Hamburger Beiträge zur Mathematik

Von Zahlen und Figuren

Ernst Kleinert

Heft 256 / August 2006

Von Zahlen und Figuren

Ernst Kleinert

1

In einem bekannten Gedicht [1)] beschwört Novalis einen künftigen Zustand der Menschheit, in dem “nicht mehr Zahlen und Figuren / sind Schlüssel aller Kreaturen”. Der Ausdruck „Zahlen und Figuren“ meint die Mathematik, pars pro toto, denn sie umfaßte schon zu den Zeiten des Dichters nicht nur Arithmetik und Geometrie, sondern auch Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitstheorie, vor allem eine reich entwickelte Analysis. Dennoch benennt das Schlagwort die beiden Ursprünge von Mathematik – wo wir Mathematik anfangen sehen, ist sie Lehre von Zahlen oder Figuren, wobei die Beziehungen zwischen beiden zunächst zufällig scheinen wie bei den figurierten Zahlen oder den pythagoreischen Tripeln, in denen einer bestimmten geometrischen Gestalt ein bestimmtes Zahlverhältnis entspricht. Im Ganzen aber sind diese Beziehungen nicht geklärt; wie weit die Pythagoreer davon entfernt waren, ihrer These, alles sei Zahl, mathematische Substanz zu verleihen, zeigt ihre (wenn auch halb legendäre) Reaktion auf die Entdeckung des Irrationalen. Jedenfalls können erst im Rahmen axiomatischer Theorien beide Sphären begrifflich sauber voneinander geschieden (und dann auch zusammengeführt) werden; die Griechen besaßen eine Axiomatik aber nur für die Geometrie, nicht für die Arithmetik, die sie auch deutlich weniger systematisch entwickelt haben.

Vom Gesichtspunkt der Einheit der Mathematik stellt die cartesische Algebraisierung der Geometrie eine Art “feindlicher Übernahme” dar; die Gestalt, doch wohl etwas Qualitatives, wird bestimmt durch Quantitäten, nämlich Abstände von festen Koordinatenebenen. In erneutem Gegenzug hat die Entwicklung der geometrischen Axiomatik, gipfelnd in Hilberts „Grundlagen der Geometrie“, gezeigt, wie eine rein geometrische, keinerlei Quantitätsbegriffe enthaltende Axiomatik den Zahlbegriff aus sich hervorbringt [2)]. Tragende Disziplin der Mathematik ist aber heute weder die Arithmetik noch die Geometrie, sondern die Mengenlehre, zunehmend auch die Kategorientheorie. In einem Universum reiner Mengen (ohne Urelemente), dem gewöhnlichen Aufenthaltsort des *working mathematician,* sind nicht nur alle Strukturbegriffe aus einem “Mengensubstrat” gebildet, sondern es gibt gar keine anderen Objekte als Mengen; das heißt natürlich nicht, daß sich die Mathematik nur noch für Mengen interessiert, sondern diese sind der Baustoff aller Gegenstände, in formallogischer Präzisierung: aus ihnen lassen sich Modelle für alle Theorien bilden. Was nun diese selbst betrifft, so kann man immer noch mit Gauß die Arithmetik als die Königin der mathematischen Disziplinen ansehen, insofern sie nicht allein die reichste und am weitesten entwickelte ist, sondern auch alle andern als Hilfswissenschaften um sich versammelt. Aber diese Sonderstellung ist wohl nur historisch bedingt und jedenfalls im Schwinden begriffen. Vielleicht beruhte sie einfach darauf, daß frühere Zeiten nicht die Mittel besaßen, die beiden Grundbereiche auf „gleicher Augenhöhe“ zu behandeln und die Mathematik der Zahlen leichter zugänglich ist als die der Figuren (davon unten mehr). Schon Diophant betrachtet binäre quadratische Gleichungen; ihre Lösungen entsprechen ganzen (rationalen) Punkten auf ebenen Kegelschnitten, gehören also zur Geometrie ebensogut wie zur Zahlentheorie. Erst das 19. Jahrhundert, das auch die Topologie hervorbrachte, hat hier Fortschritte gemacht, und seitdem Grothendieck die Algebra mit der Topologie vermählte, läuft der *mainstream* der zahlentheoretischen Forschung unter dem Titel "arithmetische algebraische Geometrie", die man freilich ebensogut eine geometrische Arithmetik nennen könnte. Daneben läßt sich, nicht zuletzt unter dem Einfluß physikalisch motivierter Fragestellungen, eine Verlagerung des Gewichts auf die Topologie, im wesentlichen also die Theorie der Mannigfaltigkeiten feststellen. Diese aber sind die mathematischen Verkörperungen des Gestaltbegriffs.

2

Die Verschiedenheit jener beiden Basisdisziplinen befriedigend zu klären, kann nur auf dem Boden einer philosophischen Kategorienlehre gelingen. Aristoteles wie Kant verzeichnen je eine Kategorie der Quantität, meinen freilich sehr Verschiedenes damit. Das aristotelische ποσον ist dasjenige, wonach mit "Wieviele?" oder "Wieviel?" gefragt wird, während Kants Quantitäten logischer Natur sind und heute durch Quantoren wiedergegeben werden. Zu einem Gestaltbegriff ist philosophische Kategorienlehre, soviel ich sehe, erst sehr spät vorgedrungen. Bei Aristoteles scheint er in der Kategorie des κεισθαι wenigstens implizit vorhanden; seine eigenen Beispiele dazu („sitzen" oder „stehen") zeigen aber, daß er weniger die Einzelgestalt für sich genommen im Auge hat, sondern eher ihre Modifikationen. Kants Kategorien haben durchweg logischen Charakter und steigen sozusagen zur Gegenständlichkeit selbst nicht herunter. Es scheint, daß erst die Psychologen die Gestalt als selbständiges und irreduzibles Bestimmungsstück unserer sinnlichen Wahrnehmung erkannt haben; damit kommt ihr notwendig auch kategorialer Rang im philosophischen Sinne zu. Die Philosophie ist daran in der Folge auch nicht völlig vorbeigegangen; aber Kategorienlehre gehört nicht zu ihren gegenwärtig prominenten agenda, und von einem philosophisch durchgearbeiteten, insbesondere also in einer Kategorienlehre eingebundenen Gestaltbegriff ist wenig zu sehen [3)].

Hat die Philosophie sich also schwergetan, sich auf die Gestalt einzulassen, oder, in kantischen Termini, auf die Ebene der Anschauungsformen herabzusteigen, ist die Mathematik ihrerseits, ihrem eigenen Gesetz folgend, von der anschaulichen Ebene der Zahlen und Figuren zur derjenigen der Verstandesbegriffe heraufgestiegen, oder, mit einem passenderen Ausdruck, auf die Ebene des theoretischen Agierens, zunächst mit dem Funktionsbegriff, vollends aber mit dem Begriff der Struktur. Dem theoretischen Agieren entspringt auch der Mengenbegriff, dessen tragende Funktion wir schon erwähnt haben, denn Mengen sind primär, vormathematisch sozusagen, Extensionen von Begriffen. Er stiftet zunächst eine formale Einheit, insofern nun Quantitäten wie Gestalten als strukturierte Mengen oder Elemente von solchen auftreten, dann auch einen ersten strukturellen Oberbegriff, den des Verbands: die Zahlen tragen zwei natürliche Verbandsstrukturen, einmal durch ihre gewöhnliche Anordnung, sodann durch die Teilbarkeitsrelation; die meisten topologischen Räume (so alle Mannigfaltigkeiten) können aus dem Verband ihrer offenen Mengen rekonstruiert werden [4)]. Der Verbandsbegriff, ein Ordnungsbegriff, tritt so als Vermittler zwischen den topologischen und algebraischen Strukturen auf; freilich bleibt dies sehr abstrakt.

3

3

Bedeutsamer ist eine andere Folge der „Vermengung“: strukturierte Mengen bilden Kategorien (im mathematischen Sinn), und dies eröffnet die Möglichkeit, „räumliche“ und „quantitative“ Kategorien durch kategoriale Eigenschaften zu unterscheiden und womöglich zu kennzeichnen, was Lawvere in einer profunden Studie [5] unternommen hat. Der wesentliche Unterschied liegt darin, daß in räumlichen Kategorien Produkt und Koprodukt distributiv sind, während sie in quantitativen (bei Lawvere auch „linearen“) Kategorien zusammenfallen. Extensive Quantitäten entsprechen kovarianten Funktoren von räumlichen in quantitative Kategorien, wobei die Additivität, das wesentliche Merkmal des Extensiven, durch Erhaltung der Koprodukte wiedergegeben wird; intensive Quantitäten hingegen verhalten sich kontravariant. Paradigmatisch sind Maße auf Meßräumen als extensive, auf diesen Räumen definierte Funktionen als intensive Quantitäten. Der formale Rahmen gestattet weiter, die Operation der intensiven auf den extensiven Quantitäten in großer Allgemeinheit zu fassen, die viel mehr umfaßt, als wir gewöhnlich mit „räumlich“ oder „quantitativ“ assoziieren, und damit Anlaß gibt für erneutes Durchdenken dieser Grundbegriffe.

