Hamburger Beiträge zur Mathematik

Nr. 274, Juni 2007

Ernst Kleinert

Mathematik, Schrift und Kalkül

Mathematik, Schrift und Kalkül

(Vortrag zur Tagung „Literalität und Liminalität II“, Regensburg 2007)

Das Thema „Mathematik und Schrift“, oder, wie man ebensogut sagen könnte, „Mathematik und Sprache“ [1)], ist ein weites Feld. Seine schulmäßige Bearbeitung hätte zu beginnen mit der Frage „Was ist Mathematik?“ Heute weiß jeder, daß Mathematik mehr ist als eine Wissenschaft von „Zahlen und Figuren“, wie man noch im 19.Jahrhundert lesen konnte (als es auch schon falsch war). Eine formale Auskunft ist leicht zu geben: Mathematik liegt überall da, und nur da vor, wo ein Gegenstandsbereich *ordine geometrico,* und das heißt nach axiomatischer Methode behandelt wird. Fragt man weiter, welche Gegenstandsbereiche sachgemäß so zu behandeln sind, könnte die – wiederum formale – Antwort lauten: alle, die sich genügend scharf fassen und abgrenzen und deren Mitglieder genügend klare Gesetzmäßigkeiten erkennen lassen; darüber hinaus sollte so etwas wie ein konstruktiv-deduktives Potential vorhanden sein. Was für Bereiche diese Kriterien erfüllen, läßt sich a priori nur teilweise sagen und ist *auch* eine Frage der Geschichte [2)]. Um zu sehen, was für Bereiche *heute* mathematisiert sind, hätte man die gegenwärtige Mathematik mitsamt ihren Anwendungen zu durchmustern. Das wird hier erspart.

Der nächste Schritt wäre, die mathematische Schriftlichkeit Revue passieren zu lassen; das werden wir gleich tun. Das Hauptgewicht der Diskussion aber liegt notwendig auf dem für die Mathematik spezifischen, außerhalb ihrer nirgends anzutreffenden Verhältnis zwischen den Inhalten und ihrem schriftlichen Ausdruck. Dieses Spezifische besteht in der Möglichkeit von *Kalkülen*. Wir werden diesen Begriff im Anschluß an Leibniz einführen und dann der Frage nachgehen, welche Rolle die Kalküle im mathematischen Gesamtprozeß spielen.

Damit ist umrissen, wovon hier die Rede sein soll, und auch, wovon nicht. Ich gehe hier nicht ein auf die erkenntnistheoretische oder ontologische Frage, in welchem Sinne die mathematischen Symbole etwas *bedeuten*; dies ist ein Spezialfall eines allgemeineren philosophischen Problems (von dem man nicht sagen kann, daß es gelöst sei). Ausgeklammert wird auch ein historischer Aspekt. Die Entwicklung der mathematischen Symbolik von ihren ersten greifbaren Ursprüngen in Babylon und Ägypten über Inder, Griechen, Lateiner, Araber bis in die Neuzeit zu verfolgen, ist natürlich auch ein reiches und lohnendes Thema, für das ich aber nicht kompetent bin.

2

Der Wirkung des mathematischen Symbolwesens auf den Nichtinitiierten hat Thomas Mann in seiner unnachahmlichen Manier Ausdruck verliehen [3)]: „Was er sah, war sinnverwirrend. In einer krausen, kindlich dick aufgetragenen Schrift, die Imma Spoelmanns besondere Federhaltung erkennen ließ, bedeckte ein phantastischer Hokuspokus, ein Hexensabbat verschränkter Runen die Seiten. Griechische Schriftzeichen waren mit lateinischen und mit Ziffern in verschiedener Höhe verkoppelt, mit Kreuzen und Strichen durchsetzt, ober- und unterhalb waagrechter Linien bruchartig aufgereiht, durch andere Linien zeltartig überdacht, durch Doppelstrichelchen gleichgewertet, durch runde Klammern zusammengefaßt, durch eckige Klammern zu großen Formelmassen vereinigt. Einzelne Buchstaben, wie Schildwachen vorgeschoben, waren rechts oberhalb der umklammerten Gruppen ausgesetzt. Kabbalistische Male, vollständig unverständlich dem Laiensinn, umfaßten mit ihren Armen Buchstaben und Zahlen, während Zahlenbrüche ihnen voranstanden und Zahlen und Buchstaben ihnen zu Häuptern und Füßen schwebten." Man sollte nicht denken, daß es dergleichen heute nicht mehr gebe. Zwar spricht man seit Bourbaki mit Recht von der Mathematik als einer Strukturwissenschaft, aber der Primat der Strukturen hat die Formeln keineswegs verdrängt; es wird sogar heute viel mehr gerechnet als je zuvor, allein schon deswegen, weil der Computer schnell, billig und fehlerfrei Rechnungen produzieren kann, die einen menschlichen Rechner Jahre kosten würden. Freilich gibt es auch mathematische Texte, sogar solche von höchstem Rang, die fast ganz ohne Symbole auskommen; aber sie bilden doch Ausnahmen [4)]. Die Symbole sind also das charakteristische Merkmal, durch das sich ein mathematischer Text auch dem Laienblick sofort als solcher zu erkennen gibt.

3

Sehen wir uns diese Symbolwelt etwas systematischer an, nämlich am Leitfaden heutiger formaler Sprachen, so finden wir am Anfang die logischen Symbole, Junktoren und Quantoren. Es folgen Variable, mit denen man Mitglieder eines Gegenstandsbereichs ohne Spezifikation, und Konstante, mit denen man ausgezeichnete unter ihnen bezeichnet; sodann Funktions- und Relationssymbole (wobei unter den letzteren das Gleichheits-zeichen eine besondere Stellung einnimmt). Satzzeichen und Klammern sind zur Gliederung von Formeln so gut wie unentbehrlich, wenngleich es Notationsweisen gibt, die ohne sie auskommen. Damit ist ein Symbolbestand erfaßt, der eine L1-Sprache oder Prädikatenlogik erster Stufe konstituiert; ein einziges Exemplar davon, die Mengensprache, reicht heute für den weitaus größten Teil des mathematischen Gebäudes aus.

Jeder Schritt im Aufbau dieses Gebäudes fordert nun Definitionen, also neue Begriffe. Neue Begriffe wiederum erfordern neue Symbole oder neue Verwendungen schon bekannter Symbole. Es ist klar, daß dies auf die Länge in gewisse Verlegenheiten führt. Die griechischen, römischen, selbst gotischen Alphabete sind ausgeschöpft; viele Buchstaben, etwa π, haben mehrere Standardbedeutungen. Aus dem hebräischen und kyrillischen Alphabet haben nur einzelne Zeichen Eingang gefunden, aus anderen Schriftsystemen, soweit ich sehe, gar keine; es würde mich aber nicht wundern, wenn in irgendeiner ultra-avancierten Theorie wieder Keilschrift oder Hieroglyphen auftauchen würden. Zu nennen ist auch das zum Standard gewordene „Bourbaki-Alphabet" mit Symbolen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ und ähnlichen für verschiedene Zahlbereiche.

Buchstaben und Kombinationen von Buchstaben sind bei weitem die meistverwendeten mathematischen Symbole; die Ziffern sind nicht so häufig, wie man glauben könnte. Ihnen folgen Symbole für die wichtigsten Relationstypen wie Anordnung oder

Äquivalenz und die Elementrelation, Operationssymbole für die Grundrechenarten, der Abbildungspfeil und mannigfache Funktionssymbole wie Unter- und Überstreichen, Überdachen, Besternen. Sie sorgen für die „Taten und Leiden" der Symbole, wie sie Thomas Mann so suggestiv beschreibt. In neuerer Zeit haben Diagramme große Bedeutung gewonnen, in denen mathematische Objekte und Abbildungen zwischen ihnen graphisch dargestellt werden, sozusagen als Netzwerk von Bezügen.

