x \cap V_y$ sowohl in $v_2 \in F^2$ als auch in $v_1 \in F^1$. Dann ist $f_x^1(a) = v_2$ und $f_y^2(a) = v_1$. Aus ersterem folgt $x \in t(a)Tt_2$ und damit auch $x \in t(a)Ty$; analog folgt aus zweiterem $y \in t(a)Tx$. Beide Bedingungen können aber nur mit $t(a) \in \{x, y\}$ erfüllt werden. Dies widerspricht $a \notin V_x \cup V_y$.

(R, \mathcal{W}) ist von echt kleinerer Größe als (T, \mathcal{V})

Die Eigenschaft (W2) nutzen wir im Folgenden aus, um die konstruierte Baumzerlegung (R, \mathcal{W}) noch wie folgt zu verändern: Für den Fall, dass sich ein Teil gemäß (W2) verhält, dass also für ein $s \in T$ und ein $i \in \{1, 2\}$ der Teil W_s^i im Teil $W_{s'}^i$ enthalten ist (mit $ss' \in E(sTt_i)$), kontrahiert man die Kante im Zerlegungsbaum R , die der Kante $ss' \in E(T^i)$ entspricht, und ordnet dem neu entstandenen Knoten den Teil $W_{s'}^i$ zu. Da alle anderen Teile unverändert bleiben, sieht man leicht, dass auch dies wieder eine Baumzerlegung von G ist.

Mit den Eigenschaften (W1)–(W3) lässt sich nun zeigen, dass die Größe der so veränderten Baumzerlegung (R, \mathcal{W}) tatsächlich kleiner ist als die von (T, \mathcal{V}) . Sei also $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Größe von (T, \mathcal{V}) und $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die von (R, \mathcal{W}) .

Nach (W3) gibt es ein $t_0 \in T$ mit $|W_{t_0}^1|, |W_{t_0}^2| < |V_{t_0}|$; wir betrachten ein solches t_0 mit maximalem $n_0 := |V_{t_0}|$. Für alle $t \in T$ mit $|V_t| > n_0$ hat nach (W1) dann einer der beiden neu konstruierten Teile W_t^1, W_t^2 die gleiche Größe wie V_t . Der andere tritt in (R, \mathcal{W}) nicht mehr auf und beeinflusst daher die Größe $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht. Es folgt $w_n = v_n$ für alle $n > n_0$ sowie $w_{n_0} < v_{n_0}$.

Damit ist die Größe von (R, \mathcal{W}) echt kleiner als die von (T, \mathcal{V}) ; ein Widerspruch zur Wahl von (T, \mathcal{V}) . Die Annahme, (T, \mathcal{V}) sei nicht starkschlank, ist also widerlegt und es folgt die Behauptung. \square

Literatur

- [1] Robin Thomas, *A Menger-like Property of Tree-Width – the Finite Case*, Journal of Combinatorial Theory (B), **48** (1990), S. 67–76
- [2] Reinhard Diestel, *Graph Theory, 2nd edition*, GTM 173, Springer-Verlag, 2000
- [3] Neil Robertson and P. D. Seymour, *Graph Minors IV. Tree-Width and Well-Quasi-Ordering*, Journal of Combinatorial Theory (B), **48** (1990), S. 227–254

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet zu haben.

Hamburg, den 12. Dezember 2000