

# Tangles auf triangulierten Flächen

von

Anna Geisler

Matrikelnummer

6944616

Bachelorarbeit im Studiengang Mathematik  
Universität Hamburg

25. November 2019

Erstgutachter: Prof. Dr. Reinhard Diestel

Zweitgutachter: Jakob Kneip

# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>Grundlagen zu Teilungssystemen und Tangles</b>	<b>5</b>
1.1	Abstrakte Teilungssysteme . . . . .	5
1.2	Der Tangle-Baum-Dualitätssatz . . . . .	6
1.3	Der Tangle-Baum-Satz . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Tangles auf Flächen</b>	<b>10</b>
2.1	Definitionen . . . . .	10
2.2	Eigenschaften . . . . .	11
2.3	Anwendung der Sätze . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Analyse der Tangles</b>	<b>16</b>
3.1	Ersetzung der Sterne . . . . .	16
3.2	Existenz der Tangles . . . . .	17
3.3	Zusammenhängende Teilungen . . . . .	20
3.4	Abhängigkeit von der Triangulierung . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Ausblick</b>	<b>25</b>

## 0 Einleitung

In der Graphentheorie gibt es viele Ansätze, um hochzusammenhängende Teile eines Graphen zu identifizieren. Dafür werden konkrete hochzusammenhängende Strukturen, wie der  $k$ -Block aus [6], eine Menge aus mindestens  $k$  Ecken, sodass keine zwei dieser Ecken durch Löschung von  $k$  Ecken getrennt werden können, definiert und untersucht. Um die Frage, für welche  $k \in \mathbb{N}$  wo im Graphen  $k$ -Blöcke existieren, zu beantworten, wird die Struktur des Graphen insgesamt untersucht. Robertson und Seymour verallgemeinerten die Idee solcher konkreten hochzusammenhängenden Strukturen mittels folgenden Konzepts: Für jede Teilung  $s$  kleiner Ordnung wird jeder hochzusammenhängende Teil  $H$  des Graphen auf einer Seite der Teilung liegen, da  $s$  zu kleine Ordnung hat, um  $H$  zu zerschneiden. Auf diese Art und Weise orientiert  $H$  also alle Teilungen kleiner Ordnung. Robertson und Seymour erkannten, dass die Art und Weise wie  $H$  diese Teilungen orientiert, alle wichtigen Informationen über  $H$  enthält und führten damit das Konzept des Tangles [7] ein. Ein Tangle ist eine Orientierung aller Teilungen kleiner Ordnung in konsistenter Weise, sodass je zwei Teilungen nie voneinander weg zeigen. Diese abstrakte Art und Weise, Tangles zu definieren, enthält dabei vorher betrachtete konkrete hochzusammenhängende Strukturen wie  $k$ -Blöcke als Spezialfälle.

Tangles erfassen jedoch auch Strukturen, die konkret schwer zu beschreiben sind. Bei einem  $k$ -Block lässt sich eine explizite Eckenmenge angeben, die schwer zu trennen ist. Anders ist es beispielsweise bei Gittern bzw. Gitterminoren. Jede Ecke eines Gitters kann durch Löschen ihrer Nachbarn mit einer Teilung kleiner Ordnung vom Gitter abgetrennt werden, global ist ein Gitter jedoch sehr stark zusammenhängend, d.h. Teilungen kleiner Ordnung können immer nur kleine Teile abtrennen. Dementsprechend orientiert ein Gitter alle Teilungen kleiner Ordnung und diese Struktur lässt sich durch Tangles gut beschreiben. Letztlich bieten Tangles damit einen Ansatz, um alle konkreten Ausprägungen von hochzusammenhängenden Unterstrukturen zu erfassen und zu untersuchen. Dafür kodieren wir mit der Wahl einer verbotenen Menge  $\mathcal{F}$  verschiedene Arten von konkreten  $\mathcal{F}$ -Tangles.

Mit der Abstraktion hin zu allgemeinen Tangles geht auch die Verallgemeinerung der untersuchten Systeme einher. Wenn ein Tangle nur die Information enthält, wie Teilungen kleiner Ordnung orientiert werden, setzt dies nicht explizit eine Graphenstruktur mit den standardmäßig gewählten Teilungen über die Kanten des Graphen voraus. Dementsprechend folgte auf das Konzept des abstrakten Tangles auch das Konzept von abstrakten Teilungssystemen. Damit können wir beinahe beliebige Mengen und Strukturen betrachten und auf ihnen Teilungen definieren. Dabei ist für die Tangles nur wichtig, wie die Teilungen in der Struktur zueinander liegen, d.h. wir brauchen eine partielle Ordnung. Die klassischen Orientierungen einer Teilung geben wir allgemein durch eine ordnungsumkehrende Involutionenfunktion wider.

Für konkrete hochzusammenhängende Strukturen  $H$  gab es bereits häufig Dualitätssätze folgender Form: Entweder enthält der Graph  $H$  oder wir finden eine baumähnliche Zerlegung des Graphen in kleine Teile. Ein nicht offensichtliches Ergebnis dieser Form lieferten Seymour und Thomas für Netze in einem Graphen [8]. Diese Dualitätssätze lassen sich auch abstrakt reproduzieren. Der Tangle-Baum-Dualitätssatz aus [2] zeigt mit nur wenigen Voraussetzungen an  $\mathcal{F}$  eine Dualität der obigen Form für  $\mathcal{F}$ -Tangles. Damit enthält er den erwähnten Dualitätssatz über Netze als Spezialfall.

Ein weiteres wichtiges Konzept in der Theorie der Tangles sind die Tangle-Baum-Sätze. Auch diese lassen sich abstrakt formulieren und abstrakt sogar auf verbesserte Art und Weise (kanonisch) beweisen. Hat man eine Menge von Tangles auf einer Struktur gefunden, so ist auch deren Verhältnis zueinander für die Erfassung der Gesamtstruktur von Bedeutung. Da wir Tangles

nur über orientierte Teilungen definiert haben, orientieren verschiedene Tangles auch immer mindestens eine Teilung unterschiedlich. Diese liegt dann zwischen den Tangles und unterscheidet sie somit. Der Tangle-Baum-Satz aus [3] liefert uns für passende Mengen von  $\mathcal{F}$ -Tangles eine minimale Menge von Teilungen, welche die Tangles auf besonders effiziente Weise trennt und dabei selber Baumstruktur hat. In diesem Tangle-Baum haben wir also eine Menge von Tangles als Ecken und eine Menge von Teilungen als Kanten dazwischen, welche die Tangles jeweils unterscheiden. Der Tangle-Baum ist damit ein wichtiges Werkzeug zur Untersuchung der Tangles.

Abstrakte Teilungssysteme und Tangles lassen sich also auch auf anderen Strukturen als Graphen untersuchen. In diesem Sinne wendet diese Arbeit die Konzepte auf zweidimensionale Flächen an und untersucht deren Form ohne geometrische Methoden. Dazu definieren wir geeignete Teilungssysteme auf Flächen, sowie verschiedene Mengen  $\mathcal{F}$  und untersuchen die entstehenden Tangles. Wir diskretisieren Flächen durch Triangulierung und wählen als Teilungen Bipartitionen der Gebietsmengen. Um verbotene Mengen aus  $\mathcal{F}$  zu bestimmen, greifen wir auf die geometrische Größe des Flächeninhalts zurück. Ein hochzusammenhängender Teil der Fläche kann nicht beliebig kleinen Flächeninhalt haben. Daraus folgend werden unsere verbotenen Mengen aus  $\mathcal{F}$  durch zu kleinen Flächeninhalt gekennzeichnet sein.

Wir gehen dabei wie folgt vor: Im ersten Kapitel stellen wir die benötigten Grundlagen zu abstrakten Teilungssystemen und dem Tangle-Baum-Dualitätssatz sowie dem Tangle-Baum-Satz zusammen. Dabei beziehen wir uns auf die Arbeiten [1], [2] und [3] und zitieren hauptsächlich dort definierte Konzepte in einer für unsere Zwecke zusammengestellten Form. In Kapitel zwei definieren wir konkrete Teilungssysteme auf Flächen und weisen nach, dass diese in sinnvoller Weise die Ergebnisse des ersten Kapitels umsetzen. Abschließend untersuchen wir im dritten Kapitel die erhaltenen Tangles auf ihre Eigenschaften und ihren Zusammenhang mit der geometrischen Form der Fläche. Insgesamt erhalten wir Tangles, deren Existenz durch hochzusammenhängende Teile der Fläche garantiert wird und die wir teilweise auch unabhängig von der gewählten Triangulierung finden können.

Diese Arbeit beruht inhaltlich auf dem Stoff eines Seminars von Prof. Reinhard Diestel im Wintersemester 2018/2019. Dort wurden die Grundlagen zu abstrakten Teilungssystemen und den zitierten Sätzen behandelt. Alle konkreten Definitionen im Bezug auf triangulierte Flächen wurden eigenständig erarbeitet und die Eigenschaften der Tangles abgeleitet.

Alle grundlegenden Notationen werden, soweit nicht anders gekennzeichnet, aus [4] und [1] übernommen. In Kapitel 3.4 werden topologische Grundbegriffe und Notationen vorausgesetzt. Alle Abbildungen wurden selbstständig erstellt.

# 1 Grundlagen zu Teilungssystemen und Tangles

## 1.1 Abstrakte Teilungssysteme

Dieses Kapitel klärt Grundbegriffe, die wir für die Arbeit mit Teilungssystemen brauchen. Eine (unorientierte) Teilung einer Menge  $V$  ist eine Menge  $\{A, B\}$  mit  $A, B \subseteq V$  und  $A \cup B = V$ . Jede Teilung hat genau zwei Orientierungen: Die geordneten Paare  $(A, B)$  und  $(B, A)$ . Die Involutionsfunktion  $*$  bildet jede orientierte Teilung auf ihr Inverses ab:  $(A, B)^* = (B, A)$ . Ist  $S$  eine Menge von Teilungen, so erhalten wir durch

$$(A, B) \leq (C, D) \Leftrightarrow A \subseteq C \text{ und } D \subseteq B$$

eine partiell geordnete Menge  $(\vec{S}, \leq, *)$  von orientierten Teilungen mit ordnungsumkehrender Involutionsfunktion, diese nennen wir Teilungssystem. Wir notieren Teilungen und ihre Inversen auch mit  $\vec{s}^* = \vec{\bar{s}}$ . Die Involutionsfunktion dreht dabei die Ordnung um:

$$(\vec{s} \leq \vec{r}) \Leftrightarrow (\vec{s}^* = \vec{\bar{s}} \geq \vec{\bar{r}} = \vec{r}^*).$$

Haben wir auf einem Teilungssystem  $\vec{U}$  zusätzlich zwei verknüpfende Funktionen  $\wedge$  und  $\vee$ , sodass je zwei Teilungen  $\vec{r}, \vec{s}$  ein Supremum  $\vec{r} \vee \vec{s}$  und ein Infimum  $\vec{r} \wedge \vec{s}$  in  $\vec{U}$  haben, so ist  $(\vec{U}, \leq, *, \wedge, \vee)$  ein Universum aus Teilungen. Wir möchten gern die Ordnung von Teilungen bestimmen und damit in irgendeinem Maße wiedergeben, wie stark die Teilung unsere Menge ‘‘zerschneidet’’. Dazu nutzen wir submodulare Ordnungsfunktionen:

**Definition 1.1.1.** Eine Funktion  $||$ , die jeder Teilung eines Universums  $\vec{U}$  eine nicht-negative Zahl zuordnet und für je zwei Teilungen  $\vec{r}, \vec{s} \in \vec{U}$  die Bedingung

$$|\vec{s}| = |\vec{\bar{s}}| \text{ und } |\vec{r}| + |\vec{s}| \geq |\vec{r} \wedge \vec{s}| + |\vec{r} \vee \vec{s}|$$

erfüllt, ist eine submodulare Ordnungsfunktion.