Die Variablen, mit denen man Mitglieder eines Gegenstandsbereichs bezeichnet, sind im Prinzip frei wählbar; viele Arbeiten und Bücher enthalten daher Listen von Notationen. *On the long run* aber setzen sich, vor allem bei Grundbegriffen, natürlich feste Konventionen durch. So bezeichnet man Gruppen üblicherweise mit G, Funktionen mit f (das kommt Romanen, Germanen und Angelsachsen entgegen), Körper mit K (was nur im Deutschen suggestiv ist). Hat man es mit mehreren Objekten derselben Art zu tun, verwendet man Indices oder benachbarte Buchstaben, aber nur innerhalb gewisser Grenzen; wer etwa einen Körper mit einem ψ bezeichnen wollte, würde wohl vom Referenten zur Ordnung gerufen. Bei nichtsprachlichen Symbolen ist die Konvention strenger; was sich einmal durchgesetzt hat wie das Integralzeichen, ist unantastbar. Manchmal kann das eine Weile dauern, wie in der Logik, wo noch vor wenigen Jahrzehnten verschiedene Garnituren von Quantoren in Kurs waren. Insgesamt läßt sich sagen: allein die Art und Verteilung der verwendeten Symbole verrät dem Kenner das mathematische Spezialgebiet, dem eine Arbeit zuzuordnen ist.

4

Nachdem wir die mathematische Symbolwelt ein wenig besichtigt haben, fragen wir uns nach ihrer Rolle im mathematischen Prozeß. Hier tritt uns nun sogleich die radikale These in den Weg, die für Brouwer eines der beiden Grundprinzipien seines Intuitionismus war, nämlich daß Mathematik prinzipiell unabhängig von jeder Sprache sei [5)]. Dies ist nicht ontologisch gemeint, als die platonistische These, daß die mathematischen Gegenstände eine „ideale" Welt bildeten, die unabhängig vom menschlichen Denken existiere. Gemeint ist vielmehr, daß wir mathematische Wahrheiten intuitiv erfassen (oder erfassen könnnen), in einer Art von Wesensschau, ohne Vermittlung durch irgendeine Art von Sprache. Eine solche These kann schwerlich anders begründet werden als durch phänomenologischen Aufweis, also indem wir darauf achten, was wir erleben, wenn uns etwas Mathematisches einleuchtet oder wenn wir, spekulativ vorgreifend, einen mathematischen Gedanken fassen, den es dann zu beweisen gilt. Das droht eine ausufernde Diskussion zu werden. Aber wir können ihr aus dem Weg gehen, indem wir uns erinnern, daß wir ja die Rolle untersuchen wollen, welche die Symbole tatsächlich spielen, nicht aber, welche sie *nicht* spielen.

Der real stattfindende mathematische Prozeß führt zum entgegengesetzten Befund. Schon Aristoteles spricht von den φαντασματα, den Vorstellungsbildern, die alles Denken begleiten, und spätestens bei Leibniz findet sich expressis verbis die Einsicht, daß wir der Zeichen zum Denken bedürfen: „Dies Eine nur macht mich bedenklich, daß ich, wie ich bemerke, niemals irgendeine Wahrheit erkenne, auffinde oder beweise, ohne im Geiste Worte oder irgendwelche Zeichen zu Hilfe zu rufen" [6)]. Die heute vorherrschende

Auffassung davon, wie man Mathematik betreiben sollte, hat aus der Not eine Tugend gemacht; sie geht zurück auf Brouwers großen Gegenspieler im Grundlagenstreit, David Hilbert. Dessen „Formalismus“, Mathematik als Wissenschaft formaler Systeme, beruht auf der (unstreitig vorhandenen) Möglichkeit, das mathematische Gesamtgebäude *vollständig* zu symbolisieren, oder, wie man dann auch sagt, zu formalisieren. Das bedeutet genauer: alle mathematischen Aussagen werden symbolisch dargestellt, und die deduktiven Beziehungen zwischen ihnen zeigen sich (ganz buchstäblich) dadurch, daß sie nach bestimmten Regeln auseinander hervorgehen, wie man etwa aus den Formeln $p \to q$ und p die Formel q deduzieren kann (modus ponens); also (im Prinzip) durch *bloßes Hinsehen ohne Denken.* Im realen Prozeß wird natürlich einmal mehr, einmal weniger formalisiert, manchmal auch gar nicht. Studienanfänger werden in formalibus gedrillt, der Diskurs der Experten kann informell sein bis ins Saloppe (worin sich manche gefallen). Jedoch wird der modern geschulte Mathematiker stets imstande sein, seine Aussagen zu formalisieren, wenn und soweit es nötig werden sollte [7)].

5

Was sind nun die Funktionen der Symbolisierung? Beginnen wir mit dem für die philosophische Betrachtung der Mathematik vielleicht bedeutsamsten Effekt: auf der *Möglichkeit* einer Formalisierung (nicht erst auf ihrer Verwirklichung) beruht eine Mathematik der Mathematik, die mathematische Selbstreflektion, nämlich die Beweis- und Modelltheorie, welche verschiedene Axiomensysteme im Hinblick auf Sachhaltigkeit, Reichweite und gegenseitige Verträglichkeit untersucht und der wir, in den Sätzen von Gödel und seiner Nachfolger, einige der wichtigsten Resultate des letzten Jahrhunderts verdanken (deren einige wir unten gebrauchen werden).

Wenden wir uns nun zur Mathematik qua Mathematik, sehen wir zunächst einen bescheidenen Effekt, der aber doch schon ein Licht wirft auf die spezifisch mathematische Symbolverwendung, nämlich den der Abkürzung. Wenn in einem mathematischen Text ein Objekt mehr als einmal genannt wird, führt man in aller Regel ein Symbol dafür ein. Ein Begleiteffekt ist dabei die stärkere Fokussierung des Gedankens, das Abdrängen sachfremder Konnotationen und Assoziationen – ein Symbol läßt keine Ablenkung zu, man versteht es nur, wenn man bei der gemeinten Sache bleibt, allein durch die Nötigung, die Bedeutung des Symbols präsent zu halten. In einem literarischen Text ist solches Verfahren kaum vorstellbar, höchstens in besonderer Absicht, etwa parodistisch oder verfremdend; man ist eher bestrebt, allzu häufige Verwendung desselben Begriffs durch Umschreibungen oder Synonyma zu vermeiden. Warum wäre es absurd, wenn ein Lyriker zu Beginn einer Sammlung eine Liste von Abkürzungen für vielgebrauchte Wörter gäbe und diese dann im Text verwendete? Weil wir vom Dichter erwarten, daß ihm das Wort mehr ist als eine Spielmarke, weil wir ihn als Sachwalter der Worte und der Sprache überhaupt ansehen. Die Namen dürfen ihm nicht gleichgültig sein; das lyrische Wort soll seinen Gegenstand nicht nur anführen, sondern auch evozieren. Nicht Information allein ist angestrebt, sondern ein bestimmtes Aufnehmen der Information; dem dient auch der metrische und klangliche Stellenwert des Worts [8)].

Wichtiger als die Abkürzung ist ein zweiter Effekt: durch wohlgewählte Symbolisierungen wird das Auffassen und gedankliche Weiterbearbeiten komplizierterer Ausdrücke oder Sachverhalte überhaupt erst möglich. Das einfachste Beispiel sind *sehr* große Zahlen, für welche die Sprache erst in jüngster Zeit Präfixe wie „Nano“ und „Giga“ nachgetragen hat. Den Satz „Das Quadrat einer Summe zweier Größen ist gleich der Summe der Quadrate der beiden Größen und des Zweifachen ihres Produkts“ muß man zweimal lesen, um ihn in die Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ zu übersetzen, die man mit *einem* Blick erfaßt. Und das ist ein harmloser Fall; bei komplizierteren Ausdrücken rückt eine nicht-symbolische Wiedergabe ins Absurde, ja man kann zweifeln, ob sie auch nur theoretisch möglich ist. (Hier sind wir wirklich in einem „Grenzraum der Schrift“, nämlich einem solchen, den wir ohne Schrift gar nicht betreten könnten.) Das Auge „denkt mit“, es entspringt ein Synergie-Effekt von Sehen und Denken, ohne den alle „höheren“ Entwicklungen undenkbar sind. Mit andern Worten: die Symbole können schon für die *Konstituierung* mathematischen Sinns nicht entbehrt werden, erst recht nicht für ihre Weiterbearbeitung; selbst wenn man „in Gedanken“ rechnet, geschieht es mit Symbolen. „Die echte Methode“, so Leibniz, „muß uns einen Ariadnefaden in die Hand geben, d.h. in rein sinnliches Hilfsmittel, wie es die Linien der Geometrie und die Formeln der Analysis sind, die man die Schüler lernen läßt. Ohne eine solche Hilfe müßte unser Geist bei jedem einigermaßen langen Weg notwendig in die Irre gehen“ [9].

Der dritte und wichtigste Effekt hat die beiden ersten zur Voraussetzung und schließt sie ein: Formalisierung ist eine Voraussetzung für jede Art von Kalkül.