Jedenfalls wird es mittels des gemeinsamen Fundaments erst möglich, die Beziehungen zwischen den Quantitäts- und den Gestaltbegriffen in ihrer ganzen Tiefe auszuloten. Ihnen nachzugehen, soll das Thema dieser Arbeit sein. Daß sie von einer „regionalen“ Theorie nach Art der griechischen Geometrie nicht einmal erfaßt, geschweige denn bewältigt werden können, ist evident; heute ist eine ganze Reihe mathematischer Displinen mit ihnen befaßt, die allgemeine Topologie, dann die Geometrie in ihrer differentiellen, ihrer algebraischen und ihrer kombinatorischen Ausprägung (dazu gehört auch Graphen-theorie), damit Analysis mit allen Tochterdisziplinen; hinzu kommen die Probleme des Kontinuums. Ein mathematischer Rahmen, in dem all das gleichzeitig behandelbar und aufeinander beziehbar wird, kann nicht mehr aus Anschauungsbegriffen entwickelt werden; nur durch den Aufstieg auf die Ebene des theoretischen Agierens konnten Synthesen gelingen.

4

Wir beginnen mit den notwendigen Präzisierungen und Bestandsaufnahmen. Quantität begegnet in zwei Formen, als diskrete und kontinuierliche; die letztere verzweigt sich in extensive und intensive. Die Mathematik der diskreten Quantität ist die Peanoarithmetik, der kontinuierlichen die Theorie der reellen Zahlen. Es ist bekannt, wie (im Rahmen eines Mengenuniversums) aus den natürlichen Zahlen die reellen durch eine Reihe funktorieller Konstruktionen erzeugt werden können. Das mathematische Äquivalent von “Größe” ist demnach “reelle Zahl”; ein Vektorraum über einem reellen Grundkörper ist der Rahmen für die Mathematik unabhängiger, simultan zu betrachtender Größen.

Die heute geläufige Einbettung der natürlichen Zahlen in die Zahlengerade läßt diskrete Quantität als einen Spezialfall der kontinuierlichen erscheinen (was der griechischen Mathematik fremd blieb), wodurch ihre Eigentümlichkeit leicht aus dem Blick gerät. Der wichtigste Unterschied liegt im „absoluten“ Charakter der diskreten Quantität: während alles Kontinuierliche nur durch anderes Kontinuierliche gemessen werden kann, zeigt Anzahl sich gleichsam von selbst als das, was sie ist. Die Feststellung, daß das Haus zehn Meter hoch ist, wird erst sachhaltig, wenn der Meter gegeben ist; aber bei der Zehn tritt dieses Problem nicht auf. Man ist geneigt zu sagen, die reine Zahl enthalte in ihrem Begriff die abstrakte Eins als das Maß, aber dies wäre verfehlt, weil offenbar in einen unendlichen Regreß führend. In Verbindung damit steht ein weiterer Unterschied, derjenige der Bestimmtheit. Daß das Haus so und so hoch ist, läßt sich nie mit mathematischer Exaktheit sagen (eine solche Forderung wäre methodisch unsinnig), wohl aber, daß es genau zwei Türen hat. In diesem Sinn ist Anzahl scharf, konkrete kontinuierliche Quantität unscharf.

Schließlich darf nicht übersehen werden, daß die natürlichen Zahlen in ihrer quantitativen Funktion nicht aufgehen, sondern durch ihre multiplikative Struktur einen elementaren kombinatorischen Aspekt haben. Wenn wir Objekte zum Zweck der Identifikation numerieren (statt andere Zeichen, etwa Buchstaben zu benutzen), erhalten wir immer auch etwas mehr, nämlich Möglichkeiten der Einteilung. Das volle kombinatorische Potential der Zahlen aber steckt in der eindeutigen Primzerlegung, die Leibniz in seiner Idee der *characteristica universalis* nutzbar gemacht hat; die moderne Fassung davon ist die „Gödelisierung“ formaler Sprachen.

5

Versucht man, den natürlichen Begriff von physischer Gestalt einzugrenzen, tritt sogleich eine charakteristische Schwierigkeit hervor: die „solide“, kontinuierliche Einzelgestalt ist in der Regel nicht faßbar ohne ein kombinatorisches, also diskretisierendes Ingrediens von Konstellation oder Konfiguration, der Lage verschiedener Stellen oder Teile der Gestalt zueinander (wenn man will, das aristotelische κεισθαι). Oft ist Gestalt nichts anderes als Konstellation von Teilen, andererseits kann Konstellation als unzusammenhängende Gestalt angesehen werden. Aus großem Abstand wahrgenommen, wachsen die Dinge zusammen, aus der Nähe betrachtet, lösen sie sich auf; die Alleebäume bilden Linien, die scheinbar glatte Mauer erweist sich als körnig. Läßt man die Zacken eines Sterns schrumpfen, entsteht zuletzt ein Kreis, den man nicht als Konstellation von Teilen begreifen kann, denkt man sie immer spitzer, entsteht ein Linienbündel, also eine Konfiguration.

Beschränken wir uns auf zusammenhängende (oder als zusammenhängend wahrgenommene) Gestalt, bleiben immer noch gewisse Unschärfen in der Verwendung des Begriffs; so meinen wir manchmal mit Gestalt nur Umriß, namentlich bei flachen Gegenständen, oft nur einen bestimmten Umriß, wie beim Matterhorn (welches alle aus *einer* Perspektive, aber nur wenige aus *allen* erkennen würden), manchmal auch nur die „äußere“ Gestalt, wo es auch eine „innere“ gibt, wie die Höhlung eines Bechers. Wir legen uns mathematisch fest: zusammenhängende Gestalt soll für uns repräsentiert werden durch eine kompakte Mannigfaltigkeit mit oder ohne Rand. Anschaubar sind dann solche, die in den dreidimensionalen euklidischen Raum eingebettet werden können; ihre Dimension ist höchstens drei. Die einzelnen Gestalttypen in diesem Rahmen sind, nach dem „entarteten“ nulldimensionalen Fall einzelner Punkte, zunächst

Kurvenstücke mit ihren Endpunkten und geschlossene Kurven wie der Kreis (die 1-Sphäre); analog Flächenstücke mit ihrem Rand, wie die Kreisfläche, sowie geschlossene Flächen als Oberflächen von Körpern, wie die 2-Sphäre als Oberfläche einer Vollkugel; schließlich natürlich (als Hauptfall sozusagen) dreidimensionale Kompakta mit Rand; unberandete dreidimensionale Kompakta, wie die 3-Sphäre, existieren erst in höheren Dimensionen [6]. Bei ebenen Flächen und dreidimensionalen Körpern begreifen wir als Gestalt nur den Rand, das Innere geht die Gestalt sozusagen nichts an; das gilt aber nicht für gekrümmte Linien- oder Flächenstücke im Raum, die bei identischem Rand sehr verschieden ausfallen können. Unser Gestaltbegriff unterscheidet demnach auch zwischen Hohl- und Vollkugel; der Rand der ersteren besteht aus zwei „parallelen" Sphären. Das ist sachgemäß; der Unterschied ist zwar meistens nicht sichtbar, wohl aber fühl- oder hörbar. Ein Linienkreuz andererseits ist keine Mannigfaltigkeit, sondern eine Konfiguration von zweien [7].

6

Insofern wir die einzelne Gestalt überhaupt begrifflich fassen können, wird sie qua Begriff zum abstractum. Die nächste Frage ist, wie weit die Abstraktion reicht. Mein Weinglas ist vielleicht ein Unikat; von welchen Gläsern soll ich sagen, sie seien von derselben Gestalt? Versuche, so etwas wie einen „noch zulässigen Grad der Ähnlichkeit" zu definieren, sind aussichtslos, wie jedem klar ist, der sich auch nur rudimentär mit analytischer Philosophie beschäftigt hat; auch hier ist Präzisierung nur im mathematischen Rahmen möglich. Klar ist, daß Gestalt bei Rotationen und Translationen dieselbe bleibt, aber auch bei Streckung oder Schrumpfung (Homothetien), nicht hingegen bei Spiegelung. Gestalt ist demnach ein *projektiver* Begriff, unabhängig von (absoluter) Ausdehnung [8]. Andererseits geht Ausdehnung in mannigfacher Weise in die Konstitution von Gestalt ein, wie unten noch ausgeführt wird.