Die Ordnung einer unorientierten Teilung ist  $|s| := |\vec{s}| = |\vec{\bar{s}}|$ . Ist eine Ordnungsfunktion auf einem Universum  $\vec{U}$  gegeben, so bezeichnen wir die Menge aller orientierten Teilungen in  $\vec{U}$  mit Ordnung  $< k$  mit  $\vec{S}_k$ .

Wir stellen uns die Orientierung einer Teilung  $(A, B)$  so vor, dass die Teilung auf  $B$  und weg von  $A$  zeigt. Entsprechend der partiellen Ordnung stehen Teilungen untereinander in Relation. Zwei Teilungen sind geschachtelt, wenn sie vergleichbare Orientierungen in der partiellen Ordnung haben. Wir sagen,  $\vec{r}$  zeigt auf  $s$ , falls  $\vec{r} \leq \vec{s}$  oder  $\vec{r} \leq \vec{\bar{s}}$  gilt und im zweiten Fall zeigen die Teilungen  $\vec{r}$  und  $\vec{s}$  gegenseitig aufeinander. Entsprechend zeigt  $\vec{r}$  von  $s$  weg und für  $\vec{r} \leq \vec{s}$  zeigen beide Teilungen  $\vec{r}$  und  $\vec{s}$  voneinander weg. Sind zwei Teilungen nicht geschachtelt, sagen wir, sie kreuzen.

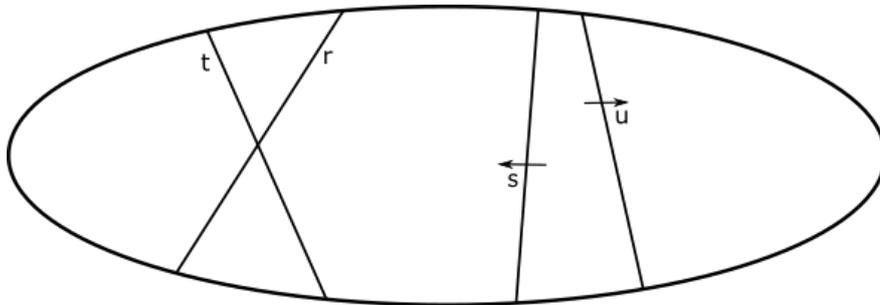


Abbildung 1: Die Teilungen  $r$  und  $t$  kreuzen;  $\vec{s}$  und  $\vec{u}$  zeigen voneinander weg;  $\vec{s}$  zeigt auf  $t, r$

Manche Teilungen, die laut Definition auftreten, helfen uns jedoch nicht beim Zerlegen der zugrundeliegenden Menge. So nennen wir eine Teilung  $s$  degeneriert, wenn  $\vec{s} = \bar{s}$  gilt. Eine Teilung  $s$  aus einem Teilungssystem  $\vec{S}$ , für die ein  $r \in S$  existiert, sodass sowohl  $\vec{s} < \vec{r}$  als auch  $\vec{s} < \bar{r}$  gilt, nennen wir trivial. Teilungen, für die  $\vec{s} \leq \bar{s}$  gilt, nennen wir klein. Dabei bildet die Menge der trivialen Teilungen eine Teilmenge der Menge der kleinen Teilungen.

**TODO:** gilt Bestimmte Konstellationen von orientierten Teilungen helfen uns besonders beim Zerlegen einer Menge. Teilungen, die in gewisser Weise alle auf einen gemeinsamen Teil der Menge zeigen, nennen wir Sterne:

**Definition 1.1.2.** Ein Stern ist eine Menge  $\sigma$  von nicht degenerierten orientierten Teilungen, die paarweise aufeinander zeigen, d.h. für je zwei Teilungen  $\vec{r}, \vec{s} \in \sigma$  gilt  $\vec{r} \leq \bar{s}$ .

Aus den je zwei Orientierungen einer Teilung wollen wir im Folgenden häufig genau eine aussuchen:

**Definition 1.1.3.** Eine Orientierung  $O$  eines Teilungssystems  $S$  ist eine Menge von orientierten Teilungen, sodass für alle  $s \in S$  genau eine der beiden Orientierungen  $\vec{s}, \bar{s}$  in  $O$  enthalten ist.

Dabei wollen wir die Teilungen mit System orientieren, sodass sie uns helfen, hochzusammenhängende Teile der Fläche zu identifizieren.

**Definition 1.1.4.** Eine Orientierung  $O$  eines Teilungssystems  $S$  heißt konsistent, wenn keine Orientierungen  $\vec{r}, \vec{s}$  von  $r \neq s \in S$  in  $O$  enthalten sind, sodass  $\vec{r} \leq \bar{s}$  gilt.

Anschaulich dürfen je zwei orientierte Teilungen in  $O$  nie voneinander weg zeigen.

Um hochzusammenhängende Strukturen zu identifizieren, nutzen wir konsistente Orientierungen und schränken diese noch etwas ein. Dafür definieren wir im Folgenden zwei verschiedene Konzepte, die in unserer späteren Anwendung sehr ähnlich sein werden.

**Definition 1.1.5.** Sei  $\vec{U}$  ein Universum. Ein Profil  $P$  ist eine konsistente Orientierung eines Teilungssystems  $\vec{S} \subseteq \vec{U}$ , sodass für alle  $\vec{r}, \vec{s} \in P$  das Infimum der Inversen  $\vec{r} \wedge \bar{s}$  nicht in  $P$  ist. Ein Profil heißt regulär, wenn es keine Inversen von kleinen Teilungen enthält.

Für das zweite Konzept des Tangles benötigen wir eine weitere Menge, die eine "verbotene" Menge darstellt. Sei  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\vec{U})$  eine Teilmenge der Potenzmenge von  $\vec{U}$ .

**Definition 1.1.6.** Ein  $\mathcal{F}$ -Tangle  $T$  ist eine konsistente Orientierung eines endlichen Teilungssystems  $S$ , die  $\mathcal{F}$  vermeidet, d.h. es gilt  $\mathcal{P}(T) \cap \mathcal{F} = \emptyset$ .

Form und Existenz der  $\mathcal{F}$ -Tangles hängen dabei stark vom gewählten  $\mathcal{F}$  ab. In diesem Sinne sind Profile auch Tangles, dafür wählen wir unser  $\mathcal{F}$  als die Menge der Tripel  $\{\vec{r}, \vec{s}, \vec{r} \wedge \bar{s}\}$ . Für die meisten Anwendungen wird  $\mathcal{F}$  allerdings als Menge von Sternen gewählt, da dies, wie wir noch sehen werden, eine der Voraussetzungen für Dualitätsbedingungen ist. Häufig und auch bei den späteren Definitionen dieser Arbeit, sind  $\mathcal{F}$ -Tangles für das gewählte  $\mathcal{F}$  gleichzeitig Profile.

## 1.2 Der Tangle-Baum-Dualitätssatz

Der folgende Satz beschäftigt sich mit der Frage, ob ein  $\mathcal{F}$ -Tangle existiert. Erfüllt die verbotene Menge  $\mathcal{F}$  bestimmte Voraussetzungen, so finden wir bei Nichtexistenz eines  $\mathcal{F}$ -Tangles

stets eine Zerlegung unserer Grundmenge mit einer bestimmten Struktur. Der Tangle-Baum-Dualitätssatz gibt mit dieser Struktur ein Zertifikat für die Nichtexistenz eines solchen Tangles an. Im Folgenden werden wir die nötigen Voraussetzungen für den Satz einführen und eine Präzisierung dieser Zerlegung angeben. Dabei werden Notation und Definitionen aus [2] übernommen. Sei dafür  $\vec{S}$  ein Teilungssystem in einem Universum  $\vec{U}$ . Wir möchten gerne die Struktur eines geschachtelten Teilungssystems beschreiben und nutzen dafür die Struktur von Bäumen.

**Definition 1.2.1.** Ein  $S$ -Baum ist ein Paar  $(T, \alpha)$ , wobei  $T$  ein Baum ist und  $\alpha$  eine Funktion von der Menge der orientierten Kanten  $\vec{E}(T)$  des Baums nach  $\vec{S}$ , die mit der Involution kommutiert, d.h. es gilt  $\alpha(\vec{e}) = \alpha(\vec{e})^*$  für alle  $\vec{e} \in \vec{E}(T)$ .

Für jede Ecke  $t \in T$  nennen wir die Menge  $\alpha(\vec{F}_t) = \{\alpha(\vec{e}) : \vec{e} \in \vec{F}_t\}$  assoziiert mit  $t$  in  $(T, \alpha)$ . Wenn die Mengen  $\alpha(\vec{F}_t)$  für alle  $t \in T$  Elemente einer Menge  $\mathcal{F}$  sind, so nennen wir  $(T, \alpha)$  einen  $S$ -Baum über  $\mathcal{F}$ .  $S$ -Bäume über  $\mathcal{F}$  sind dabei ein klares Zertifikat, dass kein  $\mathcal{F}$ -Tangle existiert. Die Teilungen bzw. Kanten im Baum müssten durch einen einen  $\mathcal{F}$ -Tangle orientiert werden. Dann finden wir im Baum eine Senke. Die zu dieser Ecke assoziierte Menge liegt dann im Tangle und aber gleichzeitig auch in  $\mathcal{F}$ . Dies ist ein Widerspruch und somit garantiert uns der  $S$ -Baum über  $\mathcal{F}$ , dass kein  $\mathcal{F}$ -Tangle existiert. Dass dies nicht nur in diese Richtung gilt, sondern eine allgemeine Dualitätsaussage ist, werden wir mit der Aussage des Tangle-Baum-Dualitätssatzes sehen.

Wir betrachten nun die Voraussetzungen an die verbotene Menge. Dafür sagen wir, eine Menge  $\mathcal{F}$  erzwingt eine Teilung  $\vec{s}$ , wenn  $\{\vec{s}\} \in \mathcal{F}$  ist.

**Definition 1.2.2.**  $\mathcal{F}$  ist standard für ein Teilungssystem  $\vec{S}$ , wenn es alle trivialen Teilungen in  $\vec{S}$  erzwingt.

Um die starke Dualität im Satz zu erreichen und konsistente Orientierungen in Form von  $\mathcal{F}$ -Tangles zu bekommen, müssen wir sicher stellen, dass bestimmte Shifts von einzelnen Teilungen und Sternen in  $\mathcal{F}$  wieder in  $\vec{S}$  liegen bzw. Sterne in  $\mathcal{F}$  induzieren.

**Definition 1.2.3.** Sei  $\vec{r} \in \vec{S}$  eine beliebige nicht-triviale, nicht-degenerierte Teilung und sei  $\vec{s}_0 \in \vec{S}$  mit  $\vec{r} < \vec{s}_0$ . Dann nennen wir die Abbildung

$$f \downarrow_{\vec{s}_0}^{\vec{r}}(\vec{s}) := \vec{s} \vee \vec{s}_0 \text{ und } f \downarrow_{\vec{s}_0}^{\vec{r}}(\vec{s}) := (\vec{s} \vee \vec{s}_0)^*$$

von  $\vec{S}_{\geq \vec{r}} = \{\vec{s} \in \vec{S} : \vec{s} \geq \vec{r}\}$  nach  $\vec{U}$  den Shift.

Wir stellen uns vor, dass wir alle Teilungen aus  $\vec{S}_{\geq \vec{r}}$  über  $\vec{s}_0$  shiften.

**Definition 1.2.4.** Eine Teilung  $\vec{s}_0 \in \vec{S}$  ahmt  $\vec{r} \in \vec{U}$  in  $\vec{S}$  nach, wenn  $\vec{s}_0 \geq \vec{r}$  gilt und für jedes  $\vec{s} \in \vec{S} \setminus \{\vec{r}\}$  mit  $\vec{s} \geq \vec{r}$  gilt, dass  $\vec{s}_0 \vee \vec{s} \in \vec{S}$ .