6

Unter Kalkül verstehe ich hier [10] jedes Verfahren, mathematische Aussagen durch regelgeleitete Symbolumwandlungen zu gewinnen. Mit den Worten von Leibniz: „Nihil aliud enim est calculus quam operatio per characteres“ [11]. Das Charakteristische dabei ist, daß die Bedeutung der Symbole – was auch immer man darunter versteht – für die Dauer des Kalkulierens gänzlich zurücktritt, der ganze Prozeß sich in eine Manipulation der Zeichen verlagert. „Das Denken...bedarf nicht des ständigen Hinblicks auf die idealen Sachverhalte selbst; es kann sich, auf weite Strecken hin, damit begnügen, an Stelle der Operationen mit den „Ideen“ die Operationen mit den „Zeichen“ zu setzen.“ [12] Schematisch könnte man den Vorgang so darstellen:

$$\begin{array}{lccc} \text{(Ebene der interpretierten Symbole)} & X & \rightarrow & Y \\ & \downarrow & & \uparrow \\ \text{(Ebene uninterpretierter Symbole)} & x & \rightarrow & y \end{array}$$

Der obere horizontale Pfeil steht für einen Übergang zwischen Objekten oder Sachverhalten, den es zu finden gilt. Der linke vertikale Pfeil ist der Abzug der Interpretation von den Zeichen (Mathematiker denken hier an einen „Vergißfunktor“). Der untere horizontale Pfeil ist der Kalkül, und der rechte vertikale das „Wiedereinsetzen der Interpretation“ [13]. Daß dies überhaupt möglich ist, zeigt, daß beim Abzug nichts verlorenging; der Kalkül präsumiert, mathematisch ausgedrückt, eine „strukturelle Isomorphie“ von Sachen und Zeichen, die natürlich nur in einem scharf umgrenzten Bezirk bestehen kann; jeder Kalkül ist „regional“, erfaßt nur eine bestimmte Klasse von Objekten und bestimmte Operationen mit ihnen.

Man muß erst einmal darüber staunen: was eben noch als Zahl oder Funktion gedacht wurde, wird jetzt nur noch als Buchstabe behandelt, als graphisches Gebilde. Daß eine solche μεταβασισ εισ αλλο γενοσ überhaupt zu brauchbaren Resultaten führt, muß doch prima facie ganz unverständlich erscheinen. Manchmal ist wirklich ein magischer Zug dabei, als ob die Zeichen zum Leben erwacht wären und denken gelernt hätten [14]. Man wird sagen: Die Regeln für die Symbolumwandlung reflektieren eben die der jeweiligen Sache inhärierenden Gesetzmäßigkeiten. Aber das ist natürlich keine Erklärung, sondern eine Umschreibung des zu Erklärenden. Auch Leibniz hat (in dem schon zitierten Dialog) darüber nachgedacht; er betont die wichtige Einsicht, daß Entsprechung nicht zwischen den Dingen und den Zeichen gesucht werden kann (das ist nur ausnahmsweise möglich, wie in der Elementargeometrie), sondern zwischen den Dinggesetzen und den Kalkülregeln. Aber auch damit wird nur konstatiert, was einer Erklärung bedarf. Die Transzendentalphilosophie bringt uns einen Schritt weiter, indem sie uns belehrt, daß das, was wir für die Gesetze der Dinge „an sich“ halten, in unseren Möglichkeiten, Dinge aufzufassen und gedanklich zu bearbeiten, ihre Wurzeln haben. Aber noch immer bleibt die Entsprechung unbegriffen – wie kommt es, daß alles Denkbare in das zweidimensionale Sehfeld gewissermaßen hereinpaßt? Die Frage würde sich durch eine Art „kopernikanische Wende“ lösen, wenn wir Leibnizens Beobachtung zu einem Apriori im Sinne Kants erhöben: wenn es kein Denken ohne Zeichen gibt, dann auch kein Denken von Dinggesetzen ohne Zeichenregeln; denn Gesetze, die nicht irgendeine Entsprechung auf der Zeichenebene haben, *können* wir unter der gemachten Voraussetzung gar nicht denken. Ob damit das Problem gelöst ist, muß hier unausgemacht bleiben [15].

7

Kalküle konstituieren einen Symbolgebrauch, den es außerhalb der Mathematik nicht gibt. Natürlich kann man auch in andern Bereichen einmal die Mittel spielen lassen, ohne an Zwecke zu denken, und machmal mit Vorteil. Man könnte sich einen Maler vorstellen, der mit Farben und Formen ohne Rücksicht auf Darstellung experimentiert, bis er einen neuen malerischen Effekt erzielt; man mag etwa an den Pointillismus denken. Oder ein Literat kann mit Lauten und Silben spielen, ohne auf Bedeutungen zu achten; die dadaistische Lyrik hat das getan, mit Resultaten wie Morgensterns „großem Lalula“. Oder ein Komponist kann systematisch Akkorde verändern, bis ein neuer „Klangsinn“ entsteht; man denke an Debussy oder Skriabin. Aber schon die flüchtigste Überlegung zeigt, daß all diese dem ersten Blick vergleichbar erscheinenden Fälle ganz anders gelagert sind. Der wichtigste Unterschied ist wohl, daß im mathematischen Kalkül die Zeichen prinzipiell durch andere ersetzbar sind, der mathematische Gehalt in den Regeln der Umwandlung steckt; es wäre aber blanker Unsinn, zu sagen, daß etwa in einem Bild die Farben und Formen beliebig durch andere ersetzt werden könnten, solange nur bestimmte Verhältnisse gewahrt bleiben.

8

Als ein Beispiel, das alle kennen, betrachten wir die Addition von Dezimalzahlen. Wenn man die Kosten für eine Reise zusammenstellt und dann die Kolonne addiert, vergißt man nicht nur, daß die Ziffern für Währungseinheiten stehen. Man vergißt auch die meisten Eigenschaften der Zahlen; was man braucht, ist dreierlei: zwei Zahlzeichen zusammengenommen ergeben ein bestimmtes drittes, und dabei muß man eine „Eins im Sinn“ behalten oder nicht, und diese Einsen muß man zählen. Man vergißt also die gesamte multiplikative Struktur, auch daß es Zahlen außerhalb des Intervalls [0,9] gibt; es ist kaum übertrieben zu sagen: man vergißt, daß die Zahlzeichen für Zahlen stehen. Wenn man das nicht vergessen dürfte, wäre unverständlich, daß Maschinen addieren können. Erst wenn das fertige Resultat dasteht, werden die Ziffern wieder zu Zahlen und diese zu Geld.

Die Möglichkeit solches Rechnens beruht bekanntlich auf dem Positionssystem der Zahlen, und es lohnt die Mühe, sich klarzumachen, warum etwa die römische Zahlschreibweise dafür ungeeignet ist. Auch das römische System basiert auf der Zehn und kennt eine „schwache“ Form von Position, indem die Zehnerpotenzen wie bei uns in absteigender Reihenfolge erscheinen. Aber die Notation zeigt nicht, daß I die nullte, C die zweite und M die dritte Potenz von X ist; die einzelnen Zehnerpotenzen werden nicht mit Faktoren angeführt, sondern additiv notiert, wobei die Fünfersymbole V, L und D für Abkürzung sorgen; vor allem fehlt die Null [16)].

Das Beispiel wirft schon ein wenig Licht auf die Frage, wodurch eine Symbolik kalkülfähig wird. Die Operationen mit den idealen Objekten sollen in handhabbare, aber womöglich auch sinnfällige Regeln für die Umwandlung der Zeichen übersetzt werden. Ein schönes Beispiel für beides ist das Integralzeichen

$$I(f, M, \mu) = \int_M f \, d\mu \ ,$$

das die Abhängigkeit von drei Parametern in einer Weise wiedergibt, die zugleich suggestiv ist und die verschiedenen Arten der Abhängigkeit von diesen Parametern in Form verschiedener Regeln sichtbar werden läßt: einfache Änderungen der Parameter drücken sich in einfachen Änderungen des Symbols aus. Unser erstes Beispiel, das Positionssystem der Zahlen, kann Sinnfälligkeit kaum beanspruchen, denn schon die Darstellung von Zahlen durch Potenzen einer festen Grundzahl erfordert theoretischen Aufwand und wird „lebensweltlich“ nirgends motiviert; dafür triumphiert die Handhabbarkeit [17)]. Sinnfällig, aber schlecht handhabbar und darum in Vergessenheit geraten ist Freges logische Notation [18)].