Die Mathematik kennt (im Groben) vier Ebenen der Gestaltanalyse. Die unterste, mit der weitmaschigsten Einteilung, wird durch den Homotopietyp gegeben, der von aller Ausdehnung abstrahiert und ein essentiell kombinatorisches Schema von Zusammenhangsverhältnissen übrigläßt. So ist durch die Homotopiebrille alles trivial (so gut wie ein Punkt), was sich stetig auf einen Punkt zusammenziehen läßt, wie jedes sternförmige Gebilde oder selbst der Gesamtraum. Der nächstfeinere Begriff ist Homöomorphie – zwei Gebilde sind homöomorph, wenn sie durch stetige Deformation, aber „ohne Substanzverlust", also unter bijektiver Entsprechung ihrer Punkte auseinander hervorgehen, zum Beispiel ein Quadrat aus einem einbeschriebenen Kreis durch „Aufblasen" oder die Umrißlinien aller Inseln. Das zeigt, daß man auch mit diesem Begriff von wirklicher Gestaltgleichheit, wie sie ja im Worte liegt, noch weit entfernt ist. Zur Illustration seiner Trennschärfe: nicht homöomorph sind zum Beispiel ein offenes und ein abgeschlossenes Intervall, ein Geradenstück und ein T-förmiges Gebilde, ein Kreis und die Figur der Acht. Der feinere Begriff des Diffeomorphismus setzt natürlich differenzierbare Strukturen voraus. Jetzt können runde und eckige Linien, Wölbungen und Kanten unterschieden werden oder das (tangentiale) Anschmiegen zweier Linien von einem einfachen Durchkreuzen; alle Vielecke sind untereinander homöomorph, aber nicht diffeomorph. Jenseits der Anschauungsgrenzen erzwingt Differenzierbarkeit

„infinitesimale Glätte“; eine fraktale Linie kann stetig sein, ohne auch nur an einem Punkt eine Tangente zu besitzen. Der engste Begriff schließlich ist derjenige der Isometrie; so kann ein (genügend kleines) Stück einer Zylinderfläche isometrisch (verzerrungsfrei) auf eine Ebene abgewickelt werden, ein Stück einer Kugeloberfläche aber nicht. Eine Fläche, die zu einer Kugelfläche isometrisch ist, ist selbst eine solche [9]; aber innerhalb ihrer Diffeomorphieklasse kann sie (fast) beliebig gestreckt, verbeult oder verbogen werden. Mathematisch-kategorial ist die Hierarchie so zu beschreiben: die riemannsche Kategorie ist eine nicht-volle Unterkategorie der differenzierbaren, diese eine solche der topologischen; die Homotopiekategorie ist ein Quotient der topologischen.

7

Aus dem Gesagten ist klar, daß Klassifikation höchstens bis auf Homöomorphie heraufreichen kann; auch muß sie offensichtlich auf zusammenhängende Gestalt beschränkt bleiben. Ein unberandetes eindimensionales Kompaktum ist homöomorph zu einem Kreis; insbesondere gilt dies für die Umrißlinie eines ebenen Flächenstückes (wenn wir die Entartung vermeiden, daß die Fläche in zwei Teile zerfällt, die sich in einem Punkt berühren oder durch eine Linie verbunden sind). Nach dem Jordanschen Kurvensatz ist das Innere der Fläche homöomorph zum Innern eines Kreises. Intuitiv ist dies unschwer einzusehen (wenngleich der Beweis nicht trivial ist); das gilt nicht mehr für die schon im 19.Jahrhundert gelungene Klassifikation der (kompakten unberandeten) Flächen im Raum, die durch eine einzige numerische Invariante, das Geschlecht, bis auf Homöomorphie bestimmt sind: vom Geschlecht Null ist die Sphäre, vom Geschlecht Eins die Torusfläche; die „typische“ Fläche vom Geschlecht $g > 1$ entsteht durch fortlaufendes Aneinanderkleben von g Torusflächen („Brezel mit g Löchern“). Um das Resultat zu würdigen, versuche man sich klarzumachen, daß auch der poröseste Schwamm, das hoffnungsloseste Labyrinth aus einer solchen Standardfläche durch Deformation hervogehen muß; man beachte, daß hier natürlich nicht nur die Außenfläche, sondern auch alle Innenflächen zur Gesamtfläche gehören. Damit ist alles erfaßt (wohlgemerkt nur bis auf Homöomorphie), was als zusammenhängende Gestalt von uns wahrgenommen werden kann. Übrigens ist die Grenze des Klassifizierbaren nicht weit entfernt; schon vierdimensionale Kompakta entziehen sich der Klassifikation aus prinzipiellen Gründen [10].

Wir vermerken noch, daß Klassifikation von Objekten auch bei Beschränkung auf zusammenhängende Gestalt nicht das einzige Gestaltproblem ist; auch Einbettungen von Gestalten ineinander oder in den Raum können schwierige Fragen aufwerfen. (Vom mathematisch-kategorialen Gesichtspunkt aus ist das trivial: alle relevante Information ist in den Morphismen enthalten; die Objekte figurieren eher als deren Indices). In die Torusfläche kann die Kreislinie auf zwei wesentlich verschiedene Arten eingebettet werden, als äußere Peripherie oder als Querschnitt; Analoges gilt für alle Flächen [11]. Ein Knoten ist, mathematisch gefaßt, eine Einbettung der Kreislinie in der Raum. Demnach sind alle Knoten untereinander homöomorph, nicht aber ihre Außenräume, die Komplemente der Knotenlinien, deren Fundamentalgruppe klassischer Gegenstand der Knotentheorie ist. Das dreidimensionale Analogon des Jordanschen Kurvensatzes ist falsch, wie die Alexandersche „gehörnte Fläche“ zeigt, bei der unser Auge schon Mühe hat: man kann eine Kreisfläche so in den Raum einbetten, daß das Komplement nicht mehr einfach zusammenhängt. [12].

8

Gestalt, sagten wir, hängt von (absoluter) Ausdehnung nicht ab, indem sie bei Homothetien dieselbe bleibt. Poincaré hat es im Gedankenexperiment dargestellt: wenn sich alle Gegenstände des Universums um denselben Faktor ausdehnten, würden wir davon nichts bemerken [13]. Andererseits ist keine Gestalt denkbar ohne „interne" Ausdehnung und Anzahl. Invariant unter Homothetien sind Proportionen, die ein Gutteil der Gestaltqualitäten ausmachen, wie das Größenverhältnis einzelner Teile oder Abstände oder Ausdehnungen in verschiedenen Richtungen. Einfache Gestalten werden durch solche Proportionen geradezu definiert, wie Quadrat und goldener Schnitt oder Kreis und Sphäre als Orte festen Abstands von einem Punkt; ähnlich alle Kegelschnitte. Aber auch komplizierte Gestalten sucht man durch Proportionen festzulegen, wobei das Ideal darin besteht, daß eine einzige absolute Länge zur Identifikation ausreicht; dem nahe kam der griechische Tempel und die menschliche Gestalt, wie sie die griechischen Bildhauer und dann wieder die Maler der Renaissance sahen (freilich ist der „Bauplan" dabei nichts rein Quantitatives mehr). Gleichbleibende Beziehungen zwischen Koordinaten, also Abständen zu festen Ebenen, führen zu sehr allgemeinen Gestaltfestlegungen; polynomiale Beziehungen liefern die Varietäten, den Gegenstand der algebraischen Geometrie, unter denen sich viele elementare geometrische Gebilde finden, so alle Kegelschnitte. Der Satz über implizite Funktionen spricht die Bedingung aus, unter der solche Beziehungen in eine funktorielle Abhängigkeit einiger Koordinaten von den restlichen umformuliert werden können. Zu den Proportionen gehören übrigens auch die Winkel, die Umrissen oft ihren Charakter geben.

9

Proportionen bestehen zwischen Teilen der Gestalt, die dabei als Ganze für sich genommen werden müssen. Eine weitere, nicht weniger elementare Gestaltqualität hat demgegenüber lokalen Charakter, nämlich Krümmung von Umrißlinien oder Oberflächen, mit der fundamentalen Unterscheidung von konvex und konkav. Das Altertum kannte, als erste Annäherung, eine Theorie „hornförmiger" Winkel [14]; wirkliche Bewältigung der Krümmungsphänomene ist aber ohne Infinitesimalrechnung nicht zu leisten; wir fassen sie heute in Termini von Ableitungen. Die Krümmung einer ebenen Linie an einem bestimmten Punkt ist der Radius eines dort sich anschmiegenden Kreises, schon von Euler in Formeln gebracht; wesentlich komplizierter ist Flächenkrümmung, die erst Gauß in einer großen Arbeit bewältigt hat [15] und damit einen Grundstein der heutigen Differentialgeometrie legte. Hier ist die Information nicht mehr durch eine einzelne numerische Invariante zu fassen, sondern durch zwei „Fundamentalformen", aus denen zwei „Hauptkrümmungen" hervorgehen, nämlich die größe und die kleinste Eulersche Krümmung eines durch den jeweiligen Punkt hindurchgehenden und ganz auf der Fläche liegenden Kurvenstücks. Höhere Dimensionen verlangen den ganzen Apparat der Tensoranalysis und entziehen sich der Anschauung, wenn wir uns auch seit Einstein daran gewöhnt haben, von „gekrümmter Raumzeit" zu reden.