Eine Teilung  $\vec{s}_0 \in \vec{S}$  ahmt  $\vec{r} \in \vec{U}$  in  $\vec{S}$  für  $\mathcal{F}$  nach, wenn  $\vec{s}_0$  die Teilung  $\vec{r}$  in  $\vec{S}$  nachahmt und für jeden Stern  $\sigma \subseteq \vec{S}_{> \vec{r}} \setminus \{\vec{r}\}$  in  $\mathcal{F}$  mit einem Element  $\vec{s} \geq \vec{r}$  auch sein Shift  $f \downarrow_{\vec{s}_0}^{\vec{r}}$  in  $\mathcal{F}$  liegt.

Diese Voraussetzungen fassen wir nun im Begriff der Trennbarkeit zusammen:

**Definition 1.2.5.** Ein Teilungssystem  $\vec{S}$  ist durch  $\mathcal{F}$  trennbar, wenn für je zwei nicht-triviale, nicht-degenerierte Teilungen  $\vec{r}, \vec{r}' \in \vec{S}$ , die nicht durch  $\mathcal{F}$  erzwungen sind und  $\vec{r} \leq \vec{r}'$  erfüllen, ein  $s_0 \in S$  existiert, sodass  $\vec{s}_0$  genau  $\vec{r}$  und  $\vec{s}_0$  genau  $\vec{r}'$  in  $\vec{S}$  für  $\mathcal{F}$  nachahmt.

Mit diesen Definitionen können wir den starken Dualitätssatz formulieren:

**Satz 1.2.6.** (Starker Dualitätssatz aus [2])

Sei  $(\vec{U}, \leq, *, \wedge, \vee)$  ein Universum aus Teilungen und  $(\vec{S}, \leq, *)$  ein darin enthaltenes endliches Teilungssystem. Sei  $\mathcal{F} \subseteq 2^{\vec{U}}$  eine Menge von Sternen, die standard für  $\vec{S}$  ist. Wenn  $\vec{S}$  durch  $\mathcal{F}$  trennbar ist, gilt genau eine der folgenden Aussagen:

- (i) Es existiert ein  $\mathcal{F}$ -Tangle von  $S$ .
- (ii) Es existiert ein  $S$ -Baum über  $\mathcal{F}$ .

### 1.3 Der Tangle-Baum-Satz

Der Tangle-Baum-Satz beschäftigt sich mit der Unterscheidbarkeit von Profilen. Finden wir auf einer Menge mehrere Profile, so stellen wir uns vor, dass diese an verschiedenen Stellen der Menge liegen und daher durch eine Teilung dazwischen getrennt werden können. Wir werden sehen, dass diese Trennung sogar durch geschachtelte Mengen von Teilungen möglich ist. Im Folgenden führen wir die Anforderungen an die Profilmenge ein. Dafür nutzen wir Definitionen und die Notation aus [3].

**Definition 1.3.1.** Seien  $P$  und  $P'$  zwei Profile von Teilungssystemen  $\vec{S}, \vec{S}' \subseteq \vec{U}$ . Wir sagen, dass die Teilung  $s \in U$  die Profile unterscheidet, wenn  $s$  eine Orientierung hat, sodass  $\vec{s} \in P$  und  $\vec{s} \in P'$  liegen.

Wenn wir eine Ordnungsfunktion haben, nennen wir die kleinste Ordnung einer Teilung, welche die Profile trennt,  $\kappa(P, P')$ . Unterscheidet eine Teilung  $s$  die Profile  $P, P'$  und hat Ordnung  $\kappa(P, P')$ , so sagen wir, dass  $s$  die Profile effizient unterscheidet.

Als  $k$ -Profil in einem Universum  $\vec{U}$  mit submodularer Ordnungsfunktion bezeichnen wir ein Profil von  $S_k$ . Jedes  $n$ -Profil in  $\vec{U}$  induziert damit ein  $k$ -Profil in  $\vec{U}$  für  $k \leq n$ . Wir werden im Folgenden häufig nur Profil in  $\vec{U}$  schreiben und das explizite  $k$ , für das dies ein  $k$ -Profil ist, unterdrücken.

**Definition 1.3.2.** Ein Profil  $P$  ist  $n$ -robust, falls für alle  $\vec{r} \in P$  und alle  $s \in S_n$  gilt: Wenn sowohl  $\vec{r} \wedge \vec{s}$  als auch  $\vec{r} \wedge \vec{s}$  Ordnung  $< |r|$  haben, dann sind sie nicht beide in  $P$  enthalten. Eine Menge von Profilen  $\mathcal{P}$  ist robust, wenn je zwei Profile durch eine Teilung unterschieden werden und für  $n = \max\{\kappa(P, P') : P, P' \in \mathcal{P}\} + 1$  die induzierten  $\kappa(P, P') + 1$ -Profile von je zwei Profilen  $P, P'$  in  $\mathcal{P}$   $n$ -robust sind.

Die Profile in der Menge  $\mathcal{P}$  orientieren dabei möglicherweise durchaus unterschiedliche Grundmengen und sind damit  $k$ -Profile für verschiedene  $k \in \mathbb{N}$ .

Wir suchen eine Menge von Teilungen, die die Profile eines Universums effizient unterscheidet und dabei selbst geschachtelt ist.

**Definition 1.3.3.** Eine Baummenge ist ein geschachteltes Teilungssystem, das keine trivialen oder degenerierten Teilungen enthält.

Eine Baummenge ist regulär, wenn sie keine kleinen Teilungen enthält.

Der Satz liefert uns nun für robuste Mengen von Profilen eine solche Baummenge von Teilungen, die all diese Profile unterscheidet:

**Satz 1.3.4.** (Nicht-kanonischer Tangle-Baum-Satz für Universen aus Teilungen aus [3])  
 Sei  $(\vec{U}, \leq, *, \wedge, \vee, ||)$  ein submodulares Universum aus Teilungen. Für jede robuste Menge  $\mathcal{P}$  von regulären Profilen in  $\vec{U}$  existiert eine reguläre Baummenge  $T \subseteq \vec{U}$  aus Teilungen, sodass:

- (i) Je zwei Profile in  $\mathcal{P}$  werden durch eine Teilung in  $T$  effizient unterschieden;
- (ii) Keine echte Teilmenge von  $T$  unterscheidet  $\mathcal{P}$ ;
- (iii) Für jedes  $P \in \mathcal{P}$  setzt sich die Menge  $P \cap \vec{T}$  zu einer eindeutigen Orientierung  $P_T$  von  $T$  fort. Die Abbildung  $P \mapsto P_T$  von  $\mathcal{P}$  zu der Menge  $\mathcal{O}$  von konsistenten Orientierungen von  $T$  ist bijektiv.

## 2 Tangles auf Flächen

In diesem Kapitel wenden wir die oben besprochenen allgemeinen Konzepte und Sätze konkret auf Flächen an.

### 2.1 Definitionen

In dieser Arbeit betrachten wir zweidimensionale Flächen ohne Löcher, d.h. eine Fläche ist im Folgenden stets homöomorph zur Einheitskreisscheibe. Um diese graphentheoretisch zu untersuchen, müssen wir sie diskretisieren. Wir nutzen dazu Triangulierungen:

**Definition 2.1.1.** Sei eine Fläche mit Rand  $R$  gegeben. Die Triangulierung  $G$  dieser Fläche ist dann ein planarer Graph  $G = (V, E)$ , dessen Ecken auf  $R$  oder im Innern der Fläche liegen und dessen Gebiete Dreiecke sind.

Nun brauchen wir ein Teilungssystem auf diesen Dreiecksgraphen, das ein submodulares Universum bildet.

**Definition 2.1.2.** Eine Teilung  $(A, B)$  einer Triangulierung ist eine Bipartition der Gebietsmenge des Dreiecksgraphen. Wir bezeichnen die Menge aller solcher Teilungen mit  $\vec{U} = \vec{U}(G)$ .

Wir betrachten also Teilungen mit  $A \cap B = \emptyset$ . Beachte, dass eine Teilung auch einfach Gebiete aus der Mitte der Fläche ausschneiden kann und nicht zwingend einen einzelnen Schnitt durch die Fläche machen muss. In Kapitel 3.3 werden wir näher betrachten, wie wir die Teilungen anschaulicher gestalten können, sodass sie nur einen einzelnen Schnitt machen.

**Definition 2.1.3.** Für zwei Teilungen  $(A, B)$  und  $(C, D)$  einer Triangulierung sind ihr Supremum und Infimum in  $\vec{U}$  gegeben durch

$$(A, B) \vee (C, D) = (A \cup C, B \cap D)$$

,

$$(A, B) \wedge (C, D) = (A \cap C, B \cup D).$$

Um ein submodulares Universum zu erhalten, fehlt uns dann nur noch eine passende Ordnungsfunktion:

**Definition 2.1.4.** Sei  $l$  die Funktion, die jeder Kante des Graphen  $G = (V, E)$  seine geometrische Länge in der Fläche zuweist. Dann definieren wir die Ordnung einer Teilung  $(A, B)$  als die Summe der Längen aller Kanten  $e$ , die sowohl auf dem Rand eines Gebietes  $f_A$  in  $A$  als auch auf dem Rand eines Gebietes  $f_B$  in  $B$  liegen:

$$|(A, B)| := \sum_{\substack{e \in f_A \\ e \in f_B}} l(e)$$

Wir messen also die Länge des ‘‘Schnittes’’, mit dem wir die Fläche geteilt haben.

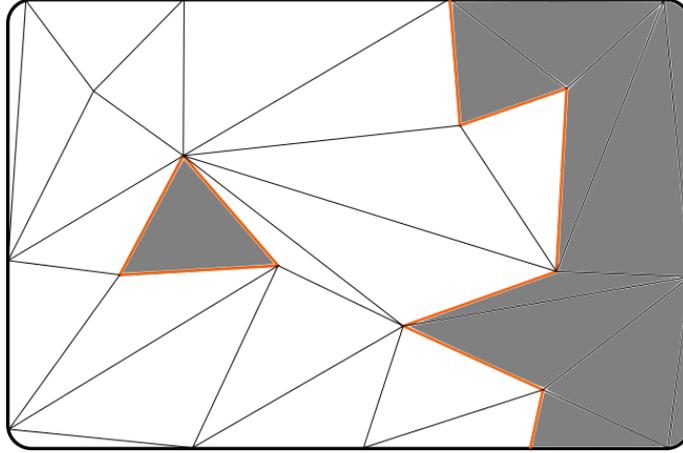


Abbildung 2: Eine Bipartition der Gebiete einer Triangulierung, rot eingefärbt sind alle Kanten, deren Länge in die Ordnung der Teilung eingeht

Um Tangles zu erhalten, müssen wir eine verbotene Menge festlegen. Wir werden dafür alle Sterne mit bis zu drei Teilungen wählen, deren Schnitt der rechten Seiten zu klein ist. Zuvor präzisieren wir, in welchem Sinne ein Schnitt zu klein sein kann.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei unsere Fläche so skaliert, dass sie Flächeninhalt 1 hat. Dann können wir jedem Dreiecksgebiet des Graphen seinen Flächeninhalt (relativ zur Gesamtfläche) zuweisen. Sei dann  $\mathcal{A}$  die Funktion, die jeder Vereinigung von Dreiecksgebieten die Summe der Flächeninhalte aller Gebiete in der Vereinigung zuordnet. Jede Seite einer Teilung ist eine solche Vereinigung von Dreiecksgebieten. Dasselbe gilt für Schnitte von Vereinigungen von Dreiecksgebieten, deren Fläche somit durch  $\mathcal{A}$  gemessen werden kann.

**Definition 2.1.5.** Sei

$$\mathcal{F} = \left\{ \text{Sterne } \sigma \subseteq \vec{U} : \sum_{s \in \sigma} |s| < 3 \cdot k \text{ und } \mathcal{A} \left( \bigcap_{(A,B) \in \sigma} B \right) < \frac{1}{m} \right\} \setminus \emptyset \subseteq \mathcal{P}(\vec{U})$$

für eine natürliche Zahl  $m > 1$ .