9

Das Zahlenrechnen gehört zu einer Unterklasse der Kalküle, den Algorithmen. Ein Algorithmus (oder, wie man auch sagen könnte, eine mathematische Handlung) ist ein Kalkül, der ein bestimmtes Ziel hat, nach dessen Erreichen er stoppt, und bei dem jeder

Schritt sich zwingend aus den vorhergegangenen ergibt. Nicht jeder Kalkül ist ein Algorithmus. Wenn man die Lösungen einer Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ sucht und die Formel vergessen hat, muß man die linke Seite zu

$$x^2 + ax + a^2/4 - a^2/4 + b = (x + a/2)^2 - a^2/4 + b$$

aufblasen („quadratische Ergänzung"), wonach die gesuchte Formel sich leicht ergibt. Hier haben wir einen algebraischen Kalkül betätigt (das Rechnen in einem Polynomring), aber die Umformung ergab sich nicht von selbst; man muß erst „darauf kommen". Die gewonnene Formel läßt sich natürlich einem Algorithmus zugrundelegen, der quadratische Gleichungen löst.

Die vom Computer entscheidend gesteigerten Rechenmöglichkeiten (hier ist die Formel vom „Umschlag in die Qualität" angemessen) haben den Algorithmen Funktionen zuwachsen lassen, die sie zuvor jedenfalls nicht in solchem Maß hatten. Man kann heute geradezu von mathematischem Experimentieren sprechen, wenn man zum Beispiel ein System vom Differentialgleichungen durchrechnen läßt (worauf jede Klimaprognose beruht). Von mechanischen Iterationen lebt die Fraktalindustrie, deren (auch vorhandener) mathematischer Gehalt viel weniger populär ist als die bekannten Figuren. Manche berechnen Millionen Stellen von π in der Hoffnung, einer Gesetzmäßigkeit der Ziffernfolge auf die Spur zu kommen. Auch die Primzahljagd kann hier genannt werden.

Die Algorithmen sind selbst Gegenstand einer mathematischen Theorie. Man kann sich nämlich fragen, ob es so etwas wie „mathematische Elementarhandlungen" gibt, aus denen sich alles, was als Algorithmus angesehen werden kann, aufbauen läßt. Es ist ein bemerkenswertes, von der philosophischen Betrachtung vielleicht noch nicht genügend gewürdigtes Ergebnis der mathematischen Grundlagenforschung, daß ganz verschiedene theoretische Ansätze in einem bestimmten, hier nicht zu präzisierenden Sinn zu demselben Ergebnis führen [19)]. Nächst den rekursiven Funktionen sind am bekanntesten die Turing-Maschinen und die Markoff-Ketten; bei beiden besteht die zentrale „Elementarhandlung" darin, daß gegebene Symbolgruppen nach einer bestimmten Vorschrift (dem „Programm" der Maschine) durch andere ersetzt werden. Für den menschlichen Rechner spielt die Reduktion auf Elementarhandlungen keine größere Rolle als die Formalisierbarkeit; für den elektronischen ist sie eine Voraussetzung.

10

Unsere nächste Frage gilt nun der Rolle der Kalküle im mathematischen Gesamtprozeß. Die Elementarmathematik befaßt sich fast ausschließlich mit Kalkülen, wie dem Dreisatz oder dem Buchstabenrechnen mit seinen Formeln, und meist mit Algorithmen, wie für das Addieren oder Kürzen von Brüchen. Auch das Konstruieren mit Zirkel und Lineal ist eine Art Kalkül, nur daß die Objekte, mit denen man operiert, nicht *Symbole*, sondern *Abbilder* idealer Objekte sind. Schwieriger fand man zumeist die „Textaufgaben", bei denen man herausbekommen mußte, welcher Kalkül wie anzuwenden ist.

Auch in der höheren Mathematik hat jeder Gegenstandsbereich seine eigenen Kalkülformen; so spricht man vom Infinitesimalkalkül, vom Matrizenkalkül oder Logikkalkül. Hier hat der Ausdruck „Kalkül“ einen etwas weiteren Sinn als den oben definierten, etwa „Familie zusammengehöriger Kalküle“. So gibt es innerhalb des Infinitesimalkalküls einen Subkalkül für das Ableiten zusammengesetzter Funktionen, welches mittels der Regeln

$$(f + g)' = f' + g', \quad (fg)' = f'g + fg', \quad (f\circ g)' = (f'\circ g)g'$$

zu einer mechanischen Angelegenheit wird. Auch für die Integration gibt einen Kalkül mit bekannten Formeln, aber nicht in jedem Fall einen Algorithmus, wie man ihn für rationale Funktionen hat (bekanntlich kann die Bildung von Stammfunktionen aus dem Kreis „bekannter“ Funktionen hinausführen). Der Matrizenkalkül besteht im wesentlichen aus den Grundrechenarten für Matrizen, kombiniert mit „strukturellen“ Informationen, die aus der Gestalt der Matrizen ablesbar sind. Algorithmen gibt es etwa für die Lösung linearer Gleichungssysteme und für die Bildung von Inversen oder Normalformen. Die oben erwähnten Diagramme haben zu einem Spezialkalkül geführt, „diagram chasing“ genannt, den man als eine Art mechanisiertes Schließen auffassen kann. In der Gruppentheorie gibt es einen Kalkül von „Erzeugern und Relationen“; zum Beispiel kann man mittels der Relationen $ab = ba$, $a^2 = b^3 = 1$ jedes Potenzprodukt von a und b (jedes Wort über dem Alphabet $\{a,b\}$) in die Form $a^n b^m$ bringen, mit $n \in \{0,1\}$ und $m \in \{0,1,2\}$. Der Logikkalkül besteht in den Regeln für die Bildung von Formeln und die Deduktion von Formeln auseinander. In der Aussagenlogik gibt für jedes Problem einen Algorithmus; die Theorie ist „entscheidbar“. Die Prädikatenlogik ist es nicht (wir kommen darauf zurück); aber natürlich gibt es auch hier Algorithmen für spezielle Probleme, etwa die Bildung von Normalformen.

Der Logikkalkül scheint eine Sonderstellung einzunehmen, insofern er „im Prinzip“, aufgrund der Möglichkeit, die Mathematik zu formalisieren, alle andern in sich enthält. Aber das ist eine Täuschung; alle andern Kalküle würden förmlich verschwinden, wenn man die durch sie ausführbaren Operationen in ihre logischen Atome auflöste, denn sie beruhen sämtlich auf zweckmäßig gewählten Abkürzungen.

11

Kalküle gibt es also überall in der Mathematik; was ist ihre Funktion? Allgemein gesprochen, dienen Kalküle dazu, Terme oder Formeln solange umzuformen, bis eine gewünschte Information aus ihnen abgelesen werden kann. So kann man aus der Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ablesen, daß jede gerade Zahl sich durch höchstens drei Quadratzahlen additiv darstellen läßt. Sehr oft dient ein Kalkül dazu, etwas auszurechnen. Eine Zahl ausrechnen, heißt in der Regel, sie als Bruch oder Dezimalzahl zu schreiben. Allgemeiner spricht man von Ausrechnen überall da, wo etwas Unbekanntes auf etwas Bekanntes (oder dafür Angesehenes) zurückgeführt wird. Zum Beispiel kann „eine Gruppe ausrechnen“ bedeuten, daß man sie als Produkt von zwei „bekannten“ Gruppen erweist. Ein Kalkül kann auch dazu dienen, die Struktur bestimmter funktionaler Beziehungen ganz wörtlich sichtbar zu machen; eine Ableitungsregel etwa zeigt, wie die

Ableitung eines Aggregats von Funktionen von den Ableitungen der Bestandteile des Aggregats abhängt. Oder die Umformung eines Terms zeigt, daß er von bestimmten Variablen nicht abhängt oder eine „Funktionalgleichung“ erfüllt. So beweist man die Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion, indem man die (leicht modifizierte) Funktion $Z(t)$ auf die Form

$$Z(t) = F(t) + F(1-t)$$

bringt, woraus man $Z(t) = Z(1-t)$ einfach abliest. Oder eine Reihe wird als konvergent nachgewiesen, indem man sie solange umformt, bis man sie mit einer schon als konvergent erkannten Reihe vergleichen kann.