10

Proportionen, Winkel und Krümmungen sind numerische Invarianten, die in *einfachen* Fällen zur Identifikation ausreichen, wie bei regulären Polyedern und Kurven oder Flächen konstanter Krümmung. In *allen* Fällen lassen sich einzelne, auf der ganzen Mannigfaltigkeit definierte reelle Funktionen finden, aus deren Wertverlauf sie rekonstruiert werden kann. Stets ist sie ja die disjunkte Vereingung der Fasern einer solchen Funktion; aber bei passender Wahl der Funktion („Morsefunktionen") läßt sich erreichen, daß die Fasern, wenn man die Werte durchläuft, nur diskrete Änderungen aufweisen, die dem Ankleben von Zellen entsprechen (das Verfahren ist allerdings auf die differenzierbare Kategorie beschränkt). Hier wird also die Gestaltbildung vermittels einer einzigen variablen Quantität gleichsam aufgeschlüsselt [16)].

Faßt man *alle* auf der Mannigfaltigkeit definierten, reellen und stetigen Funktionen zusammen, erhält man eine reelle Algebra, die an „struktureller Information" mit jener gleichwertig ist. Dies ist die Gelfand-Korrespondenz, die eine (Anti-)Äquivalenz von Kategorien zwischen den kompakten Hausdorffräumen und einer Kategorie reeller Algebren stiftet; der Raum erscheint dabei in der Algebra als ihr Maximalspektrum, besteht aus den Kernen aller Homomorphismen in den reellen Körper. Hierzu gibt es auch ein algebro-geometrisches Pendant, die Korrespondenz zwischen affinen Varietäten und ihren Koordinatenringen. Die Gleichwertigkeit der strukturellen Information ist dabei im Sinn mathematischer Kategorientheorie zu verstehen: jeder Information, die durch Morphismen der topologischen Kategorie ausgedrückt werden kann, entspricht eine solche in der algebraischen Kategorie und umgekehrt. Freilich bewirkt gerade die *vollständige* Korrespondenz, daß der Funktor „reelle Funktionen" die Probleme verlagert, aber nicht vereinfacht; die Algebren sind nicht weniger komplex als die Gestalten.

11

Gewöhnlich benutzt man Funktoren, um bestimmte Merkmale der fraglichen Objekte zu isolieren, wobei naturgemäß andere vernachlässigt werden. Die ersten und bekanntesten sind in unserm Fall die Homologiegruppen; ganz grob gesagt, ist der Rang der k-ten Homologiegruppe, die k-te Bettizahl, die Anzahl der „k+1-dimensionalen Löcher" in der Mannigfaltigkeit. Die erste (und einzig relevante) Bettizahl eines ebenen Graphen ist die Anzahl „kleinster" geschlossener Wege, aus denen sich alle andern zusammensetzen lassen; ist sie eins, hat der Graph den Homotopietyp eines Kreises. Die erste Bettizahl einer kompakten Fläche ist das doppelte Geschlecht; ist sie Null, ist die Fläche gemäß der Klassifikation homöomorph zur Kugelfläche. Das sind die beiden ersten (und vergleichsweise simplen) Fälle einer berühmten Vermutung von Poincaré, welche die Tragweite der Homologie ins Licht stellt: eine einfach zusammenhängende n-Mannigfaltigkeit mit der Homologie der n-Sphäre ist homöomorph zu ihr [17)]. Noch die Wechselsumme der Bettizahlen, die Eulercharakteristik, hat topologische Bedeutung; so existiert ein nirgends verschwindendes Vektorfeld genau dann, wenn sie Null ist, was bei den Sphären genau in den ungeraden Dimensionen der Fall ist. (Für Erheiterung im Hörsaal sorgt die Paraphrase, daß man einen Igel (eine 2-Sphäre) nicht ohne Glatzpunkt kämmen kann.) Daß übrigens die Eulercharakteristik eine topologische Invariante ist und auch auf kombinatorischem Wege berechnet werden kann, steckt hinter dem ersten Satz der Topologie im modernen Sinne (avant la lettre), der Eulerschen Polyederformel [17a)]: bei konvexen räumlichen Polyedern ist die Wechselsumme von Ecken, Kanten und Flächen immer gleich 2 (denn ein solches Polyeder kann als Triangulierung der 2-Sphäre aufgefaßt werden, deren Eulercharakteristik 2 ist).

Homologie wirkt, als Funktor, nicht nur auf die Objekte, sondern auch (und vor allem) auf die Morphismen der Gestaltkategorien und führt auch da zu Quantifizierungen. Zu einer Selbstabbildung einer Sphäre gehört ein Abbildungsgrad, mit klassischen Anwendungen. Lefschetzzahlen führen zu Aussagen über Fixpunkte von Selbstabbildungen beliebiger Räume, deren Vielfachheiten via Homologie durch Fixpunktindices beschrieben werden können. Andere Zahlen algebraisch-topologischer Herkunft, die der Gestaltbeschreibung dienen, sind Windungszahlen von Kurven bezüglich nicht auf ihnen liegender Punkte und Schnittzahlen, in denen die gegenseitige Lage von Untermannigfaltigkeiten zum Ausdruck kommt, ihre Durchkreuzungen und Durchdringungen, wobei auch „Selbstschnittzahlen“ anfallen. Intuitiv ist plausibel, daß eine tangentiale Berührung gekrümmter Linien von anderer Qualität ist als eine einfache („transversale“) Durchkreuzung, im Sinne einer „engeren Berührung“; nicht nur die Analysis, auch die Algebra kann das quantifizieren.

12

Wir haben nun eine Reihe von Quantitäten kennengelernt, die einzelnen Stellen oder Teilen einer Gestalt oder dieser selbst zugeordnet sind und die, je auf ihre Weise, zur Gestaltkonstitution beitragen. Will man über die *Beschreibung* von Gestalt zu Gestalt*gesetzlichkeiten* vordringen, wird man nach Beziehungen zwischen derart zugeordneten Quantitäten fragen. Diese sind nun, wie die Gestalten selbst, von kaum übersehbarer Vielfalt; allein mit den Beziehungen zwischen den verschiedenen Homologiegruppen sowie deren Modifikationen und Verallgemeinerungen füllt die algebraische Topologie zahllose Bücher. Nur die prominenteste soll genannt werden, die Poincaré-Dualität: die Bettizahlen sind symmetrisch zu ihrer Mitte. Nichttriviale Beispiele dafür sind schon jenseits der Anschaubarkeit; aber ein Reflex ist doch sichtbar, eine „Dualität“ simplizialer Zerlegungen räumlicher Polyeder, die zum Beispiel Würfel und Oktaeder sowie Dodekaeder und Ikosaeder (als Triangulierungen der 2-Sphäre) auseinander hervorgehen läßt. Für das folgende nehmen wir zwei allgemeine Problemkomplexe als Leitfaden: die Beziehungen zwischen lokalen und globalen Gestaltmerkmalen, sodann die zwischen diskreten und kontinuierlichen.