Nach Definition 1.1.6 ist ein Tangle der Fläche dann ein  $\mathcal{F}$ -Tangle von  $S_k$  für ein  $k \in \mathbb{N}$ , also eine konsistente Orientierung von  $S_k$ , die  $\mathcal{F}$  vermeidet. Diese bezeichnen wir künftig auch als  $k$ -Tangles.

## 2.2 Eigenschaften

Im Folgenden betrachten wir grundlegende Eigenschaften der oben definierten Objekte. Um unsere theoretische Vorarbeit nutzen zu können, zeigen wir, dass die Definitionen uns überhaupt ein Universum liefern, auf das wir die Sätze anwenden können.

**Lemma 2.2.1.** Für je zwei Teilungen in  $\vec{U}$  sind das Supremum und das Infimum wieder in  $\vec{U}$ .

*Beweis.* Vereinigung und Schnitte von Mengen bestehend aus Gebieten sind stets wieder Mengen von Gebieten. Aus  $A \cup B = V$  und  $A \cap B = \emptyset$  und den analogen Aussagen für  $(C, D)$  folgt:

$$(A \cup C) \cup (B \cap D) = V \text{ und } (A \cup C) \cap (B \cap D) = \emptyset.$$

Also ist das Supremum wieder in  $\vec{U}$  und analog auch das Infimum. □

Auch die definierte Ordnungsfunktion erfüllt die Eigenschaft der Submodularität.

**Lemma 2.2.2.** *Die Ordnungsfunktion  $||$  ist submodular.*

*Beweis.* Seien  $\vec{r} = (A, B)$  und  $\vec{s} = (C, D)$  zwei beliebige Teilungen aus  $\vec{U}$ . Für die Ordnung von Supremum und Infimum werden nur Kanten gezählt, die auch schon bei der Ordnung von  $\vec{r}$  oder  $\vec{s}$  eingingen. Wir zeigen, dass jede Kante, die sowohl in  $|\vec{r} \wedge \vec{s}|$  als auch in  $|\vec{r} \vee \vec{s}|$  gezählt wird, sowohl in  $|\vec{s}|$  als auch in  $|\vec{r}|$  eingeht. Sei also  $e$  eine Kante, die sowohl in  $|\vec{r} \wedge \vec{s}|$  als auch in  $|\vec{r} \vee \vec{s}|$  gezählt wird. Dann liegt  $e$  auf dem Rand von Gebieten aus  $A \cup C$  und  $B \cap D$ , sowie  $A \cap C$  und  $B \cup D$ . Jede Kante des Graphen liegt auf dem Rand von höchstens zwei Innengebieten. Dann liegt  $e$  auf dem Rand von Gebieten aus  $A$  und  $B$ , sowie  $C$  und  $D$  und geht somit sowohl in  $|\vec{s}|$  als auch in  $|\vec{r}|$  ein.  $\square$

Also ist  $\vec{U}$  ein submodulares Universum.

**Bemerkung 2.2.3.** In  $\vec{U}$  gibt es keine degenerierten Teilungen. Die einzige kleine bzw. triviale Teilung ist  $(\emptyset, V)$ .

Wie bereits angekündigt, sind für unser gewähltes  $\mathcal{F}$  die Tangles auch Profile.

**Lemma 2.2.4.**  *$\mathcal{F}$ -Tangles von  $\vec{S}_k$  sind reguläre Profile.*

*Beweis.* Sei  $T$  ein  $\mathcal{F}$ -Tangle und seien  $\vec{r}, \vec{s}$  beliebige Teilungen in  $T$ .

Sind  $r$  und  $s$  geschachtelt, ergeben sich drei Fälle: Falls  $\vec{r}$  und  $\vec{s}$  voneinander weg zeigen, widerspricht dies der Konsistenz von  $T$ . Falls sie aufeinander zeigen, ist die Menge  $\{\vec{r}, \vec{s}, \vec{r} \wedge \vec{s}\}$  ein Stern aus  $\mathcal{F}$  im Widerspruch zur Definition des Tangles. Sonst ist  $\vec{r} \wedge \vec{s} \in \{\vec{r}, \vec{s}\}$  und kann nicht in  $T$  liegen, da bereits  $\vec{r}$  und  $\vec{s}$  und damit nicht ihre Inversen in  $T$  liegen.

Falls  $r$  und  $s$  kreuzen, ist wegen der Submodularität auch eine der Winkelteilungen  $\vec{r} \vee \vec{s}$  oder  $\vec{r} \wedge \vec{s}$  in  $\vec{S}_k$ . Durch Vertauschen der Rollen von  $\vec{r}$  und  $\vec{s}$  können wir annehmen, dass  $\vec{r} \vee \vec{s}$  in  $\vec{S}_k$  liegt und damit eine ihrer Orientierungen in  $T$ . Wenn die Orientierung  $\vec{r} \vee \vec{s}$  in  $T$  liegt, ist dies ein Widerspruch zur Konsistenz mit  $\vec{s}$ . Also liegt  $\vec{r} \wedge \vec{s} = (\vec{r} \vee \vec{s})^*$  in  $T$ . Angenommen  $\vec{r} \wedge \vec{s}$  ist in  $T$ . Dann ist die Menge  $\{\vec{r}, \vec{r} \wedge \vec{s}, \vec{r} \vee \vec{s}\} \in \mathcal{F}$ , da ihr Schnitt der rechten Seiten Flächeninhalt 0 hat. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass  $T$  als Tangle  $\mathcal{F}$  vermeidet. Also kann  $\vec{r} \wedge \vec{s}$  nicht in  $T$  liegen und  $T$  ist ein Profil.

Da das Inverse  $(V, \emptyset)$  der einzigen kleinen Teilung  $(\emptyset, V)$  auf der rechten Seite Flächeninhalt 0 hat, liegt es in  $\mathcal{F}$  und somit nicht in  $T$ . Also enthält  $T$  keine Inversen von kleinen Teilungen und ist somit regulär.  $\square$

Daher werden wir im Folgenden sowohl Tangles, als auch Profile mit  $P$  bezeichnen.

## 2.3 Anwendung der Sätze

Wir möchten zeigen, dass die definierten Tangles die Theoreme aus Kapitel 2 erfüllen. Dazu beginnen wir mit dem Dualitätssatz. Wir haben bereits gesehen, dass  $\vec{U}$  ein submodulares Universum ist und betrachten darin alle Teilungen mit Ordnung  $\leq k$ . Diese bilden ein endliches Teilungssystem  $\vec{S}_k$  in  $\vec{U}$ . Das in 2.1.5 definierte  $\mathcal{F}$  ist eine Menge aus Sternen. Um Satz 1.2.6 anzuwenden, müssen wir also zeigen, dass  $\mathcal{F}$  standard für  $\vec{S}_k$  ist.

**Lemma 2.3.1.**  *$\mathcal{F}$  ist standard für  $\vec{S}_k$ .*

*Beweis.* Die einzige triviale Teilung in  $\vec{S}_k$  ist  $(\emptyset, V)$ . Die Menge  $\{(V, \emptyset)\}$ , die das Inverse enthält, ist in  $\mathcal{F}$ , da  $\mathcal{A}(\emptyset) = 0 < \frac{1}{m}$ . Also erzwingt  $\mathcal{F}$  die triviale Teilung und nach Definition gilt die Behauptung.  $\square$

Die zweite Voraussetzung der Trennbarkeit an unser Teilungssystem ist aufwändiger zu beweisen.

**Lemma 2.3.2.**  $\vec{S}_k$  ist durch  $\mathcal{F}$  trennbar.

*Beweis.* Seien  $\vec{r}$  und  $\vec{r}'$  zwei beliebige, nicht-degenerierte, nicht-triviale und nicht durch  $\mathcal{F}$  erzwungene Teilungen in  $\vec{S}_k$  mit  $\vec{r} \leq \vec{r}'$ . Wir wählen  $s_0 \in S$  mit minimaler Ordnung, sodass  $s_0$  eine Orientierung hat, sodass  $\vec{r} \leq \vec{s}_0 \leq \vec{r}'$  gilt. Sei nun  $\vec{s} \in \vec{S}_k \setminus \{\vec{r}\}$  mit  $\vec{s} \geq \vec{r}$  gegeben. Angenommen es gilt  $(\vec{s} \vee \vec{s}_0) \notin \vec{S}_k$ , d.h.  $|\vec{s} \vee \vec{s}_0| \geq k$ . Dann ist aber  $|\vec{s} \vee \vec{s}_0| < |s_0|$  wegen der Submodularität der Ordnungsfunktion im Widerspruch zur Minimalität von  $s_0$ . Also ahmt  $\vec{s}_0$  die Teilung  $\vec{r}$  in  $\vec{S}_k$  nach. Analog ahmt auch  $\vec{s}_0$  die Teilung  $\vec{r}'$  in  $\vec{S}_k$  nach.

Sei  $\sigma \subseteq \vec{S}_{\geq \vec{r}} \setminus \{\vec{r}\} \in \mathcal{F}$  mit einem Element  $\vec{s}_1 \geq \vec{r}$ . Wir zeigen, dass der Shift von  $\sigma$  ebenfalls in  $\mathcal{F}$  liegt. Seien  $\vec{s}_1 = (A, B)$ ,  $\vec{s}_2 = (C, D)$ ,  $\vec{s}_3 = (E, F)$ , ...,  $\vec{s}_n$  die Elemente von  $\sigma$ . Sei  $\vec{s}_0 = (G, H)$  wie oben. Dann ist der Shift von  $\sigma$  durch: Da  $|\sigma| \leq 3$ , seien  $\vec{s}_1 = (A, B)$ ,  $\vec{s}_2 = (C, D)$ ,  $\vec{s}_3 = (E, F)$  die Elemente von  $\sigma$ . Sei  $\vec{s}_0 = (G, H)$  wie oben. Dann ist der Shift von  $\sigma$  durch

$$f \downarrow_{\vec{s}_0}^{\vec{r}} (\vec{s}_1) = \vec{s}_1 \vee \vec{s}_0 \text{ und } f \downarrow_{\vec{s}_0}^{\vec{r}} (\vec{s}_i) = (\vec{s}_i \vee \vec{s}_0)^* \text{ für } i \in \{2, 3, \dots, n\}$$

gegeben. Daher

$$f \downarrow_{\vec{s}_0}^{\vec{r}} (\vec{s}_1) = (A \cup G, B \cap H) \text{ und } f \downarrow_{\vec{s}_0}^{\vec{r}} (\vec{s}_2) = (C \cap H, G \cup D) \text{ und } f \downarrow_{\vec{s}_0}^{\vec{r}} (\vec{s}_3) = (E \cap H, G \cup F)$$

und analog für die weiteren Teilungen.

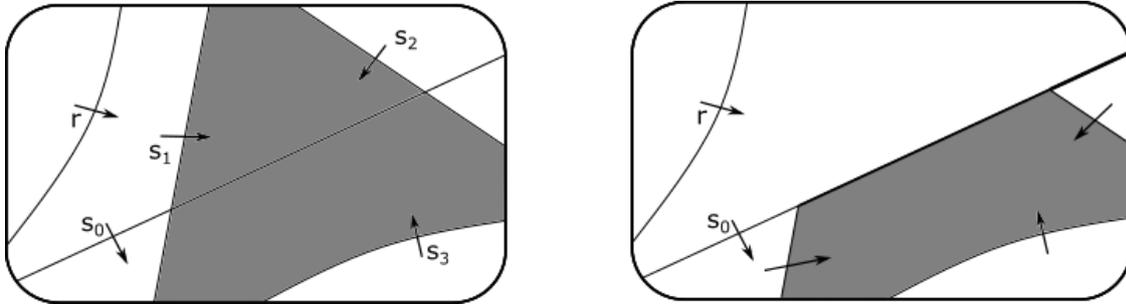


Abbildung 3: Der Stern  $\sigma$  und sein Shift über  $\vec{s}_0$

Auch der Shift ist wieder ein Stern. Der Schnitt der rechten Seiten des Shifts ist nicht größer als vor dem Shift. Außerdem erhöht Shiften über  $\vec{s}_0$  die Ordnung einer Teilung nicht: Angenommen es gilt  $|\vec{s}_i \vee \vec{s}_0| > |\vec{s}_i|$ , dann ist aufgrund der Submodularität  $|\vec{s}_i \vee \vec{s}_0| < |s_0|$  im Widerspruch zur Minimalität von  $s_0$ . Da  $\sigma$  in  $\mathcal{F}$  lag, gilt dies also auch für den Shift und  $\vec{s}_0$  ahmt  $\vec{r}$  in  $\vec{S}_k$  für  $\mathcal{F}$  nach. Analog ahmt auch  $\vec{s}_0$  die Teilung  $\vec{r}'$  in  $\vec{S}_k$  für  $\mathcal{F}$  nach.  $\square$

Nun haben wir alle Voraussetzungen für den Dualitätssatz zusammen.