Die Beispiele lassen sich beliebig vermehren und lassen die Funktionsweise von Kalkülen im mathematischen Prozeß erkennen. In erster Näherung: Man denkt, bis es etwas zu rechnen gibt, dann rechnet man, wobei man nur achtgeben muß, und denkt weiter. Ganz ähnlich muß man auf einem Klettersteig in der Regel sorgfältig prüfen, wohin man seinen Fuß setzt, also sozusagen „denkend gehen“; aber gelegentlich gibt es eine Leiter, welche die Fortbewegung vorübergehend mechanisch und das Denken, aber nicht das Achtgeben überflüssig macht. Dieser Befund verlangt offensichtlich nach weiterer Klärung. Ist das Rechnen ein Notbehelf des Denkens, oder verhält es sich gerade umgekehrt? Gibt es eine „natürliche“ Aufgabenteilung, und wenn ja, wie verändert sich diese im Lauf der Entwicklung, strebt sie vielleicht einem „idealen“ Zustand entgegen?

12

Wieder begegnen uns zwei Auffassungen, die zwar einander nicht widersprechen, aber in zwei entgegengesetzte Richtungen weisen. Ich zitiere eine vielzitierte Stelle von Leibniz, wo er den Nutzen des von ihm projektierten *calculus ratiocinator* beschreibt: „Quo facto, quando orientur controversiae, non magis disputatione opus erit inter duos philosophos quam inter duos computistas. Sufficiet enim calamos in manus sumere sedereque ad abacos et sibi mutuo dicere...: calculemus!“ [20)] Zweifellos eine erstrebenswerte Lage, denn das Rechnen ist leichter als das Disputieren und führt auch immer zu eindeutigen Ergebnissen. Genauer besehen, sind hier zwei Thesen ausgesprochen: erstens, daß jedes philosophische Problem in ein mathematisches übersetzt werden kann; zweitens, daß es für jedes mathematische Problem einen Algorithmus gibt. Schon die erste These wird man bedenklich finden. Was Mathematik zur Philosophie beitragen kann, ist, eine Grundordnung von Begriffen, als Axiomatik fixiert, konstruktiv-deduktiv zu entfalten; das wesentliche Geschäft der Philosophie ist aber die Herstellung solcher Grundordnungen. Die zweite These muß vom heutigen Kenntnisstand aus als widerlegt gelten. Bekanntlich hat Gödel bewiesen, daß jede genügend reichhaltige Theorie Sätze enthält, die im Rahmen der Theorie unentscheidbar sind, und Tarski zeigte, daß es in solchen Theorien auch keinen Algorithmus gibt, der über wahr und falsch entscheidet [21)]. Später kamen Resultate hinzu, welche die algorithmische Unlösbarkeit selbst „konkreter“ mathematischer Probleme konstatieren, wie die ganzzahlige Lösbarkeit von Polynomgleichungen (Hilberts 10. Problem) oder die Gleichheit von Gruppenelementen, wenn Erzeuger und Relationen gegeben sind (Wortproblem der Gruppentheorie).

Einschränkend jedoch muß zweierlei bemerkt werden. Erstens gelten die erwähnten Sätze der Logik nur bei rekursiver Axiomatik, und alle Sätze über algorithmische Unlösbarkeit ruhen auf der Church-Turing-These, nämlich daß der Begriff der rekursiven Funktionen den Begriff der Berechenbarkeit ausschöpft. Theoretisch kann nicht ausgeschlossen werden, daß eine fundamentale „Revolution der Denkungsart“ einen neuen, weiteren Begriff von Berechenbarkeit hervorbringt, der jene Beschränkungen überwindet (freilich würde daraus noch nicht folgen, daß es gar keine Schranken mehr gibt). Die zweite, wichtigere Einschränkung liegt darin, daß die Gegenbeispiele, die man zum Beweis der genannten Unmöglichkeitsresultate konstruiert, in der Regel einen artifiziellen Charakter haben und somit die Möglichkeit offenbleibt, daß die „relevanten“, wenigstens aber die „praktischen“ Probleme doch dem Leibnizschen *calculemus* anheimfallen [22)]. Die gegenwärtig stattfindende Mathematisierung der Lebenswelt jedenfalls stützt diese Auffassung; bisher ist noch kein praktisches Problem aufgetaucht, das mathematisierbar ist, aber einer Algorithmierung widerstanden hätte.

13

Den Gegenentwurf zur Leibnizthese findet man – vielleicht unerwartet – bei Hegel: „Man könnte noch weiter den Gedanken einer philosophischen Mathematik fassen, welche dasjenige aus Begriffen erkennte, was die gewöhnliche mathematische Wissenschaft aus vorausgesetzten Bestimmungen nach der Methode des Verstandes ableitet.“ Er verwirft diesen Gedanken aber wieder, weil die Mathematik nun einmal „die Wissenschaft der endlichen Größenbestimmungen“ und der Begriff ihr „heterogen“ sei, und weiter: „Es würde ferner eine überflüssige und undankbare Mühe sein, für den Ausdruck der Gedanken ein solches widerspenstiges und inadäquates Medium, als Raumfiguren und Zahlen sind, gebrauchen zu wollen und dieselben gewaltsam zu diesem Behufe zu behandeln.“ [23)] Die Auffassung der Mathematik, die Hegel seinem Verdikt zugrundelegt, war schon damals falsch und ist es heute in offensichtlicher Weise; man fragt sich, was Hegel redivivus sagen würde, wenn man ihm etwa Bourbaki zu lesen gäbe. Aber das Bedürfnis nach begrifflicher Durchdringung entstand im 19.Jahrhundert in der Mathematik selbst. In seiner Gedächtnisrede auf Jacobi (der ein Zeitgenosse Hegels war) spricht Dirichlet von der „immer mehr hervortretenden Tendenz der neueren Analysis, Gedanken an Stelle der Rechnung zu setzen“ [24)]. Eben das wurde ihm selbst von Kummer bescheinigt: „ ... er ersparte ihnen [seinen Hörern] und sich selbst weitläufige und zeitraubende Rechnungen, indem er dieselben womöglich durch einfache Gedanken ersetzte“ [25)]. Und bei Hilbert lesen wir: „Ich habe versucht, den großen rechnerischen Apparat von Kummer zu vermeiden, damit auch hier der Grundsatz Riemanns verwirklicht würde, demzufolge Beweise nicht durch Rechnung, sondern lediglich durch Gedanken zu zwingen sind“ [26)].

14

Als prominentes Beispiel aus Hilberts eigenem Werk kann man seinen Beweis für die endliche Erzeugung von Invariantensystemen anführen, von dem sein Lehrer Gordan sagte, daß das nicht Mathematik sei, sondern Theologie, und der die sonst praktizierte Berechnung von Invarianten [27)] durch ein elegantes ringtheoretisches Argument vermeidet (damit freilich nur eine Existenzaussage liefert und, wie man heute sagt, „nichtkonstruktiv“ ist). Ein ebenso elementares wie schlagendes, von Strukturbegriffen noch freies Beispiel für das Ersetzen von Rechnung durch einen Gedanken enthält eine berühmte Anekdote aus dem Leben des ganz jungen Gauß. Der Lehrer der Elementarschule hatte seiner Klasse die Aufgabe gestellt, die Zahlen von 1 bis 100 zu addieren (vermutlich um in Ruhe Zeitung lesen zu können). Der Knabe Gauß aber kam nach unerwartet kurzer Zeit mit der richtigen Antwort: er habe in Gedanken 1 und 100, dann 2 und 99 usw. und zuletzt 50 und 51 addiert; das ergebe $50 \times 101 = 5050$. Der Gedanke, der hier das Addieren ersetzt, beruht auf der Symmetrie des fraglichen Zahlenintervalls (die Abbildung $x \to 100 - x$ ist eine Spiegelung), und das zeigt die dahinterstehende algebraische Struktur (wenn auf einem endlichen Bereich von Größen eine Gruppe operiert, kann man die Summation über den Bereich ersetzen durch Summation über die Orbits).

Wir beobachten aber auch: der Gedanke hat hier die Rechnung nicht völlig ersetzt, sondern nur – allerdings drastisch – abgekürzt. Mehr kann der Gedanke in solchen Fällen prinzipiell nicht leisten – wenn einer Größe eine andere Größe zugeordnet ist, kann der Gedanke vielleicht die Zuordnungsvorschrift durch eine einfachere ersetzen, aber der letzte Schritt, der die zugeordnete Größe liefert, muß eine Rechnung sein, und sei sie noch so trivial. Die Aufgabe, die Zahlen von -100 bis 100 zu addieren, wird jeder prompt lösen, aber die Gleichung $101 \times 0 = 0$ stellt auch noch eine Rechnung dar.