Eine gewisse Polarität von „lokal“ und „global“ liegt schon in der Definition der Mannigfaltigkeiten: lokale Standardstrukturen werden durch ein „Klebedatum“, dessen wesentlicher Bestandteil die „Übergangsfunktionen“ sind, zu einem Ganzen vereinigt, so daß das Klebedatum die gesamte relevante Information enthält; nur selten allerdings scheint es tunlich, sie ihm auf „direktem“ Wege entlocken zu wollen. Der Begriff der Mannigfaltigkeit schließt kein „inneres Formgesetz“ ein; er ist sozusagen von deskriptivem, nicht von normativem Charakter, und es ist auch nicht schwer zu sehen, daß jede beliebige Gestalt als Mannigfaltigkeit modelliert werden kann, sogar unendlich differenzierbar [17b]. Von diesem Gesichtspunkt aus besteht die einfachste Art Lokal-Global-Beziehung darin, daß ein kleiner Ausschnitt der Gestalt schon die Gesamtgestalt festlegt. So ist ein Kreis durch ein noch so kleines Segment (sogar schon durch drei Punkte) bestimmt, und Analoges gilt für alle algebro-geometrischen Gebilde, ebenfalls für alle solchen, die eine komplexe Struktur tragen, wobei für die Anschauung hier nur die kompakten Riemannschen Flächen in Betracht kommen (dies ganz wörtlich). Natürlich setzt diese Art Determination nach dem oben Gesagten voraus, daß eine algebraische oder komplexe Struktur überhaupt durchgängig vorliegt, wodurch die Betrachtung von vornherein auf einen sehr rigiden Gestalttypus eingeschränkt wird. Ähnlich (aber deutlicher sichtbar) ist die Determination durch Differentialgleichungen: wenn an jeder Stelle festgelegt ist, wie eine Funktion (sagen wir auf der Ebene) in jeder Richtung weiterwächst, so ist klar, daß mit *einem* Punkt der ganze Graph (eine Fläche im Raum) festgelegt ist; das ist der Eindeutigkeitssatz für Anfangswertsysteme in Worten. Differentialgleichungen stehen, als Gleichgewichts- oder Extremalprinzipien, hinter sehr vielen in der Natur wirkenden Gestaltgesetzen, wie bei der Form des rinnenden Tropfens oder der an beiden Enden aufgehängten Kette. Das Gesetz für die lokale Änderung von Quantitäten enthält die Qualität der Gestalt.

13

Wenden wir uns zu den zugeordneten Quantitäten. Ein klassisches Beispiel für ein Lokal-Global-Prinzip ist die Formel von Gauss-Bonnet – das Integral über die (Gaußsche) Krümmung ergibt (im wesentlichen) das Geschlecht der Fläche. Interessant ist hier nicht allein der Zusammenhang zwischen der globalen diskreten Invariante „Geschlecht“ und der lokal definierten kontinuierlichen Krümmung, sondern auch, daß das Integral (bei festem Geschlecht) einen konstanten Wert hat. Das entspricht der intuitiv plausiblen Tatsache, daß jede bei einer Deformation entstehende Krümmung durch eine entgegengesetzte Krümmung an anderer Stelle kompensiert wird; so betrachtet, erscheint die Formel als ein Erhaltungssatz unter Deformationen. Ein Lokal-Global-Prinzip für Schnittzahlen ist der Satz von Bézout, demzufolge die Schnittzahlen zweier ebener projektiver Kurven sich stets zum Produkt ihre Grade addieren, eine Art Bilanzgleichung. Formal ähnlich ist der Sachverhalt, daß die Pol- und Nullstellenordnungen einer Funktion auf einer algebraischen Kurve (ins Anschaubare fallen hier die kompakten Riemannschen Flächen, als Kurven über $\mathbb{C}$) stets die Summe Null haben; so ist die Identität der Riemannschen Zahlensphäre Null im Nullpunkt (Ordnung 1), unendlich im Unendlichen (Ordnung –1) . Der Satz von Riemann-Roch zeigt, in welcher Beziehung das Geschlecht einer Fläche zur Dimension von Funktionenräumen steht, die durch eingeschränktes Null- und Polstellenverhalten definiert sind; hier werden also numerische Invarianten einzelner Funktionen (Ordnungen), der Gesamtheiten solcher Funktionen (Dimensionen) und der Fläche (Geschlecht) korreliert.

Als Erhaltungssätze können auch die klassischen Integralsätze angesehen werden. Der Gaußsche Satz drückt ein Integral über den Gesamtkörper durch ein solches über den Rand (also den eigentlichen „Gestaltträger“) aus; auf ihm beruht ein planimetrisches Verfahren, einen Flächeninhalt durch Abfahren des Randes zu bestimmen. Ähnlich Greensche Formel und Divergenzsatz; der letztere präzisiert den intuitiv klaren

Sachverhalt, daß der Fluß durch eine Oberfläche dem Quellaufkommen im Innern entspricht. Alle drei sind Abkömmlinge des allgemeinen Stokesschen Satzes, der besagt, daß das Randintegral einer Form mit dem Gesamtintegral der abgeleiteten Form übereinstimmt; eine Art Adjunktion zwischen den Operationen des Differenzierens und des Einschränkens auf den Rand. Alle diese Sätze machen Aussagen darüber, wie der Rand auf den Gesamtkörper „zurückwirkt", wobei die Wirkung sich an Funktionen zeigt, also variablen Größen, die auf dem Körper definiert sind. Die einfachsten unter diesen sind die konstanten, deren Integrale im wesentlichen Volumina sind; die Lösung des isoperimetrischen Problems erweist den Kreis als diejenige Fläche, die bei fester Randlänge den größten Flächeninhalt hat; wieder ein intuitiv einsichtiger, aber nicht leicht zu mathematisierender Sachverhalt.

14

Das Spannungsverhältnis zwischem dem Diskreten und dem Kontinuierlichen bestimmt die Diskussion des Kontinuums bis heute [18)]; vielleicht darf man sogar sagen, daß hiermit ein Königsthema der Mathematik überhaupt genannt ist, welches erst jetzt mit tauglichen Mitteln angegangen werden kann. Thom sprach von einer *anteriorité ontologique* des Kontinuums [19)], der man freilich eine *anteriorité structurelle* des Diskreten entgegenstellen müßte: alles Diskrete tritt hervor aus einem Kontinuierlichen, ist nur vorstellbar von einem solchen Hintergrund; umgekehrt wird das Kontinuum erst faßbar und sichtbar anhand von Diskretionen, die ihm Gestalt und Ausdehnung verleihen. Ersichtlich ist damit eine Problematik angesprochen, die über das Mathematische hinaus in die Erkenntnistheorie, ja Ontologie reicht. Die heutige Standardtheorie entwickelt, wie wir schon erwähnten, das (lineare) Kontinuum aus dem Diskreten, den natürlichen Zahlen (erste Stufe der „feindlichen Übernahme"), und zwar durch eine sukzessive Approximation, die durch eine Reihe kanonischer (funktorieller) Konstruktionen über die ganzen und rationalen zu den reellen Zahlen führt. Die Approximation des Kontinuierlichen durch das Diskrete setzt sich von der quantitativen auf die Gestaltebene fort; nicht nur ist jede kompakte (differenzierbare) Mannigfaltigkeit triangulierbar, also homöomorph zu einem simplizialen Komplex, sondern kann, nach Einbettung in einen euklidischen Raum, durch einen solchen mit beliebiger Genauigkeit approximiert werden [20)]. Die Simplices (verallgemeinerte Dreiecke) sind dabei natürlich selbst kontinuierlich ausgedehnt, aber durch die simpliziale Approximation werden auch die Gestaltmerkmale diskretisiert, nämlich zur Menge der Ecken und derjenigen Eckenmengen, welche zu den Kanten, Seiten und ihren höherdimensionalen Analoga gehören, insgesamt ein endlicher Datensatz kombinatorischen Charakters (weshalb man früher auch von „kombinatorischer Topologie" sprach).

15

Diskretisierung ist eine der auffälligsten Leistungen der algebraischen Topologie. Die Morphismen zwischen Mannigfaltigkeiten sind zwar unschwer zu topologisieren, aber auch in den einfachsten Fällen weit davon entfernt, selbst eine Mannigfaltigkeit zu sein; es ist ein tiefliegender Satz von Milnor, daß der Schleifenraum eines CW-Komplexes wenigstens den Homotopietyp eines solchen hat. Daß nach Übergang zu den Homotopie-oder Homologieklassen der Abbildungen in wichtigen Fällen diskrete, oft sogar endliche Strukturen übrigbleiben, ist a priori gar nicht zu erwarten, außer in sehr vager Plausibilität: wenn ein Raum eine Triangulierung besitzt, scheint einsichtig, daß „fast alle“ singulären Simplices homolog sind und beim Übergang zur Homologie eben nur die gegebene Triangulierung „mitzählt“. Jedenfalls wird es erst durch diese Diskretisierung möglich, die kombinatorischen Wurzeln der Gestalten freizulegen.

Hier spricht nun der Satz von de Rham eine der erstaunlichsten Synthesen aus. Die simpliziale Kohomologie (mit reellen Koeffizienten) ist einerseits, wie angedeutet, etwas Kombinatorisches und kann aus einer Triangulierung mechanisch berechnet werden. Die Kohomologie der Differentialformen dagegen nimmt bei ihrer Definition auf nichts Diskretes Bezug; die Formen sind Linearformen auf den Tangentialräumen, mit denen sie stetig variieren. Dennoch erweist sich, daß der kombinatorische Komplex, der die Lage der Simplices und ihrer Ränder zueinander kodifiziert, und der differentielle Komplex, der ein entsprechendes Verhältnis der geschlossenen zu den exakten Formen enthält, dieselbe homologische Information enthalten. Man benötigt dazu nicht einmal einen direkten Bezug zwischen den Simplices und den Formen (der a limine auch nicht zu erkennen ist, sich aber vermittels „charakteristischer Formen“ herstellen läßt), sondern bestätigt den Satz für Standardräume durch direktes Ausrechnen beider Seiten und dehnt ihn dann vermittels funktorieller Eigenschaften beiden Seiten auf die Aggregate der Standardräume aus, als welche die Mannigfaltigkeiten entstehen.