**Satz 2.3.3.** Für  $k \in \mathbb{N}$  gilt genau eine der folgenden Aussagen:

- (i) Es existiert ein  $\mathcal{F}$ -Tangle von  $S_k$ .

(ii) Es existiert ein  $S_k$ -Baum über  $\mathcal{F}$ .

*Beweis.* Nach Lemma 2.2.1 und 2.2.2 ist  $\vec{U}$  ein submodulares Universum.  $\vec{S}_k$  ist ein darin enthaltenes endliches Teilungssystem. Nach Lemma 2.3.1 ist es standard für  $\mathcal{F}$  und mit Lemma 2.3.2 ist  $\vec{S}_k$   $\mathcal{F}$ -trennbar. Dann gilt nach 1.2.6 die Behauptung.  $\square$

Falls kein  $\mathcal{F}$ -Tangle existiert, finden wir also einen  $S_k$ -Baum, also einen Baum aus Teilungen, der unsere Fläche so zerlegt, dass der induzierte Stern an jeder Ecke des Baums einen Flächeninhalt höchstens  $\frac{1}{m}$  hat.

Im Folgenden betrachten wir den Tangle-Baum-Satz. Wir haben bereits gesehen, dass  $\mathcal{F}$ -Tangles auch Profile sind. Die Voraussetzung der Robustheit bleibt zu überprüfen. Da jeder  $k$ -Tangle auch einen  $l$ -Tangle für  $l \leq k$  induziert, können wir die Menge der maximalen Tangles betrachten, also die Menge der  $k$ -Tangles für maximales  $k$ :

**Definition 2.3.4.** Sei eine triangulierte Fläche gegeben. Die zugehörige Menge der maximalen  $\mathcal{F}$ -Tangles enthält alle  $\mathcal{F}$ -Tangles der Fläche, die nicht von einem  $\mathcal{F}$ -Tangle höherer Ordnung induziert werden. Wir bezeichnen diese Menge mit  $\mathcal{P}$ .

Da wir den Tangle-Baum-Satz gerne auf diese Menge der maximalen Tangles anwenden möchten, überprüfen wir im Folgenden ihre Robustheit. Tatsächlich sind erfüllt die Menge sogar mehr als in der Definition von Robustheit gefordert und wir zeigen daher folgende stärkere Aussage:

**Lemma 2.3.5.** Seien  $P$  ein beliebiger  $\mathcal{F}$ -Tangle,  $\vec{r} \in P$  und  $s$  eine Teilung (beliebiger Ordnung), die  $\vec{r}$  kreuzt. Dann liegen nicht sowohl  $\vec{r} \wedge \vec{s}$  als auch  $\vec{r} \wedge \vec{s}$  in  $P$ .

*Beweis.* Angenommen es liegen sowohl  $\vec{r} \wedge \vec{s}$  als auch  $\vec{r} \wedge \vec{s}$  in  $P$ . Dann ist die Menge  $\{\vec{r} \wedge \vec{s}, \vec{r} \wedge \vec{s}, \vec{r}\} \in \mathcal{F}$ , da ihr Schnitt der rechten Seiten Flächeninhalt 0 hat. Da  $P$  ein  $\mathcal{F}$ -Tangle ist, ist dies ein Widerspruch.  $\square$

Diese Behauptung gilt auch über die geforderten Ordnungen in der Definition von Robustheit hinaus.

**Korollar 2.3.6.**  $\mathcal{P}$  ist robust.

*Beweis.* Seien  $P, P'$  zwei beliebige  $\mathcal{F}$ -Tangles in  $\mathcal{P}$ . Sei  $P$  ein  $k$ -Tangle und  $P'$  ein  $n$ -Tangle. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $n \geq k$ . Dann induziert  $P'$  einen  $k$ -Tangle. Diese beiden Tangles werden durch eine Teilung in  $\vec{S}_k$  unterschieden. Diese Teilung unterscheidet auch  $P$  und  $P'$ .

Für den von  $P$  induzierten  $(\kappa(P, P') + 1)$ -Tangle gilt nun das Lemma 2.3.5 und dieser ist robust für beliebiges  $n$ . Dies impliziert die Behauptung.  $\square$

Damit können wir den Satz anwenden.

**Satz 2.3.7.** Für die Menge  $\mathcal{P}$  der maximalen Tangles einer Fläche, existiert eine reguläre Baummenge  $T \subseteq \vec{U}$ , sodass:

- (i) Je zwei Tangles in  $\mathcal{P}$  durch eine Teilung in  $T$  effizient unterschieden werden;
- (ii) Keine echte Teilmenge von  $T$  die Menge  $\mathcal{P}$  unterscheidet;

(iii) Für jedes  $P \in \mathcal{P}$  sich die Menge  $P \cap \vec{T}$  zu einer eindeutigen Orientierung  $P_T$  von  $T$  fortsetzt. Die Abbildung  $P \mapsto P_T$  von  $\mathcal{P}$  zu der Menge  $\mathcal{O}$  von konsistenten Orientierungen von  $T$  ist bijektiv.

*Beweis.* Nach Lemma 2.2.1 und 2.2.2 ist  $\vec{U}$  ein submodulares Universum. Nach Lemma 2.2.4 und Lemma 2.3.6 ist die Menge  $\mathcal{P}$  von maximalen  $\mathcal{F}$ -Tangles eine robuste Menge von regulären Profilen. Daraus folgt mit 1.3.4 die Behauptung.  $\square$

Damit haben wir eine geschachtelte, minimale Menge von Teilungen, welche die maximalen Tangles einer Fläche effizient unterscheidet. Statt der Menge der maximalen Tangles hätten wir auch nur die Menge der  $\mathcal{F}$ -Tangles von  $\vec{S}_k$  betrachten können. Diese Menge ist allein aufgrund der Profileigenschaft robust und wir finden auch für ein festes  $k$  eine effizient unterscheidende Baummenge.

### 3 Analyse der Tangles

Im folgenden Kapitel werden wir versuchen, die gefundenen Tangles zu erweitern und zu analysieren. Dazu werden wir unsere verbotene Menge  $\mathcal{F}$  verändern und Bedingungen für die Existenz von Tangles untersuchen. Schlussendlich betrachten wir die Abhängigkeit der Tangles von der gewählten Triangulierung.

#### 3.1 Ersetzung der Sterne

In der Definition unserer Menge  $\mathcal{F}$  haben wir bisher Sterne bis zur Größe 3 mit zu kleinem Flächeninhalt verboten. Im Folgenden werden wir diese Bedingung auflockern und beliebige Mengen von Teilungen bis zur Größe 3 mit zu kleinem Flächeninhalt verbieten. Während die betrachteten Sätze die Struktur von Sternen als essentielle Voraussetzung brauchten, werden wir sehen, dass die hier betrachteten Tangles auf Flächen sich nicht ändern, wenn wir die Sterne ersetzen.

**Definition 3.1.1.** Sei

$$\mathcal{F}' = \left\{ \sigma \subseteq \vec{U} : |\sigma| < 4 \text{ und } \mathcal{A}\left( \bigcap_{(A,B) \in \sigma} B \right) < \frac{1}{m} \right\} \setminus \emptyset \subseteq \mathcal{P}(\vec{U})$$

für eine natürliche Zahl  $m > 1$ .

Unser ursprüngliches  $\mathcal{F}$  ist Teilmenge dieser Menge, sodass jeder  $\mathcal{F}'$ -Tangle auch ein  $\mathcal{F}$ -Tangle ist. Wir zeigen im Folgenden, dass auch die Umkehrung gilt:

**Lemma 3.1.2.** *Die Menge der  $\mathcal{F}$ -Tangles von  $S_k$  ist gleich der Menge von  $\mathcal{F}'$ -Tangles von  $S_k$ .*

*Beweis.* Sei  $O$  eine konsistente Orientierung von  $S_k$ , die ein  $\sigma \in \mathcal{F}'$  enthält. Wir zeigen, dass  $O$  dann auch einen Stern aus  $\mathcal{F}$  enthält.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist  $\sigma$  eine Antikette, denn falls  $\sigma \in \mathcal{F}'$  vergleichbare Elemente enthält, d.h. falls es  $\vec{r}, \vec{t} \in \sigma$  mit  $\vec{r} \leq \vec{t}$  gibt, setzen wir  $\sigma' = \sigma \setminus \vec{r}$  und erhalten eine neue verbotene Menge aus  $\mathcal{F}'$ . Falls zwei Teilungen in  $\sigma$  kreuzen, seien diese  $\vec{r}, \vec{s}$ . Da unser Universum submodular ist, muss eine der Winkelteilungen ebenfalls von  $O$  orientiert worden sein, daraus ergeben sich vier Fälle:

- (1) Falls  $\vec{r} \vee \vec{s} \in O$ , erhalten wir einen Widerspruch zur Konsistenz von  $O$  mit  $\vec{r}$ .
- (2) Falls  $\vec{r} \wedge \vec{s} \in O$ , setzen wir  $\sigma' = \sigma \setminus \vec{r} \cup \{\vec{r}'\}$  mit  $\vec{r}' = \vec{r} \wedge \vec{s}$  (siehe Abbildung 4 unten).
- (3) Falls  $\vec{r} \vee \vec{s} \in O$ , erhalten wir einen Widerspruch zur Konsistenz von  $O$  mit  $\vec{s}$ .
- (4) Falls  $\vec{r} \wedge \vec{s} \in O$ , setzen wir  $\sigma' = \sigma \setminus \vec{s} \cup \{\vec{s}'\}$  mit  $\vec{s}' = \vec{r} \wedge \vec{s}$  (siehe Abbildung 4 unten).

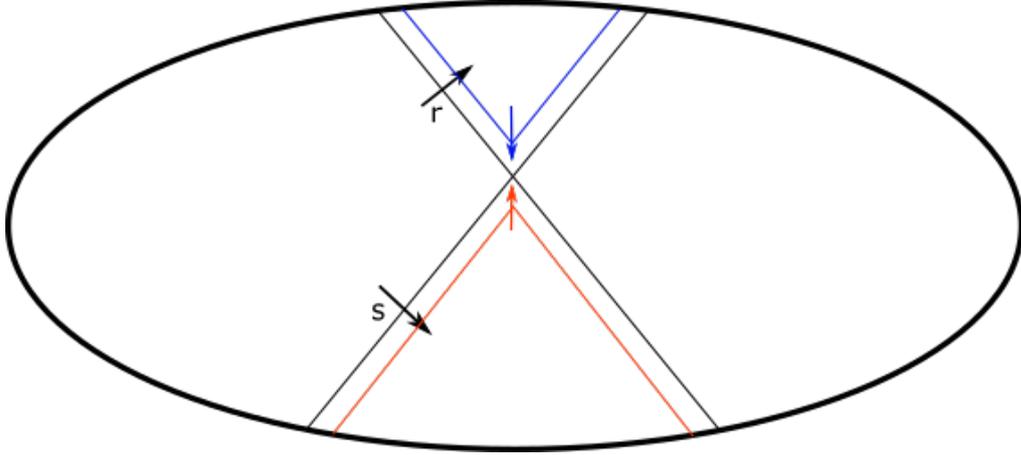


Abbildung 4: Ersetzung der kreuzenden Teilungen: in Fall 2 ersetzen wir  $\vec{r}$  durch die rote Teilung, in Fall 4 ersetzen wir  $\vec{s}$  durch die rote Teilung

Bei unseren Veränderungen an  $\sigma$  haben wir die kreuzenden Teilungen durch geschachtelte ersetzt. Außerdem sind die neuen Teilungen  $\vec{r}'$  bzw.  $\vec{s}'$  mit allen Teilungen geschachtelt, mit denen die Teilung, die sie ersetzen, schon geschachtelt war: Sei dazu  $\vec{t} \in \sigma$  eine Teilung, die mit  $\vec{r}$  geschachtelt ist. Falls  $\vec{r} \leq \vec{t}$ , so ist auch  $\vec{r}' \leq \vec{t}$ . Andernfalls ist  $\vec{t}$  vergleichbar mit  $\vec{r}$  im Widerspruch zur Annahme, dass  $\sigma$  eine Antikette ist. Analog ergibt sich dies für  $\vec{s}'$ .