15

Ersichtlich kommt hier ein quantitatives Moment ins Spiel, mit dem sich die mathematische Komplexitätstheorie beschäftigt, nämlich die Frage nach dem kürzesten Algorithmus, den ein Problem gestattet (eine Frage, die ebenso praktische wie theoretische Bedeutung haben kann). Gaußens Überlegung liefert die allgemeine Formel

$$1 + 2 + 3 + ... + n = n(n + 1)/2,$$

welche die Rechnung im wesentlichen auf eine einzige Multiplikation reduziert, was schwerlich zu unterbieten ist. Solche expliziten Formeln sind aber nicht immer verfügbar. Für die Berechnung der n–ten Primzahl kann sich jeder leicht einen Algorithmus überlegen; aber die Frage nach dem besten Algorithmus ist eine sehr schwere, und eine brauchbare explizite Formel ist nicht bekannt. Hinzu kommt, daß manche Formeln zur Rechnung unbrauchbar sind, weil zu anfällig gegen Rundungsfehler. Schließlich kann die Explizitheit täuschen, wie in Sierpinskis Primzahlformel [28)].

Näheres Nachdenken führt zu dem Verdacht, daß es eine qualitative, begrifflich präzisierbare Unterscheidung zwischen expliziten Formeln und Algorithmen nicht gibt, allein schon, weil der erstere Begriff nicht scharf ist. Unter einer „expliziten Formel“ versteht man gewöhnlich ein Aggregat von Funktionen, die man schon anderswoher kennt; der Wert der Formel liegt wesentlich im Ausdruck eines Gesetzes, während ein Algorithmus oft fallweise berechnet, wozu uns das Gesetz fehlt. Andererseits basiert auch ein Algorithmus auf Gesetzen, und wenn es um Auswertung einzelner Fälle geht, ist auch eine Formel nichts anderes als eine Rechenvorschrift, bei der die einzelnen Schritte feste Bezeichnungen tragen, also eine Abkürzung für einen Algorithmus. Eine Formel wie $f(x) = x^2 + \sin(x)$ wird jeder explizit nennen, aber in jedem konkreten Fall muß man die rechte Seite erst ausrechnen (wozu man die im Taschenrechner implementierten Algorithmen betätigen wird). Und kann man eine Formel, die einen Flächeninhalt durch ein Integral wiedergibt, explizit nennen, wenn das Integral nicht elementar auswertbar ist? Umgekehrt könnte man einen Algorithmus eine „implizite Formel" nennen, welche das Resultat vielleicht schneller liefert als eine explizite.

16

Das führt uns nun dazu, auch das Ausspielen des Denkens gegen das Rechnen in Frage zu stellen. Warum wird, vom „höheren" Gesichtspunkt aus, das Rechnen so einhellig als etwas Untergeordnetes, ja geradezu Banausisches [29)] angesehen? Weil wir beim Handhaben des Kalküls von der Ebene der Inhalte und des mathematischen Sinns, an dem wir interessiert sind, „heruntersteigen" auf die Zeichenebene und die Zeichen nurmehr als Material sehen, das von jenem Sinn nichts mehr weiß. Gerade die beste, kalkülfähige Symbolik birgt die Gefahr, daß sich das Denken an sie verliert und in den Symbolen sucht, was sie nicht geben können. Aber wir können *jederzeit*, auch bevor wir erreicht haben, was wir ursprünglich wollten, durch „Wiedereinsetzen der Bedeutungen" auf die Sinnebene heraufsteigen. Jeder Mathematiker weiß, wie auch komplizierte Rechnungen durch Symmetrien, Gruppierungen, Verschwinden und Auftauchen von Termen viel vom „inneren Mechanismus" der jeweiligen Sache sehen lassen können. Immer läuft eine Aufmerksamkeit mit, die jede Umformung nach ihrer „strukturellen" Bedeutung abfragt. So kann auch bloßes Rechnen zu Ergebnissen führen, die das vorhergegangene Denken gar nicht angestrebt hat und die dann zu weiterem Nachdenken Anlaß geben. Schon bei jener primitiven Additionsaufgabe wird auch der ungeniale Sterbliche, der sich an die Rechnung macht, bald bemerken, daß er immer wieder dieselben Additionen vollzieht, wird Wege finden, die Rechnung abzukürzen und ein wenig Einsicht in die Natur der Sache gewinnen. Umgekehrt weiß der Kundige, der einen Kalkül gebraucht, daß nur bestimmte Umformungen Erfolg versprechen, weil hinter ihnen mathematischer Sinn steht, während andere eben „formal" bleiben und nicht weiterführen; im Gesamtfeld der vom Kalkül gestatteten Operationsmöglichkeiten sind bestimmte Wege von vornherein ausgezeichnet. Jede sachgemäße Betätigung eines Kalküls, der nicht schon ein Algorithmus ist, vollzieht sich im Zusammenwirken mit Denkprozessen, die nicht selbst im Kalkül erfaßbar sind.

17

Wie bei den expliziten Formeln und Algorithmen fällt die Asymmetrie auf, daß wir vom Rechnen einen befriedigend genauen Begriff haben, den des Kalküls, aber keinen Begriff vergleichbarer Prägnanz vom Denken. Man wird vielleicht sagen, Denken habe mit Schließen zu tun. Aber das Schließen ist ja auch eine Art Rechnen. Nicht der Vollzug des Schlusses kann „eigentliches" Denken sein, sondern dieses muß in der Herstellung einer Situation gesucht werden, die einen Schluß zuläßt. Man könnte sagen: die entscheidenden Akte „eigentlichen" Denkens, wie die fruchtbare Begriffsbildung und Fragestellung oder

der erfolgreiche Ansatz für eine Beweisführung, lassen sich nicht mechanisieren. Das soll nicht bestritten werden. Aber jede Gedankentätigkeit, die wir überhaupt begrifflich dingfest machen können, wie alles Suchen und Versuchen, Ordnen und Vergleichen, alles Beziehen unter festen Gesichtspunkten, wird eben dadurch auch systematisierbar und verfällt dem *calculemus*. Zuletzt bleibt, als das, was sich sich der Introspektion entzieht, die reine Divination, die wir aber der bewußten Denktätigkeit gerade nicht zurechnen können. Nicht wir denken dann, sondern „es denkt in uns"; aber das ist ein Prozeß, den wir nolens volens als physikalisch determiniert und insofern mechanisch ansehen müssen.

So könnte man, unter dem Oberbegriff des theoretischen Agierens, das Denken als ein fragmentiertes Rechnen ansehen, von dem nur eine „oberste Schicht" ins Bewußtsein gelangt, und bei dem man lose Enden auch einmal flattern lassen kann; ein Rechnen in Sprüngen, bei dem der Ursprung des Einfalls im Dunkeln bleibt, das einmal Fixierte aber nach Prinzipien bearbeitet wird. Umgekehrt erschiene das Rechnen als ein extrem fokussiertes Denken, welches den Bestand des für den jeweiligen Zweck zu Bearbeitenden auf das unumgängliche Minimum reduziert und sich von jeder Einmischung durch sachfremde Konnotationen nach Möglichkeit abschneidet.

18

Den Gedanken einer Mathematik, welche *alle* Kalküle durch Operationen mit Begriffen ersetzt, haben wir als grotesk erkannt. Schon Dirichlet, den wir als Anwalt des Gedankens in der Mathematik zitiert haben, räumt an derselben Stelle ein, daß es Gebiete gebe, „in denen die Rechnung ihr Recht behält". Der Grund dafür ist offensichtlich. Alle Mathematik strebt nach einer Ordnung von Begriffen. Diese Ordnung drückt sich aus in Beziehungen, die zwischen den Objekten bestehen, die unter die Begriffe fallen. Es ist nun ein Faktum, daß diese Beziehungen beliebiger Komplexität fähig sind, unser Denken aber nicht, das in allen Hinsichten ein endliches ist. Zwei Strategien stehen ihm zur Verfügung, einer zu groß werdenden Komplexität Herr zu werden. Die erste ist die Einführung höherstufiger Begriffe, die bewirken, daß „ein Schlag tausend Verbindungen schlägt" [30]. Das für die Mathematik wichtigste Beispiel dafür ist zweifellos der Zahlbegriff, der einmal eine Revolution gewesen sein muß, welche die Geister tief erregt hat; ein Nachklang davon ist vielleicht noch herauszuhören, wenn Aischylos die Zahl das υστατον σοφισματων nennt [31]. Eins der wichtigsten neueren Beispiele ist die (mathematische) Kategorientheorie, die eingeführt wurde, als die Beziehungen zwischen den Objekten, die man studierte, so kompliziert geworden waren, daß man eine Metatheorie der Beziehungen benötigte. Die zweite Strategie zur Komplexitätsbewältigung aber ist die Einführung einer möglichst kalkülfähigen Symbolik. Beide Strategien haben Grenzen. Eine Rechnung kann selbst für die Maschinen zu lang sein; doch kann auch die Hierarchie der Begriffe nicht beliebig aufsteigen, denn nicht nur die „horizontale", sondern auch die „vertikale" Komplexität unseres Denkens ist begrenzt.