Noch sehr viel tiefer als der Satz von de Rham liegt eine andere Beziehung zwischen den differentiellen und den kombinatorischen Gestaltmerkmalen, die Indexformel von Athiya-Singer. Der Index ist definiert für Differentialoperatoren, die auf Schnitten von Bündeln wirken, als Differenz der Dimensionen von Kern und Cokern; andererseits gehört zu einem solchen Operator eine Homotopieklasse in einer diskreten (zu $\mathbb{Z}$ isomorphen) Homotopiegruppe. Die Formel, welche den Zusammenhang zwischen diesen beiden Invarianten herstellt, gehört mit ihrer begrifflichen Vielschichtigkeit und ihrem Anwendungsreichtum zu den bedeutendsten Leistungen der neueren Mathematik; sie inhaltlich näher zu würdigen, ist in unserm Rahmen nicht möglich [21)].

Diskretisierung von Gestaltmerkmalen ist aber kein Privileg der algebraischen Topologie. Der Cauchysche Integralsatz besagt, daß gewisse Wegintegrale unter gewissen Deformationen des Integrationsweges invariant sind, und eröffnet damit die Möglichkeit einer analytischen Definition von Windungszahlen ebener Kurven. Aus der Analysis stammt auch ein besonders subtiles und faszinierendes Beispiel von Gestalt-quantifikation, das Spektrum des Laplaceoperators, welches nach allgemeinen Sätzen der Funktionalanalysis eine diskrete reelle Zahlfolge ist. Die Frage, ob eine (kompakte) Mannigfaltigkeit durch dieses Spektrum bereits bestimmt wird, hat unter dem Titel „Can you hear the shape of a drum?“ eine erstaunliche Popularität erlangt (der Zusammenhang ist, daß die Eigenwerte des Laplaceoperators für eine ebene Fläche die Eigenfrequenzen sind, mit denen sie schwingen kann). Mittlerweile ist sie im verneinendem Sinn beantwortet; immerhin fällt sie für konvexe „Trommeln“ positiv aus [22)].

16

Wir haben nun gesehen (wenngleich mehr in Umrissen und Andeutungen als in wirklicher Ausführung, die aber hier nicht geleistet werden kann), wie die Mathematik Gestaltmerkmale und -Qualitäten durch Quantitäten zu fassen sucht, wobei eine Art funktionaler Hierarchie erkennbar wurde – die Quantitäten sind erst der Gestalt selbst zugeordnet, dann den auf ihnen definierten variablen Größen, zuletzt den Operatoren, die auf diesen wirken. Hier muß nun klargestellt werden, daß die Gestaltmathematik nicht ohne Rest in reinen Quantitäten aufgeht. Die Struktur einer Fundamentalgruppe, die Form eines Knotenpolynoms oder die Torsion einer Homologiegruppe repräsentieren Gestaltmerkmale, die nicht ohne weiteres quantifizierbar sind. Auch die sehr wichtige, heute reich entwickelte Theorie der Singularitäten ist wesentlich nicht-quantitativer Natur und geht eher auf Klassifikation. Vollends ist eines der charakteristischsten Gestaltmerkmale, Symmetrie, nichts Quantitatives, sondern wird mathematisch als Gruppe der gestalterhaltenden Bewegungen gefaßt. Dem kann entgegengehalten werden, daß auch solche nicht-quantitativen Objekte ebenso wie die Gestalten quantitative Merkmale haben, durch die wir sie fassen und oft charakterisieren können. So studiert die Gruppentheorie Ordnungen und Indices von Untergruppen, Darstellungsgrade oder Nilpotenzklassen; die endlichen einfachen Gruppen sind durch ihre Ordnungen schon bestimmt. Wiederum könnte geantwortet werden, daß die Zahlen hier eher in ihrer kombinatorischen als in ihrer quantitativen Funktion auftreten.

Das Quantitative und das Kombinatorische sind nicht scharf voneinander trennbar, allein schon deswegen, weil für das letztere keine befriedigende Begriffsbestimmung vorliegt. Dennoch behält Quantität im Ganzen ein Übergewicht, und das gilt nicht allein für die Mathematik der Gestalt, sondern auch für alle Naturwissenschaft, die wenigstens in ihrer modernen Ausprägung danach strebt, alle Qualität in Quantität zu übersetzen. Genau betrachtet war es schon ein Teil dieser Entwicklung, als die Pythagoreer Tonhöhe mit Saitenlänge in Verbindung brachten (und damit eine intensive mit einer extensiven Quantität), und auch im Denkansatz der Ionier ist sie vorgezeichnet, wenngleich von ihnen nicht ausgesprochen: wenn der Kosmos aus *einem* Grundstoff gebildet ist, dann kann sein Zustand vollständig beschrieben werden durch die Verteilung des Stoffs im Raum und das Gesetz der zeitlichen Veränderung dieser Verteilung, und dazu bedarf es dreier Arten Quantität, Ausdehnung, Masse und Dauer, also die drei Grunddimensionen des modernen cgs-Systems (freilich sind die Verteilung selbst und ihr Gesetz nichts rein Quantitatives, und bei einem streng atomistischen Weltbild wird die Rolle der Kombinatorik noch größer). Fragen wir nun nach den Gründen für diese Prädominanz der Quantität für unser Erkennen.

17

Der zunächst sich aufdrängende Gesichtspunkt ist philosophisch-kategorialer, ja eigentlich bloß logischer Natur. Gestalt wird, als fertig vorliegende, durch den Gesichtssinn wahrgenommen, umgekehrt zeigt uns der Gesichtssinn nichts anderes als Gestalten in bestimmten Konstellationen (und Farben, von denen wir hier absehen können). Wenn wir etwas *nur* tasten, hören, riechen oder schmecken, dann nehmen wir einzelne Aspekte wahr, aus denen wir auf das dahinterstehende Ganze meist erst schließen müssen. Wenn wir aber etwas sehen, dann glauben wir, die *Sache selbst* zu sehen, weil die sichtbare Information viel umfangreicher ist als alle anders wahrnehmbare, und wir daher aus dem Anblick, verbunden mit unserer Erfahrung, andere Qualitäten der Sache viel leichter erschließen können als auf anderer Wahrnehmungsbasis[23)]. Diesen Vorzug des Sehens beim Erkennen hebt schon Aristoteles am Eingang seiner Metaphysik hervor. Mit den gesehenen Gestalten tritt gleichsam die Welt selbst als unbewältigtes Ganzes in unsere Vorstellung; die Gestalt ist Teil der Aufgabe (nämlich, die Phänomene zu bewältigen), während das fundamentale abstractum der Quantität schon ein Mittel zu ihrer Lösung ist.

Diese Bevorzugung des Sehens bringt freilich auch einen Nachteil mit sich: die dreidimensionale Gestalt wird im Auge auf ein zweidimensionales Sehbild projiziert, und wie wir auch den Gegenstand betrachten, sehen wir immer nur eine Hälfte, auch die Tiefenstruktur können wir oft nur unvollkommen erfassen, wie beim Blick auf eine Felswand. Die Gestalt als Ganzes bleibt dem Auge immer entzogen, sie als *Ganzes* in unsere Handlungen einzubauen erfordert die Mitwirkung des Denkens. Darum fällt räumliche Orientierung deutlich schwerer als ebene: man muß Gesehenes durch Denken verbinden oder ergänzen, es liegt nicht alles vor Augen. Eigentlich zuständig für das Räumliche und die Gestalten ist der Tastsinn, der aber den entscheidenden Nachteil der Lokalität hat. Das mag ein Grund sein für manche Unbeholfenheit im theoretischen und praktischen Handhaben von Gestalten [24)]. Ein anderer ist sicherlich, daß der bloße Anblick oder die Vorstellung für unser planendes und vorwegnehmendes Denken oft genügt und keine Notwendigkeit besteht, zum Begriff oder gar zur Mathematik aufzusteigen. Gestalten und Szenen repräsentieren die Welt in unserer Vorstellung, und oft können wir unser Handeln direkt aus ihnen ableiten, ohne theoretisch agieren zu müssen; wir *sehen* einfach, was sich aus einer Sache oder Situation machen läßt. In der Regel müssen wir Gestalten nicht mathematisch analysieren, um festzustellen, ob sie zusammenpassen oder für einen bestimmten Zweck brauchbar sind (eine Messung ist noch keine Analyse), und auch nicht, um brauchbare und passende Stücke herzustellen. Die antike Baukunst in all ihrer Großartigkeit kam mit einem sehr bescheidenen Vorrat an Geometrie aus.