Bei allen vorgenommenen Ersetzungen oder Löschungen hat sich der Flächeninhalt des Schnitts der rechten Seiten nicht verändert. Insgesamt erhalten wir also eine Menge  $\sigma' \in \mathcal{F}'$ , die höchstens so viele Elemente enthält wie  $\sigma$  und eine geschachtelte Antikette ist. Da es in  $U$  keine degenerierten Teilungen gibt, muss  $\sigma'$  aber schon ein Stern sein und liegt somit auch in  $\mathcal{F}$ . Jede  $\mathcal{F}$  vermeidende Orientierung vermeidet also auch  $\mathcal{F}'$ , was die Behauptung impliziert.  $\square$

Wir können im Folgenden beliebige Mengen von höchstens drei Teilungen betrachten und müssen uns nicht auf Sterne konzentrieren.

### 3.2 Existenz der Tangles

Um unsere Fläche zu charakterisieren, möchten wir idealerweise eine endliche Menge von Tangles erhalten, welche die Struktur der Fläche wiedergeben. Eine Möglichkeit, die Zahl der Tangles von oben zu beschränken, wäre der Nachweis, dass jeder Tangle  $P$  in gewissem Sinne einen Mindestflächeninhalt hat.

Eine Möglichkeit, unsere verbotene Menge dafür zu nutzen, ergibt sich über die Baummenge aus Satz 2.3.7. Anschaulich stellen wir uns  $T$  als Baum vor, die  $\mathcal{F}$ -Tangles sitzen in den Ecken des Baumes und werden durch die Teilungen, die durch die Kanten der Baummenge repräsentiert werden, unterschieden. An jeder Ecke bilden die anliegenden Teilungen einen Stern, deren Schnitt der rechten Seiten eine gewisse Größe hat. Falls der Grad an dieser Ecke des Baums höchstens 3 ist, garantiert uns dies einen Mindestflächeninhalt von  $\frac{1}{m}$ . Für höhere Grade ist dies jedoch mit unserem  $\mathcal{F}$ , das nur Mengen bis Grad 3 verbietet, unklar. Alternativ können wir also in unserer Menge  $\mathcal{F}$  beliebig viele Teilungen zulassen:

**Definition 3.2.1.** Es sei

$$\mathcal{F}_\infty = \left\{ \text{Sterne } \sigma \subseteq \vec{U} : \mathcal{A} \left( \bigcap_{(A,B) \in \sigma} B \right) < \frac{1}{m} \right\} \setminus \emptyset \subseteq \mathcal{P}(\vec{U})$$

für eine natürliche Zahl  $m > 1$ .

Die Argumentation des vorigen Unterkapitels funktioniert dabei genauso für  $\mathcal{F}_\infty$ , d.h. auch hier ändert sich die Menge der Tangles nicht, wenn wir in der Definition von  $\mathcal{F}_\infty$  statt Sternen beliebige Mengen zulassen.

Wenn wir  $\mathcal{F}_\infty$  verwenden, können wir jedem Tangle einen Mindestflächeninhalt zuweisen. Dies ist völlig unabhängig von der gewählten Triangulierung und hängt allein von der Wahl von  $m$  ab.

**Lemma 3.2.2.** *Für jede Fläche ist die Kardinalität der Menge der maximalen  $\mathcal{F}_\infty$ -Tangles beschränkt.*

*Beweis.* Analog zu Lemma 2.3.6 ist auch die Menge der maximalen  $\mathcal{F}_\infty$ -Tangles robust und wir können Satz 1.3.4 anwenden und erhalten eine minimale Baummenge, die die Tangles effizient unterscheidet. In jeder Ecke dieser Baummenge liegt genau ein Tangle und die anliegenden Kanten bilden einen Stern aus Teilungen.

Sei  $P$  ein maximaler  $k$ -Tangle und  $P'$  ein maximaler  $n$ -Tangle mit  $n \geq k$ , die durch eine Teilung  $s$  der Baummenge effizient unterschieden werden. Dann induziert  $P'$  einen  $k$ -Tangle, für den eine Teilung  $s$  aus  $S_k$  existiert, die ihn von  $P$  unterscheidet. Damit unterscheidet  $s$  aber auch  $P$  und  $P'$ . Da wir eine Teilung gefunden haben, die mit Ordnung  $< k$  die beiden Tangles unterscheidet, muss dies auch für den effizienten Unterscheider in der Baummenge gelten. Also ist der anliegende Stern eines maximalen  $k$ -Tangles stets Teilmenge von  $S_k$ . Der Schnitt der rechten Seiten der Teilungen im Stern ist größer als  $\frac{1}{m}$ , da ihre Orientierung  $\mathcal{F}_\infty$  vermeidet. Wir können also jeden Tangle mit der Fläche dieses Schnitts der rechten Seiten der anliegenden Teilungen aus der Baummenge identifizieren. Je zwei dieser mit den Tangles identifizierten Flächen sind disjunkt, da sie auf verschiedenen Seiten einer Bipartition der Gesamtfläche liegen. In die Fläche passen für  $m > 1$  nur beschränkt viele Flächenstücke der Größe mindestens  $\frac{1}{m}$ . Entsprechend ist auch die Zahl der Tangles, die wir mit solchen Flächenstücken identifizieren können, beschränkt.  $\square$

**Bemerkung 3.2.3.** Alternativ hätten wir als Voraussetzung auch Maximalgrad 3 der Baummenge aus Satz 1.3.4 bei Nutzung unseres ursprünglichen  $\mathcal{F}$  statt der Nutzung von  $\mathcal{F}_\infty$  wählen können.

Leider existieren bei der Nutzung von  $\mathcal{F}_\infty$  die Tangles für feinere Triangulierungen recht schnell nicht mehr:

**Beispiel 3.2.4.** Sei  $G$  eine Triangulierung einer Fläche, sodass wir für gegebenes  $k \in \mathbb{N}$  einzelne Gebiete mit Teilungen der Ordnung  $k$  ausschneiden können, d.h. jedes Gebiet habe eine Randlänge kleiner als  $k$ . Sei  $F$  die Menge der Gebiete von  $G$ . Für jedes Gebiet  $a \in F$ , dessen Flächeninhalt kleiner als  $\frac{1}{m}$  ist, müsste die Teilung  $(\{a\}, F \setminus \{a\})$  in einem Tangle  $P$  dann in dieser Orientierung von  $\{a\}$  weg zeigen, um  $\mathcal{F}_\infty$  zu vermeiden. Sobald die Triangulierung so fein ist, dass jedes Gebiet Flächeninhalt kleiner als  $\frac{1}{m}$  hat, muss  $P$  alle Teilungen der obigen Form enthalten. Diese bilden aber eine Menge in  $\mathcal{F}_\infty$ , sodass für solche Triangulierungen keine Tangles mehr existieren.

Trotz der Unklarheit über die Zahl der Tangles im Allgemeinen spiegeln diese durchaus die Form der Fläche wider. Hochzusammenhängende Teile der Fläche geben uns Tangles, d.h. sie bilden eine hinreichende Bedingung für die Existenz von Tangles. Ein hochzusammenhängendes Gebiet der Fläche identifizieren wir durch Hineinlegen einer Kreisscheibe von hinreichender Größe. Dies wollen wir kurz geometrisch betrachten:

**Bemerkung 3.2.5.** (aus [5])

Für gegebenen Umfang einer Fläche realisiert der Kreis den höchsten Flächeninhalt.

Diesen Fakt setzen wir als allgemein bekannt voraus. Wir wollen nun betrachten, wie viel wir von einem Kreis mit einem Schnitt der Länge höchstens  $k$  maximal abschneiden können.

**Lemma 3.2.6.** *Für einen Schnitt der Länge höchstens  $k \in \mathbb{N}$  und einen Kreis mit Durchmesser größer als  $k$  ist der Flächeninhalt der Fläche, die wir durch den Schnitt vom Kreis abschneiden können, beschränkt.*

*Beweis.* Falls der Schnitt den Rand des Kreises nicht trifft, so schneidet er ein Gebiet aus dem Inneren aus und mit der Bemerkung oben ist dies höchstens ein Kreis mit Umfang  $k$  und daher Flächeninhalt  $\frac{k^2}{4\pi}$ . Falls der Schnitt den Kreis in einem Punkt  $Q$  berührt, so kann er dann nur in einem in den Kreis gerichteten Halbkreis mit höchstens Radius  $k$  um  $Q$  herum den Kreis zerschneiden. Dieser Halbkreis hat dann höchstens den Flächeninhalt  $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot k^2$ . Dies ist eine obere Schranke wie in der Behauptung.  $\square$

Diese Schranke ist nicht optimal, aber sie reicht, um den Flächeninhalt, den mehrere Schnitte der Länge höchstens  $k$  abschneiden, zu begrenzen. Da unsere Teilungen auch an mehreren Stellen durch die Fläche schneiden können, müssen wir dieses Ergebnis noch etwas erweitern.

**Korollar 3.2.7.** *Für eine Menge von  $l \in \mathbb{N}$  Teilungen der Ordnung höchstens  $k \in \mathbb{N}$  und einen Kreis mit Durchmesser größer als  $k$  ist der Flächeninhalt der Fläche, die die Teilungen vom Kreis abschneiden, beschränkt.*

*Beweis.* Ein Schnitt der Länge höchstens  $k$  kann nach dem Lemma höchstens eine Fläche von  $f(k) = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot k^2$  abschneiden. Sei  $\lambda \in (0, 1)$ . Dann ist  $f(\lambda \cdot k) + f((1 - \lambda) \cdot k) \leq f(k)$ . Dies gilt nach der Jensen-Ungleichung für jede Aufteilung eines Schnittes der Länge höchstens  $k$  in endlich viele Teilschnitte. Also schneidet eine Teilung aus  $S_k$  höchstens eine Fläche von  $f(k)$  ab. Eine Menge aus  $l \in \mathbb{N}$  vielen Teilungen aus  $S_k$  schneidet damit höchstens eine Fläche von  $l \cdot f(k)$  ab.  $\square$

Im Folgenden sei  $W_k$  der maximale Flächeninhalt, den wir mit einer Teilung der Ordnung  $k$  von einer Kreisscheibe abschneiden können.

**Satz 3.2.8.** *In jeder Fläche, in die wir eine Kreisscheibe mit Flächeninhalt  $3 \cdot W_k + \frac{1}{m}$  legen können, finden wir einen  $\mathcal{F}$ -Tangle von  $S_k$ .*

*Beweis.* Wir spiegeln die Idee des Kreises als hochzusammenhängenden Teil der Fläche wider, indem wir alle Teilungen in  $S_k$  so orientieren, dass sie auf den Kreis zeigen. Sei dazu  $K$  eine Kreisscheibe mit Flächeninhalt  $3 \cdot W_k + \frac{1}{m}$ . Formal definieren wir eine Orientierung  $P$  von  $S_k$ , indem wir für jede Teilung  $(A, B) \in S_k$  prüfen, ob der Flächeninhalt in  $A \cap K$  oder  $B \cap K$  größer ist und entsprechend auf  $A$  oder  $B$  zeigend orientieren.