19

Die Ordnung der Begriffe würde man gern von allem Formelwesen gereinigt sehen; die reine Betrachtung, θεωρια, die sich dieser Ordnung zuwendet, möchte die Spuren der Arbeit nicht wahrnehmen, so wie der polierte Marmor die Meißelschläge nicht mehr erkennen läßt. Das kann man, ganz äußerlich, durch geeignete Abkürzungen leicht erreichen. Aber um die so formulierte Ordnung zu würdigen, muß man von jener Arbeit genügend viel verstehen, muß man imstande sein, die Leiter der Begriffe herabzusteigen und am Spiel der Kalküle teilzunehmen. Die Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen ist doch wohl ein Beispiel für eine solche Ordnung (sogar eines der hervorragendsten); aber wer nichts vom Rechnen mit endlichen Körpern, mit Matrizen und Permutationen versteht, für den bleibt sie leer. Man kann sich Mathematik eben nicht zeigen lassen, nicht konsumieren; nur indem man an ihr teilnimmt, wird man ihrer teilhaftig.

Führen die Strategien stets zum Erfolg? Wo das Formelwesen überhand zu nehmen scheint, argwöhnen wir, daß begriffliche Durchdringung noch fehlt. Es gibt aber keine Garantie dafür, daß jede Komplexität, auf die wir stoßen, begrifflich bewältigt werden kann (der Mathematiker würde das „reduzibel“ nennen), oder anders gesagt: daß jeder Sachverhalt soviel „interne Struktur“ besitzt, daß er eine von uns überschaubare Gliederung gestattet. Das vielleicht beunruhigendste Beispiel dafür bietet der Vierfarbensatz, dessen leicht zu verstehende Aussage bis heute nicht anders beweisbar ist als mit Rechnerhilfe [32)]. Überhaupt ist die Kombinatorik ein Sammelbecken für Komplexitäten, für die uns die „richtigen“ Begriffe noch fehlen.

20

Komplexitätsvermehrung zeigt nicht nur die mathematische, sondern auch die Entwicklung anderer Kulturphänomene. So erstrebenswert es im Allgemeinen auch ist, daß der Mensch „bedenkt, was er vollbringt“, so unbestreitbar liegt ein wesentlicher Teil nicht nur des wissenschaftlich-technischen Fortschritts darin, daß wir immer mehr vollbringen können, ohne dabei denken zu müssen. „It is a profoundly erroneous truism ... that we should cultivate the habit of thinking what we are doing. The precise opposite is the case. Civilization advances by extending the number of important operations which we can perform without thinking about them“ [33)]. Wir erwarten von einem Klavierspieler, daß er nicht nur mit den Händen, sondern auch mit dem Hirn musiziert, aber gleichzeitig muß er imstande sein, große Tonfolgen mechanisch zu produzieren. Je weniger wir an das Wie? denken müssen, desto mehr können wir uns auf das Was? konzentrieren. Das Bewältigte sammelt sich unten an wie bei einer Sanduhr. Es muß verfügbar bleiben, aber der Geist weht schon woanders.

Die Leibnizsche Parole des *calculemus* und die Hegelsche Vision einer „philosophischen Mathematik“ behalten also beide ihr Recht, aber nur als regulative Ideen, deren keine in reiner Gestalt verwirklicht werden kann. Ihre Synthese kann darin liegen, daß der Gedanke die Rechnung nicht notwendig verdrängt, sondern sie eher mit Sinn anreichert, daß er sie aufhellt und durchsichtig macht und ihr vielleicht auch den Charakter des zufällig verfügbaren Kunstgriffs nimmt, der sich nur durch seinen Erfolg rechtfertigt. Umgekehrt kann es der Fall sein, daß ein Gedanke durch eine Rechnung erst Form und Bestimmtheit gewinnt, seine Implikationen und seine Reichweite offenbart. Hier kann man Riemanns Antrittsvorlesung nennen, deren halb visionär formulierter Gehalt erst Jahrzehnte später in der formelreichen Differentialgeometrie mathematische Realität annahm. Ein Beispiel natürlicher Arbeitsteilung bietet der Begriff des Vektorbündels (allgemeiner der Garbe), der den klassischen Feldbegriff abgelöst hat. Konstruktionen mit ganzen Feldern lassen sich koordinatenfrei („invariant") durchführen, wodurch viel Formelkram erspart wird, aber bei konkreten Problemen wie der lokalen Krümmung treten die Formeln wieder in Funktion.

21

Vielleicht liegt der interessanteste Aspekt unseres Themas hier im Historischen, in der letzten der oben aufgeworfenen Fragen, nämlich wie sich das Verhältnis von Denken und Rechnen im Lauf der Entwicklung verändert. Das Symbol war ja einmal ein Triumph des Geistes, der ihn emanzipierte von dem hic et nunc Vorfindlichen, indem er sich jederzeit Gegenstände vergegenwärtigen konnte, die nicht zugegen sind. Auf einer höheren Stufe nimmt jeder Kalkül dem Geist Kärrnerarbeit ab und setzt ihn frei für wesentlichere Aufgaben. Wo er freilich solche nicht sieht, wird nur die Kärrnerarbeit vermehrt; das erblühende Eigenleben der Kalküle läßt eher an den Zauberlehrling denken, dem der Besen in die Hände gefallen ist, der aber von einem Meister nichts mehr weiß; und man darf bezweifeln, daß sein Geist im Aufstieg zu Wesentlicherem begriffen ist.

Damit treten wir in Betrachtungen ein, die den hier gesetzten Rahmen überschreiten. Den Abschluß soll, wie billig, ein Passus von Cassirer bilden, der an Leibniz anknüpft und als Resumé unserer Diskussion angesehen werden kann: „Denn das Zeichen ist keine bloß zufällige Hülle des Gedankens, sondern sein notwendiges und wesentliches Organ. Es dient nicht nur dem Zwecke der Mitteilung eines fertiggegebenen Gedankeninhalts, sondern ist ein Instrument, kraft dessen dieser Inhalt selbst sich herausbildet und kraft dessen er erst seine volle Bestimmtheit gewinnt. Der Akt der begrifflichen Bestimmung eines Inhalts geht mit dem Akt seiner Fixierung in irgendeinem charakteristischen Zeichen Hand in Hand. So findet alles wahrhaft strenge und exakte Denken seinen Halt erst in der Symbolik und Semiotik, auf die es sich stützt" [34)]. Diesem Befund habe ich als *working mathematician* nichts hinzuzufügen.

Anmerkungen und Nachweise

(1) Einerseits gehört die Schrift zur Sprache im weiteren Sinn, zu dem, womit man sich ausdrückt; was umgekehrt in Lehrbüchern der Logik als eine formale Sprache definiert wird, ist nichts anderes als ein Alphabet zusammen mit Vorschriften für die Bildung von Worten, also etwas essentiell Schriftliches. Der Sprechakt spielt im mathematischen Prozeß keine wichtige Rolle. (Viele Dozenten pflegen beim Anschreiben von Formeln diese Symbol für Symbol mitzusprechen. Dieses Sprechen dient fast nie zur Mitteilung, sondern entsteht eher aus einem Bedürfnis, den Vortrag nicht abreißen zu lassen.)

(2) Mathematische *Basisdisziplinen* lassen sich ableiten aus dem, was ich das „kategoriale System" des Menschen nenne. Siehe meinen Aufsatz „Das kategoriale System und der Ort der Mathematik", Hamburger Beiträge zur Mathematik 2005.