18

Warum ist nun das abstractum Quantität ein so bevorzugtes Mittel des theoretischen Agierens? Der erste (und am meisten äußerliche) Grund ist die Ubiquität der Quantitäten. Alle menschlichen Möglichkeiten, Welt aufzufassen, haben quantitative Aspekte; das Mehr oder Weniger, das Wieviel und Wieviele sind Grundhinsichten, unter denen uns Welt erscheint, und die Philosophie seit Aristoteles unter dem Begriff der Kategorie zu fassen sucht. Was das Erfassen von Gestalt betrifft, haben wir quantitative Momente oben erörtert. Jede Farbe, jeder Geschmack und Geruch weist eine bestimmte Intensität auf, jeder Schall eine bestimmte Lautstärke, jede Tastwahrnehmung einen bestimmten Grad von Widerständigkeit. Unsere gesamte Welterfassung ist von diskreten, von extensiven und intensiven Quantitäten in solchem Maß durchsetzt, daß schwer zu sehen ist, was übrigbleibt, wenn man von allem Mehr oder Weniger abstrahiert. Die

Temperaturempfindung etwa reduziert sich auf eine einzige (intensive) Quantität. Ein nichttrivialer, exemplarisch bewältigter Fall ist Farbe – jeder Farbe entspricht eine Verteilung von Intensitäten auf drei Grundfarben; der „Farbraum“ ist also, wenn man von der Intensität der Mischung wieder abstrahiert, ein Ausschnitt aus dem zweidimensionalen reell-projektiven Raum. Für Geschmack und Geruch gilt wohl Ähnliches, aber bei Schall und Gestalt ist die Sachlage wesentlich komplexer; hier bleibt nach Abstraktion von Lautstärke bzw. Ausdehnung noch unübersehbar viel „Struktur“, die übrigens für den Schall noch wenig erforscht scheint. Wenn alles Erkennen ein Beziehen ist, wird die Wissenschaft vorzugsweise das ergreifen, wodurch möglichst viel in Beziehung gesetzt werden kann, und das ist eben Quantität; ein Gesichtspunkt einfacher Ökonomie. Daß übrigens kategorial ganz verschiedene, voneinander unabhängige Wahrnehmungen wie die von Ausdehnung, Gewicht oder Dauer durch denselben Relationstyp beherrschbar werden (den wir als angeordnete Menge axiomatisieren), ist doch a priori nicht selbstverständlich, ja recht eigentlich ein Grund zum Staunen.

19

Das zweite Moment ist, daß die Grundgesetze für das Operieren mit Quanta (vergleichsweise) einfach sind [25)]. Zwei Quanta derselben Art können zunächst miteinander verglichen werden; für die abstrakten Quantitäten, die man erhält, wenn man gleiche Quanta identifiziert, ergeben sich die Axiome einer total geordneten Menge. Sodann können solche Quanta zu einem neuen Quantum zusammengefügt oder, in Umkehrung dieser Operation, umeinander vermindert werden (zumindest, vor Erfindung der negativen Größen, das größere um das kleinere); die dabei waltenden Gesetze führen zu den Axiomen einer kommutativen Halbgruppe mit einer Kürzungsregel (zwei Quanta sind gleich, wenn sie nach Hinzufügen von Gleichem gleich werden). Größenvergleich und Zusammenfügen sind in durchsichtiger Weise kompatibel, was wir auch in der Axiomatik leicht wiedergeben können. Die dritte Operation ist Proportionenbildung, zuerst von Eudoxos in scharfsinniger Weise mathematisch gefaßt. Sie führt sogleich in größere Allgemeinheit, insofern zwei Paare von Quanta dieselbe Proportion bestimmen können, auch wenn sie nicht von derselben Art sind. Faßt man alles zusammen, ergibt sich ein geordneter Halbring, von dem wir zeigen können, daß er in die positiven reellen Zahlen eingebettet werden kann. Natürlich stößt man auch hier schnell auf die größte Komplexität, zum Beispiel alle Probleme der Zahlentheorie, aber die Grundgesetze sind doch sehr viel einfacher als bei den Gestalten. Ein Vergleichen von Gestalten im Sinne eines „Mehr oder Weniger“ ist nur unter ihnen äußerlichen Gesichtspunkten möglich (wie erinnern daran, daß Gestalt von absoluter Größe unabhängig ist); ein Zusammen*fügen*, wenn es nicht ein beziehungsloses Nebeneinanderstellen bleiben soll, ist an ein Zusammen*passen* gebunden, das ebenso undurchsichtig ist und jedenfalls auf feste Gestalttypen beschränkt. Ein Analogon zur Proportionenbildung ist gar nicht zu erkennen; es ginge hier ja nicht um die *internen* Proportionen, durch welche Einzelgestalten konstituiert werden, sondern um Proportionen von Gestalten untereinander; aber was soll man sich unter einer Gestalt „Kreis:Quadrat“ vorstellen? Das Operieren mit Gestalten, wenn es nicht ein Operieren mit zugeordneten Quantitäten sein soll, bleibt ebenso schwer zu fassen wie diese selbst.

20

Das führt uns zum dritten und vielleicht entscheidenden Moment. Mit Quantitäten können wir nicht nur leichter operieren, wir können sie auch selbst hervorbringen, im theoretischen Vorwegnehmen, im täglichen Planen und Rechnen, *wir kennen ihr principium individuationis.* Das heißt natürlich nicht, daß wir die Ursachen für die Entstehung und Vermehrung von Quanta kennen, oder auch nur begreifen, *wie* sie sich vollzieht (etwa im Wachsen eines Baums). Aber wir überschauen mehr oder weniger vollständig, worin diese Entstehung oder Vermehrung (wenn sie denn stattfinden sollte) besteht, wie sie sich uns darstellt, wir können diese Veränderung a priori in unser Bild vom Weltzustand einbauen, und wir benötigen für diese Vorstellung nur ein einziges Datum, eine Anzahl oder eine Proportion. Ganz offensichtlich ist das für die diskrete Quantität, wo wir in einem ganz übersichtlichen Axiomensystem fassen, wie alle Anzahl aus der Einheit hervorgeht. Vom Kontinuum läßt sich solches natürlich nicht behaupten; aber wo wir keinen Begriff haben, der eine Quantität festlegt, wie die Diagonale in einem Quadrat oder das Verhältnis der Kreisfläche zur Fläche eines umbeschriebenen Quadrats, sind wir stets in der Lage, kontinuierliche Quantität durch diskrete einzugrenzen (jede Dezimalzahl stellt eine solche Eingrenzung dar), und zwar in einer für alle praktischen Zwecke genügenden Genauigkeit.

Anders verhält es sich mit der Gestalt. Zwar haben viele Gestalten, mit denen wir zu tun haben, ihr wohlbestimmtes, uns mehr oder weniger bekanntes Gesetz, seien sie durch φυσισ oder durch τεχνη hervorgebracht, durch natürliches Wachstum oder menschliche Zwecksetzung und ihr entsprechende Gestaltung. Aber oft ist dieses Gesetz so komplex, die Entstehung der Gestalt von so vielen, darunter uns unbekannten Faktoren beeinflußt, daß wir sie vom Zufälligen nicht unterscheiden können; wenn wir auch meinen, daß nichts sine ratione sei, bleiben uns doch viele rationes so dunkel, daß wir an ihr Vorhandensein *glauben* müssen. Die Formen eines alten Baumstumpfs, der treibenden Wolken, eines zusammengeknüllten Stück Stoffs entziehen sich der planenden Voraussicht wie der mathematischen Analyse; an jeder Stelle kann ein neues Formgesetz zu walten beginnen; keine zwei Blätter in einem Wald sind einander ganz gleich, wie Leibniz bemerkte. „Haben Sie gesehen", fragt Woyzeck den Hauptmann, „in was für Figuren die Schwämme auf dem Boden wachsen? Wer das lesen könnt!" Hier würde mathematisch exakte Determination geradezu Gefahr laufen, mit den Unschärfeprinzipien der heutigen Physik zu kollidieren. Oft freilich ist dieses Luxurierende und Unvorhersehbare, das den Gestaltbegriff so schwer traktabel macht, gerade derart, daß wir es im gewöhnlichen Planen nicht zu berücksichtigen brauchen (ein Maler hat es da schwerer).