Dies ist wohldefiniert, da der Flächeninhalt von  $K$  nach 3.2.7 zu groß ist, um ihn mit einem Schnitt der Länge  $k$  gleichmäßig aufzuteilen. Die entstehende Orientierung ist konsistent: Angenommen zwei Teilungen zeigen voneinander weg, so sind ihre rechten Seiten disjunkt, in diesen liegt aber jeweils mehr als die Hälfte von  $K$ , was ein Widerspruch ist.

Seien drei beliebige, orientierte Teilungen aus  $P$  gegeben. Die linken Seiten enthalten nach Definition von  $W_k$  jeweils höchstens einen  $W_k$  großen Anteil von  $K$ . Demnach liegt auf der rechten Seite jeweils mindestens ein  $2 \cdot W_k + \frac{1}{m}$  großer Anteil von  $K$ . Dann hat aber der Schnitt der rechten Seiten stets mindestens Flächeninhalt  $\frac{1}{m}$ . Also vermeidet die Orientierung  $\mathcal{F}$ .  $\square$

Dieser Satz liefert uns damit auch mehrere Tangles auf einer Fläche. An jeder Stelle, an der wir einen Kreis in die Fläche legen können, wählen wir einen solchen maximal und erhalten je nach Größe einen Tangle der entsprechenden Ordnung. Ob die verschiedenen Kreisscheiben auch verschiedene Tangles geben, hängt dabei maßgeblich von der Triangulierung ab. Nur genau dann, wenn eine Teilung der Triangulierung existiert, die von beiden Kreisscheiben unterschiedlich orientiert wird im obigen Sinne, erhalten wir auch verschiedene Tangles. Die Teilung unterscheidet dann sowohl die Kreisscheiben, als auch die zugehörigen Tangles. Für eine ausreichend feine Triangulierung, in der je zwei maximale Kreisscheiben unterscheidbar sind, erhalten wir also eine Menge von Tangles mit gleicher Kardinalität wie die Anzahl dieser maximalen Kreisscheiben.

### 3.3 Zusammenhängende Teilungen

Betrachten wir die Definition unseres Universums und unserer verbotenen Menge doch einmal genauer. Um die Fläche zu charakterisieren, erscheint es anschaulicher nur Schnitte zu betrachten, welche die Fläche einmal von Rand zu Rand zerschneiden. Wir könnten alternativ nur solche Teilungen  $(A, B)$  betrachten, für die der Graph auf der Vereinigung der Kanten, die sowohl auf dem Rand eines Gebietes in  $A$  als auch auf dem Rand eines Gebietes in  $B$  liegen, ein  $R$ -Weg ist. Leider bilden solche Teilungen kein Universum:

**Beispiel 3.3.1.** Seien  $r, s \in S_k$  wie in der Abbildung unten. Hierbei ist der Graph auf der Vereinigung der Kanten, die sowohl auf dem Rand eines Gebietes in  $A$  als auch auf dem Rand eines Gebietes in  $B$  liegen jeweils ein  $R$ -Weg. Allerdings sind die Winkelteilungen, die das Infimum bzw. Supremum bilden, keine Teilungen, für die dies gilt. Also können solche Teilungen kein Universum bilden.

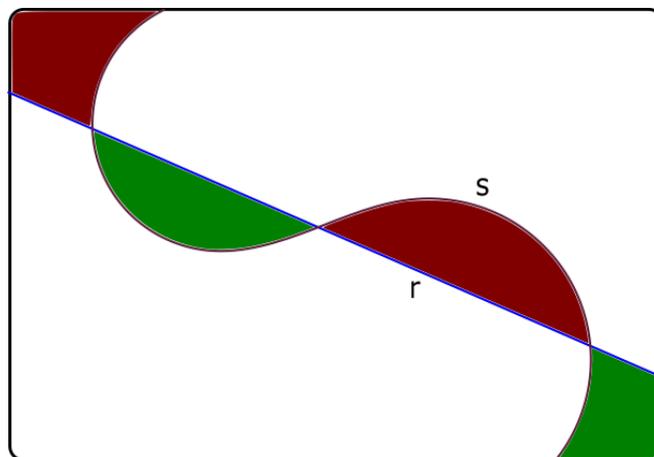


Abbildung 5: Die eingefärbten Winkelteilungen schneiden einzelne Gebiete aus der Fläche aus

Trotzdem können wir die Teilungen etwas anschaulicher als Schnitte gestalten. In unserer Definition einer Teilung als Bipartition der Gebiete können die Gebiete völlig willkürlich auf die Seiten der Teilung verteilt sein. In unserer Vorstellung sollte eine Teilung unsere Fläche aber eher in genau zwei große Gebiete zerteilen. Um dies wiederzugeben, definieren wir zusammenhängende Teilungen:

**Definition 3.3.2.** Eine Teilung  $(A, B)$  ist zusammenhängend, wenn die Vereinigung der Gebiete in  $A$  bzw.  $B$  jeweils zusammenhängend ist.

Ein gutes Beispiel für die Anschaulichkeit zusammenhängender Teilungen ist die erhaltene Baummenge aus 2.3.7. Hier stellen wir uns die Teilungen, welche die Tangles unterscheiden, automatisch zusammenhängend vor. Formal ist dies aber nicht klar. Wie Beispiel 3.3.1 zeigt, bilden auch die zusammenhängenden Teilungen kein Universum oder submodulares Teilungssystem und wir können den Tangle-Baum-Satz nicht direkt anwenden. Trotzdem ist unsere Intuition nicht falsch und wir erhalten nur zusammenhängende Teilungen in der Baummenge dank folgender Beobachtungen.

Jede unzusammenhängende Teilung hat auf einer ihrer Seiten mehrere Zusammenhangskomponenten. Jede dieser Zusammenhangskomponenten lässt sich auch einzeln vom Rest der Fläche trennen:

**Definition 3.3.3.** Sei  $F$  die Menge der Gebiete einer Triangulierung,  $(A, B)$  eine unzusammenhängende Teilung dieser Triangulierung und sei  $\mathcal{K}$  die Menge der Zusammenhangskomponenten der Vereinigung der Gebiete aus  $A$  bzw. aus  $B$ . Dann nennen wir die Menge  $\{\{K, F \setminus K\} : K \in \mathcal{K}\}$  die Menge der (unorientierten) prinzipiellen Teilung von  $(A, B)$ .

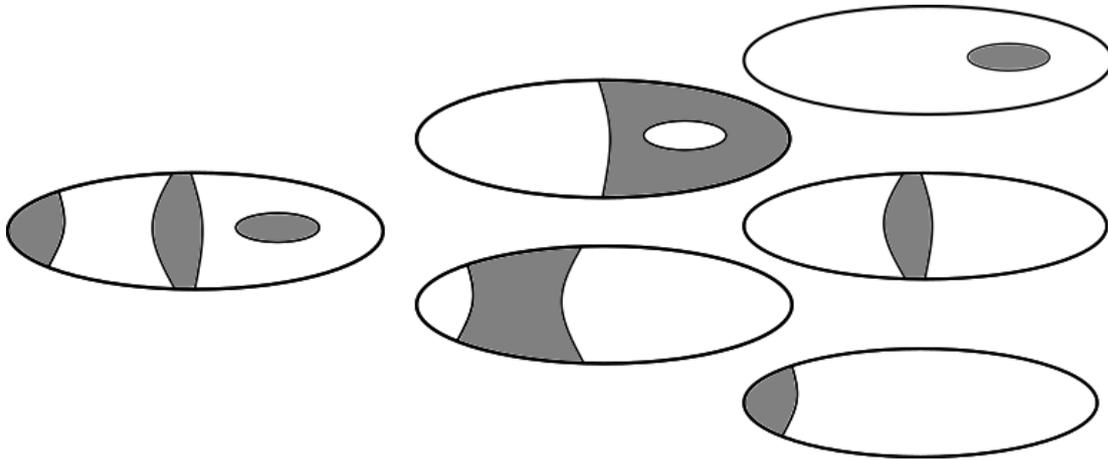


Abbildung 6: Eine auf beiden Seiten unzusammenhängende Teilung (links) und ihre prinzipiellen Teilungen

**Bemerkung 3.3.4.** Für eine unzusammenhängende Teilung in  $S_k$  sind auch ihre prinzipiellen Teilungen wieder in  $S_k$ .

Damit können wir nun die Teilungen aus der Baummenge betrachten.

**Lemma 3.3.5.** *Eine Teilung  $\vec{s} = (A, B)$ , die zwei  $\mathcal{F}$ -Tangles  $P, P'$  einer Triangulierung effizient unterscheidet, ist stets zusammenhängend.*

*Beweis.* Sei  $P$  der Tangle, der  $(B, A)$  enthält und  $P'$  der Tangle, der  $(A, B) = \vec{s}$  enthält. Sei  $F$  die Menge der Gebiete der Triangulierung. Angenommen die Vereinigung der Gebiete in  $B$  hat mehrere Zusammenhangskomponenten. Sei  $K$  eine dieser Zusammenhangskomponenten. Wir betrachten die Teilungen  $\vec{t} = (B \setminus K, A \cup K)$  und  $\vec{r} = (K, F \setminus K)$ , wobei  $r$  die zu  $K$  gehörende prinzipielle Teilung ist.

Beide Teilungen haben echt kleinere Ordnung als  $s$  und werden also von  $P$  und  $P'$  orientiert. Da sowohl  $\vec{t} \leq (B, A)$ , als auch  $\vec{r} \leq (B, A)$  in der partiellen Ordnung gilt, muss  $P$  beide in

der angegebenen Orientierung enthalten, um Konsistenz zu gewährleisten. Dann gilt dies aber auch für  $P'$ , da wir sonst eine unterscheidende Teilung geringerer Ordnung gefunden hätten, im Widerspruch zur Effizienz von  $s$ . Dann enthält  $P'$  die Menge  $\{\vec{t}, \vec{r}, \vec{s}\}$ . Der Schnitt der rechten Seiten dieser Teilungen ist allerdings leer, sodass die Menge in  $\mathcal{F}$  liegt im Widerspruch zur Definition des Tangles.

Analog kann auch  $A$  nicht unzusammenhängend sein. Also ist  $\vec{s}$  zusammenhängend.  $\square$

Die Teilungen unserer Baummenge unterscheiden nach Satz 2.3.7 die Tangles effizient. Also sind sie nach dem obigen Lemma tatsächlich alle zusammenhängend.

Ähnlich wie bei der Ersetzung der Sterne durch Mengen wollen wir nun zeigen, dass unsere Menge an Tangles sich nicht verändert, wenn wir unser Teilungssystem auf zusammenhängende Teilungen einschränken. Sei dazu

$$S_k' = \{\text{zusammenhängende Teilungen der Ordnung } < k\}.$$

Da  $S_k' \subseteq S_k$ , induziert jeder  $\mathcal{F}$ -Tangle von  $S_k$  einen  $\mathcal{F}$ -Tangle von  $S_k'$ . Da aber nach dem Lemma oben auch je zwei Tangles von  $S_k$  durch eine Teilung von  $S_k'$  unterschieden werden, induzieren verschiedene  $S_k$ -Tangles auch immer verschiedene  $S_k'$ -Tangles. Aber auch umgekehrt können wir die Tangles von  $S_k'$  erweitern, wenn wir  $\mathcal{F}_\infty$  nutzen:

**Lemma 3.3.6.** *Jeder  $\mathcal{F}_\infty$ -Tangle  $P'$  von  $S_k'$  lässt sich zu einem  $\mathcal{F}_\infty$ -Tangle  $P$  von  $S_k$  erweitern, sodass  $P$  wieder  $P'$  induziert.*

*Beweis.* Sei  $P'$  ein  $\mathcal{F}_\infty$ -Tangle von  $S_k'$ . Sei  $P$  eine maximale konsistente Erweiterung von  $P'$ , die  $\mathcal{F}_\infty$  vermeidet und sei  $\vec{s} = (A, B) \in S_k$  maximal mit  $\vec{s} \notin P$  und  $\bar{\vec{s}} \notin P$ . Dann ist  $s$  eine nicht zusammenhängende Teilung.