(3) Aus „Königliche Hoheit", Ges. Werke, Frankfurt/M 1960, Bd. II, S.242. Bekanntlich war Manns Braut, die er in der Gestalt der Imma Spoelmann porträtierte, die Tochter des Mathematikers Alfred Pringsheim.

(4) Etwa die mit Recht berühmte Antrittsvorlesung von Bernhard Riemann.

(5) Etwa: „Intuitionistic mathematics is a mental construction, essentially independent of language", L.E.J.Brouwer, Collected Works, Amsterdam 1975, S.477; besonders: „To begin with, the „FIRST ACT OF INTUITIONISM" completey separates mathematics from mathematical language" (S.510, Sperrung von Autor).

(6) Dialog über die Verknüpfung von Dingen und Worten, Philosophische Schriften, (Gerhardt) VII, 190-193.

(7) Faktisch bewegt sich jedes Mathematisieren auf einem Boden mehr oder weniger explizierter Voraussetzungen, die man nicht zu hintergehen braucht. Die Vorlesung erklärt mehr als das Lehrbuch, dieses mehr als das Nachschlagewerk für Experten. „Originalbeiträge" können so kryptisch sein, daß selbst die Fachleute Jahre brauchen (wie man unlängst wieder erlebt hat).

(8) Man denke an Nietzsches berühmte Charakterisierung des horazischen Stils; in „Götzen-Dämmerung", Was ich den Alten verdanke, 1.

(9) Leibniz an Galloys, Mathematische Schriften (Gerhardt) I,181. Siehe auch meinen Aufsatz „Über die Anschauung im mathematischen Denken", Phil.Nat.35 (1998), 311-331.

(10) Der gewöhnliche Sprachgebrauch ist natürlich viel allgemeiner; von Kalkül spricht man schon überall da, wo planmäßig vorausgedacht wird.

(11) Siehe H.Burkhardt, Logik und Semiotik in der Philosophie von Leibniz, München 1980, S.310.

(12) E.Cassirer, Philosophie der symbolischen Formen, Darmstadt 1988, Bd.3 S.450.

(13) Man erinnert sich hier an das Hertzsche Schema der Anwendung von Mathematik in der Physik; siehe dazu meinen Aufsatz „Mathematik und Anwendung", in: E.K., Beiträge zu einer Philosophie der Mathematik, Leipzig 2003

(14) „The whole thing is of course pure magic." S.Lang, Introduction to Algebraic and Abelian Functions, Addison-Wesley 1972, S.9.

(15) Der Zwang zur Visualisierung des Gedachten ist von anderer Art als etwa derjenige, der uns den Raum nur als dreidimensionalen erfahren läßt; auch sind die Visualisierungen individuell verschieden. Ein anderer Gesichtspunkt ist geometrischer Natur: das Gehirn ist dreidimensional; alles Dreidimensionales aber läßt sich, zwar nicht treu, aber für viele Zwecke genügend gut ins Zweidimensionale projizieren (wogegen in *einer* Dimension die Möglichkeiten der Gestaltbildung zu eingeschränkt sind). Man kann auch darüber spekulieren, wie unsere Logik und Symbolwelt beschaffen wäre, wenn die Rolle, welche der Gesichtssinn in unserem Wahrnehmungsvermögen einnimmt, dem Tastsinn oder Hörsinn zufiele.

(16) Merkwürdig ist dabei, daß die römischen Zahl*wörter* genau wie die unsrigen positionell aufgebaut sind und man „ducenti“ sagt statt „centum-centum“, was das sprachliche Äquivalent von CC wäre. Die Zahlzeichen dienten mehr der Repräsentation als praktischen Zwecken (für diese besaß man übrigens den Abakus; siehe dazu K.Menninger, Zahlwort und Ziffer, Göttingen 1958, Bd.2, S.102ff). Interessant ist in diesem Zusammenhang auch, daß wir nur beim schriftlichen, aber nicht beim Kopfrechnen positionell verfahren.

(17) Übrigens hält die Zehn als Grundzahl eine gewisse Mitte. Ist die Basis klein, werden die Zahlausdrücke lang, und je größer sie ist, desto komplizierter wird das für die Multiplikation benötigte „kleine Einmaleins“.

(18) Ihre größere Sinnfälligkeit gegenüber der üblichen linearen Notation folgt schon aus ihrer Zweidimensionalität, die einen viel größeren logisch-figürlichen Synergieeffekt ermöglicht. Heute sollte ein LATEX-Unterpaket dafür keine großen Schwierigkeiten machen.

(19) Zu dem ganzen Problemkreis siehe etwa J.D.Monk, Mathematical Logic, Springer 1976, Pt.1.

(20) Ursprünglich wollte Leibniz den calculus auf alle Wissensbereiche ausdehnen, wovon er später wieder abrückte. Siehe dazu das Buch von Burkhardt (Anm.11). Ein viel größeres Problem, als den Kalkül aufzustellen, würde übrigens darin bestehen, alle Beteiligten auf ihn zu verpflichten. Es gibt Zahllose, die eher das kleine Einmaleins verleugnen würden als ihre heiligen Bücher. „Wenn sie den Stein der Weisen hätten, der Weise mangelte dem Stein.“

(21) Siehe etwa E.Mendelson, Introduction to Mathematical Logic, New York 1979. Die Gödelnummern der wahren Sätze der Peanoarithmetik bilden keine rekursive Menge.

(22) Das Beispiel für den Unvollständigkeitsssatz ist eine Formel, die (nach Rückübersetzung aus der Gödelisierung) ihre eigene Unbeweisbarkeit behauptet. In der Zahlentheorie, der entwickeltsten aller mathematischen Disziplinen, sind Formeln dieses Typs bisher nicht aufgetaucht. Eine nicht-rekursive Funktion f konstruiert man mittels einer Aufzählung f_1, f_2, .. aller rekursiven Funktionen durch $f(n) = f_n(n) + 1$. Es ist klar, daß f nur dieses eine theoretische Interesse hat. Das Wortproblem ist für große Klassen

von Gruppen als lösbar bekannt; trivialerweise zum Beispiel für endliche Gruppen. Siehe dazu B.A.Epstein et al., Word Processing in Groups, 1992.

(23) Enzyklopädie § 259. Siehe auch meinen Aufsatz „Hegel über die Mathematik", Math.Sem.-Berichte XXXVIII (1991), 151-174.

(24) Werke Bd.II, S.245.

(25) A.a.O. S. 342.

(26) Ges.Abh. Bd. I, S.67. Sogar in einem Leitartikel der Frankfurter Allgemeinen Zeitung vom 6.1.2007 konnte man lesen, daß der Mathematikunterricht mehr auf Denken als auf Rechnen ausgehen sollte.

(27) Die klassische Invariantentheorie gehört zu den formelmäßig aufwendigsten Theorien, derart, daß man sich zur Einführung eines ingeniösen „symbolischen Kalküls" genötigt sah, sozusagen ein Kalkül innerhalb eines Kalküls. Eine Erneuerung dieser schon totgesagten Theorie wurde erst möglich durch die hochstufigen Begriffsbildungen der modernen algebraischen Geometrie. Siehe dazu etwa P.J.Olver, Classical Invariant Theory, Cambridge 1999 (Einleitung).

(28) Es gibt eine reelle Zahl r derart, daß die n-te Primzahl eine ganz einfache Funktion von r und n ist; jedoch gehen in die Berechnung von r bereits alle Primzahlen ein. Siehe dazu etwa W.Schmidt, Primzahltheorie, Mannheim 1969, S.22.

(29) Vgl. auch die negative Konnotation von „berechnend" - da zu rechnen, wo man nicht rechnen sollte, womit die Geringschätzung sogar eine moralische Dimension bekommt.

(30) Gödel hat sogar formal gezeigt, wie durch Übergang zu einer höheren Stufe Beweise abgekürzt werden können: „Über die Länge von Beweisen", Collected Works, Vol.I, Oxford UP 1986, S.396.

(31) Der gefesselte Prometheus v.469.

(32) A.N.Whitehead, An Introduction to Mathematics, Oxford 1911, S.41/42.

(33) Nämlich durch Reduktion auf eine endliche, aber große Zahl von Spezialfällen. Siehe etwa R.Diestel, Graph Theory, Springer 2005, S.137. Fälle wie dieser implizieren auch eine Transformation des klassischen Beweisbegriffs. Siehe dazu die Diskussion bei Y.Manin, A Course in Mathematical Logic, Springer 1977, S. 48ff.

(34) Cassirer a.a.O. Bd. 1, S.18.