Falls  $B$  mehrere Zusammenhangskomponenten hat und eine der zugehörigen prinzipiellen Teilungen in  $P$  noch nicht orientiert wäre, würde diese der Maximalität von  $\vec{s}$  widersprechen. Also sind bereits alle prinzipiellen Teilungen der  $B$ -Seite in  $P$  orientiert. Falls mehrere davon auf ihre jeweilige Zusammenhangskomponente zeigen, ist dies ein Widerspruch zur Konsistenz von  $P$ . Falls genau eine auf ihre Zusammenhangskomponente zeigt, so orientieren wir  $s$  auf  $B$  zeigend, sonst auf  $A$  zeigend.

Falls die Vereinigung der Gebiete in  $B$  zusammenhängend ist, hat  $A$  mehrere Zusammenhangskomponenten und jede der prinzipiellen Teilungen ist zusammenhängend, da  $B$  zusammenhängend ist. Also sind alle prinzipiellen Teilungen bereits in  $P'$  orientiert. Falls mehrere davon auf ihre jeweilige Zusammenhangskomponente zeigen, ist dies ein Widerspruch zur Konsistenz von  $P$ . Falls genau eine auf ihre Zusammenhangskomponente zeigt, so orientieren wir  $s$  auf  $A$  zeigend, sonst auf  $B$  zeigend, analog wie oben.

Die von uns gewählte Orientierung von  $s$  ist dann konsistent mit allen bisher orientierten Teilungen: Falls eine Teilung inkonsistent mit  $s$  wäre, wäre sie dies auch mit einer bereits orientierten prinzipiellen Teilungen oder  $P$  hätte nicht  $\mathcal{F}_\infty$  vermieden. Außerdem haben beliebige Schnitte von rechten Seiten von Mengen von Teilungen nicht kleineren Flächeninhalt als vor den Ersetzungen, sodass wir weiterhin  $\mathcal{F}_\infty$  vermeiden. Also lassen sich alle Teilungen in  $S_k$  so orientieren und wir erhalten mit  $P$  einen  $\mathcal{F}_\infty$ -Tangle von  $S_k$ , der  $P'$  induziert.  $\square$

Wir finden also eine Bijektion zwischen den  $\mathcal{F}_\infty$ -Tangles von  $S_k$  und  $S_k'$  und können damit sogar eine Baummenge finden, die die  $\mathcal{F}_\infty$ -Tangles von  $S_k'$  mit zusammenhängenden Teilungen effizient unterscheidet wie in Theorem 2.3.7. Allgemein bilden die zusammenhängenden Teilungen aber nach Beispiel 3.3.1 kein Universum und wir können die Sätze nicht direkt anwenden.

### 3.4 Abhängigkeit von der Triangulierung

Bisher sind unsere Tangles stark von der gewählten Triangulierung abhängig. Eine feste Fläche können wir auf verschiedene Weisen triangulieren, manche Unterteilungen geben die Struktur genauer wieder als andere, d.h. sie sind feiner:

**Definition 3.4.1.** Seien  $G$  und  $G'$  zwei Triangulierungen einer Fläche. Dann heißt  $G'$  feiner als  $G$  genau dann, wenn jedes Gebiet von  $G'$  Teilmenge eines Gebietes von  $G$  ist.

Wir sagen auch:  $G'$  verfeinert  $G$ .

Der Vorteil bei der Nutzung von Triangulierungen ist, dass wir sie strukturiert verfeinern können:

**Bemerkung 3.4.2.** Für je zwei Triangulierungen  $G$  und  $G'$  einer Fläche, existiert eine weitere Triangulierung  $G''$ , die beide verfeinert.

Um das zu sehen, legen wir  $G$  und  $G'$  übereinander auf die Fläche und fügen an jeder Schnittstelle von einer Kante von  $G$  und einer Kante von  $G'$  zusätzliche Ecken ein und ergänzen mit Kanten bis wir wieder einen Dreiecksgraphen haben, der beide verfeinert.

Finden wir in einer feineren Triangulierung einen Tangle, so induziert dieser ebenfalls jeweils einen Tangle in jeder gröberen Triangulierung. Umgekehrt ist diese Aussage allerdings falsch, da ein Tangle auch einfach von einer sehr groben Triangulierung kommen kann. Trotzdem hilft uns diese Struktur, etwas über Tangles in beliebig feinen Triangulierungen auszusagen. Dazu nutzen wir eine Verallgemeinerung des Unendlichkeitslemmas von König, für die wir einige Begriffe aus [4] einführen.

Es sei  $(P, \leq)$  eine direkte partiell geordnete Menge, d.h. für alle  $p, q \in P$  existiert ein  $r \in P$ , sodass  $p \leq r$  und  $q \leq r$  gilt. Für alle  $p \in P$  sei  $X_p$  ein kompakter Hausdorff-Raum. Es seien stetige Abbildungen  $f_{qp} : X_q \rightarrow X_p$  für  $q > p$  gegeben, die im folgenden Sinne kompatibel sind: Für  $r > q > p$  gelte  $f_{qp} \circ f_{rq} = f_{rp}$ . Dann nennen wir die Familie  $\mathcal{X} = (X_p : p \in P)$  zusammen mit den Abbildungen ein inverses System. Die Menge aller  $(x_p : p \in P)$  mit  $f_{qp}(x_q) = x_p$  für alle  $q > p$  nennen wir den inversen Limes von  $\mathcal{X}$ .

**Satz 3.4.3.** (aus [4] Lemma 8.8.1)

*Falls  $X_p \neq \emptyset$  für alle  $p \in P$ , so ist auch  $X$  nicht leer.*

Dies wollen wir nun auf unsere Tangles anwenden:

**Satz 3.4.4.** *Falls es für jede Triangulierung einer Fläche mindestens einen  $\mathcal{F}$ -Tangle gibt, so existiert eine Wahl eines  $\mathcal{F}$ -Tangle zu jeweils jeder Triangulierung, sodass jeder gewählte Tangle zu einer Triangulierung von jedem gewählten Tangle jeder Verfeinerung induziert wird.*

*Beweis.* Sei  $P$  die Menge aller möglichen Triangulierungen der Fläche. Nach Bemerkung 3.4.2 ist diese Menge bezüglich Verfeinerung eine direkte partiell geordnete Menge. Für jedes  $p \in P$  sei  $X_p$  die Menge der Tangles auf dieser Triangulierung. Für eine feste Triangulierung ist diese Menge endlich, da für einen endlichen Graphen die Anzahl der möglichen Bipartitionen der Gebiete endlich ist. Demnach können wir  $X_p$  mit der diskreten Topologie ausstatten und erhalten damit jeweils einen kompakten Hausdorffraum. Für  $p < q$  ist also die Triangulierung für die Tangles in  $X_q$  feiner als die der Tangles in  $X_p$ . Jeder Tangle in  $X_q$  induziert also einen Tangle in der Triangulierung von  $X_p$ . Dies nutzen wir, als Abbildungen  $f_{qp} : X_q \rightarrow X_p$ , indem wir jeden Tangle aus  $X_q$  auf den von ihm induzierten Tangle aus  $X_p$  abbilden. Induzieren ist dabei im

obigen Sinne kompatibel und es gilt für  $r > q > p$ , dass  $f_{qp} \circ f_{rq} = f_{rp}$ . Da wir die diskrete Topologie gewählt haben, sind die Abbildungen außerdem stetig und wir erhalten ein inverses System. Nach dem Satz 3.4.3 ist nun der inverse Limes nicht leer, falls alle  $X_p \neq \emptyset$  sind, was nach Voraussetzung gilt.

Jedes Element des inversen Limes ist dabei eine Wahl eines  $\mathcal{F}$ -Tangle zu jeweils jeder Triangulierung wie in der Behauptung.  $\square$

Für die Anwendung des Lemmas mussten wir sicherstellen, dass für jede Triangulierung ein Tangle existiert. Die Elemente des inversen Limes sind dann echte Tangles, die unabhängig von der Triangulierung existieren. Diese echten Tangles sind für beliebig feine Triangulierungen zu finden und wir können sie wirklich die Tangles der Fläche ohne Bezug auf die Triangulierung nennen.

## 4 Ausblick

Wir haben viele Eigenschaften und eine hinreichende Bedingung für die Existenz von Tangles auf einer Fläche untersucht. Offen ist dabei, wie sich die Anzahl der Tangles mit höherer Feinheit der Triangulierung verhält und ob die Anzahl der Tangles der Fläche für eine beliebig feine Triangulierung konvergiert. Eine Möglichkeit dafür ergibt sich wie in Satz 3.2.2 über die Baummenge. Für unser ursprüngliches  $\mathcal{F}$  erhalten wir nur an Ecken von Maximalgrad 3 eine untere Schranke für den Flächeninhalt des Schnitts der rechten Seiten der anliegenden Teilungen. Offen bleibt also möglicherweise eine Untersuchung der Baummenge auf ihre Struktur und die Anzahl solcher Ecken. Wir haben die Anzahl der Tangles nur für  $\mathcal{F}_\infty$  beschränken können und gleichzeitig festgestellt, dass die Tangles dann häufig nicht mehr existieren. Der nächste Schritt für diese Betrachtungen wäre das Finden notwendiger Bedingungen für die Existenz der Tangles oder sogar eine 1-zu-1-Charakterisierung derselben.

Zweidimensionale Flächen sind nur ein mögliches Anwendungsgebiet für Tangles aus vielen. Zweidimensionale Strukturen lassen sich im Allgemeinen auch geometrisch erfassen. Die Theorie der Tangles auf diesen Flächen bildet jedoch die Grundlage für Untersuchungen auf höherdimensionalen Flächen mit Löchern. Eine Nutzung der in dieser Arbeit verwendeten Ansätze für solche höherdimensionalen Objekte erscheint naheliegend.

## Literatur

- [1] R. Diestel. Abstract separation systems. *Order*, 35:157-170, 2018
- [2] R. Diestel, S. Oum. Tangle-tree duality in abstract separation systems. *Combinatorica*, 39:879, 2019
- [3] R. Diestel, F. Hundertmark, S. Lemanczyk. Profiles of separations: in graphs, matroids and beyond. *Combinatorica*, 39:37, 2019
- [4] Reinhard Diestel *Graph Theory* Springer Verlag 2016, Fünfte Auflage
- [5] A. Siegel. A Historical Review of the Isoperimetric Theorem in 2-D and its place in Elementary Plane Geometry. <https://cs.nyu.edu/faculty/siegel/SCIAM.pdf>
- [6] J. Carmesin, R. Diestel, M. Hamann, F. Hundertmark.  $k$ -blocks: a connectivity-invariant for graphs. *SIAM J. Discrete Math.*, 28:1876-1891, 2014
- [7] N. Robertson, P. Seymour. Graph minors. X. Obstructions to tree-decomposition. *J. Combin. Theory Ser. B*, 52:153-190, 1991
- [8] P. Seymour, R. Thomas. *Graph searching and a min-max theorem for tree-width*. *J. Combin. Theory Ser. B*, 58:22-33, 1993

## Eidesstattliche Versicherung

Ich versichere hiermit an Eides statt, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel - insbesondere keine im Quellenverzeichnis nicht benannten Internet-Quellen - benutzt habe. Ich versichere ebenfalls, dass ich die Arbeit vorher nicht in einem anderen Prüfungsverfahren eingereicht habe und dass die eingereichte schriftliche Fassung der auf dem elektronischen Speichermedium entspricht.

Hamburg, den 25.11.2019