21

Der letzte Abschnitt bringt uns eine bekannte Äußerung von Gauß in den Sinn: „Wir müssen in Demut zugeben, daß, wenn die Zahl bloß unseres Geistes Produkt ist, der Raum auch außer unserem Geiste eine Realität hat, der wir a priori ihre Gesetze nicht vollständig vorschreiben können"[26]. Natürlich findet sich auch in unserer Raumerfahrung manches Apriorische, wie die metrische Struktur, die Dreidimensionalität, die

Homogenität, dazu gewisse Zusammenhangsqualitäten. Aber dieses Apriori reicht nicht aus, die mathematische Struktur des Raumes vollends festzulegen, es bleibt ein experimentell zu ermittelnder Rest (ein Experiment, welches Gauß übrigens selbst unternommen hat); noch viel weniger reicht es aus, die im Raum begegnenden Gestalten überschaubar zu machen. Wir können uns leicht vorstellen, auf einer eckigen Welt zu leben, aber zu den Quantitätsbegriffen haben wir keine Alternativen, alles Mehr oder Weniger ist vom selben Typus. Die Theorie der Ordinalzahlen präzisiert dies: von je zwei total geordneten Mengen kann stets eine in die andere eingebettet werden, es kann also die Ordnungsbeziehung der kleineren Menge durch die der größeren dargestellt werden. Logisch spiegelt sich dies im *kategorischen* Charakter der Basistheorien: nach dem Rekursionssatz von Dedekind gibt es bis auf Isomorphie nur *ein* Mengenmodell der Peanoaxiome, und je zwei vollständige angeordnete Körper sind isomorph [27)]. In der Gestaltkategorie gibt es dazu keine wirklichen Analoga; natürlich können einzelne (einfache) Gestalten durch bestimmte Gestaltmerkmale charakterisiert werden; aber es gibt unter diesen keine Merkmale von so universellem Charakter wie die Nachfolgerabbildung oder die Vollständigkeit.

22

Quantität ist immer nur *einer* Art der Veränderung fähig (aber in zwei Richtungen), und diese kann vom theoretischen Agieren leicht antizipiert werden; bei der Gestalt bilden die Möglichkeiten der Veränderung selbst ein Kontinuum, das sich der Überschau verweigert. Schon der Übergang von einer zu zwei Dimensionen zeigt den Unterschied – auf einer Geraden kann man sich nur vorwärts oder rückwärts bewegen, in der Ebene steht an jedem Punkt ein Kontinuum von Richtungen offen, die in einem auch noch so kleinen Wegstück sämtlich durchlaufen werden können. Eine jedem Anfänger geläufige mathematische Folge ist, daß wir bei Funktionen *einer* reellen Veränderlichen nur zwischen rechts- und linksseitigem Grenzwert unterscheiden müssen, während in der Ebene zu jeder Richtung eine partielle Ableitung gehört. So betrachtet, scheint der Unterschied zwischen den Möglichkeiten der Quantitätsveränderung und denen der Gestaltveränderung selbst als etwas bloß Quantitatives, ein Mehr an Dimension; aber hier muß wohl doch von einem Umschlag ins Qualitative gesprochen werden. Zu welch unendlicher Finesse schon die Kombinatorik einfacher zweidimensionaler Gestalt fähig ist, zeigen das Tangram-Spiel und der zwar bewiesene, aber noch keineswegs befriedigend verstandene Vierfarbensatz; auf der Geraden verschwindet beides in Trivialität.

23

Der chimärische, sich entziehende Charakter des Gestaltbegriffs beruht nicht allein auf der Vielzahl seiner Aspekte; auch auf der Undurchsichtigkeit ihrer Beziehungen untereinander, ihrem uneinheitlichen Vor- und Zurücktreten, der Schwierigkeit, das „geistige Band“ zwischen ihnen zu erkennen; am meisten vielleicht darauf, daß die Gesamtgestalt bei allem kombinatorischen Reichtum ihre Einheit behält, immer als ein Ganzes erscheint, das mehr ist als die Summe seiner Teile oder Aspekte, wobei wir aber dieses Surplus nicht recht dingfest zu machen vermögen. An diesem „nicht-additiven“

Charakter unserer Gestaltwahrnehmung sind natürlich auch psychologische Momente beteiligt, individuelle Assoziations- und Assimilationsmuster; kaum objektivierbar ist auch die Rolle des Auffallenden und Prägnanten, welches einzelne Gestalten oft so unverwechselbar macht, wie eine einzelne Schräge zwischen lauter rechten Winkeln, der einzelne Bogen zwischen lauter Geradem, die Abweichung von einer erwarteten Proportion oder Symmetrie. Solche schwer einzugrenzenden Einschüsse von Subjektivität sind wohl auch ein Grund dafür, daß Philosophie sich vom Gestaltbegriff so lange ferngehalten hat.

Methodisch muß hier gefragt werden, ob die Empfindung des „Nicht-Additiven" nicht einfach daher rührt, daß man den Gestaltbegriff zu kurz nimmt. Wo man sagt, das Ganze sei mehr als die Summe seiner Teile, wird suggeriert, daß das Ganze doch mit seinen Teilen schon gegeben sein müsse, und leicht übersehen, daß es eben viele Möglichkeiten geben kann, aus den Teilen eine Summe zu bilden und daß, anders als beim Summieren von Quanta, die verschiedenen Möglichkeiten zu verschiedenen Ganzen führen; so daß das Ganze sachgemäß definiert werden muß als eine bestimmte Art der Summation bestimmter Teile. Etwa zu sagen, daß ein Quadrat aus vier gleich langen Seiten besteht, ist zwar nicht falsch, aber keine Definition der Quadratgestalt; zu definieren ist sie vielmehr als eine bestimmte Weise, in welcher die Seiten zusammengefügt sind (Analoges gilt für die Melodien, das bekannteste Paradigma der Gestalttheorie). Berücksichtigt man das, verschwindet das halbmystische Mehr des Ganzen, oder genauer: die subjektiven und die objektivierbaren Teile der Gestaltwahrnehmung werden säuberlich getrennt.

24

Gibt es also für die Prädominanz der Quantität und damit auch für jene „feindliche Übernahme" plausible, in unserer kategorialen Verfassung liegende Gründe, so läßt die Entwicklung der Mathematik in neuerer Zeit eine Gegenbewegung erkennen. Der kombinatorische Aspekt der Gestalt, soweit ihn wenigstens die Homotopietheorie erfaßt, ist in einem Grade bewältigt, daß er mathematisches Eigenleben führen kann und (man möchte sagen, zwangsläufig) zu einer Axiomatisierung der Homotopietheorie und damit erneut zu einer axiomatischen Gestaltmathematik geführt hat. Diese hat keinerlei Ähnlichkeit mehr mit der axiomatischen Geometrie der Griechen, die nur eine Theorie bestimmter elementarer Gestalten war (und das gilt auch von Hilberts Redaktion); vielmehr ist sie eine Mathematik kombinatorischer Gestaltgesetze in denkbar größter Allgemeinheit. Natürlich sind aus ihr die Zahlen nicht verschwunden, aber sie spielen eher eine dienende als eine tragende Rolle, zum Beispiel als Koeffizienten von Homologiegruppen; auch treten sie eher in ihrem kombinatorischen Aspekt (etwa als Gruppenordnungen) auf denn als Quantitäten.

Im Licht der vorangegangenen Diskussion ist der wesentliche Fortschritt darin zu sehen, daß wir die Objekte, von denen wir etwas wissen wollen, nunmehr selbst erzeugen und mit ihnen rechnen können. Eine Triangulierung oder Zellenzerlegung ist keine *Analyse* wie die Primzerlegung einer Zahl, sondern eine *Rekonstruktion* (die übrigens, im Gegensatz zur Primzerlegung, *niemals* eindeutig ist [27a)]). Poincarés Behandlung der

Analysis Situs war der erste echte Kalkül mit Gestalten, heute in die simpliziale und singuläre Homologietheorie übergegangen. Elementare Gestalten werden so geläufig, wie vordem nur die Zahlen waren; die moderne Theorie entwickelt alle relevanten Objekte aus dem Einheitsintervall und bringt es sogar zu einer Klassifikation (freilich nur der Bordismenklassen) in Form eines Rings. Glaubt man den cognoscenti, so ist mit dem homotopischen Begriff des Spektrums ein neues Paradigma entstanden, welches die traditionelle Mathematik der Gestalten wie der Zahlen umfaßt; das Sphärenspektrum nehme die Stelle von $\mathbb{Z}$ ein [28)]. Man könnte freilich den Spieß auch umdrehen und feststellen, daß Begriffsbildungen algebraischen Ursprungs die Topologie durchsetzen. Besser ist wohl, neutral zu bleiben und, anstatt von einer Übernahme, von einer Art Konvergenz von Algebra und Topologie zu sprechen. Der Begriff des Moduls hat seinen Ursprung im Verrechnen von Quantitäten [29)], der Begriff der Homotopie beschreibt Deformation von Abbildungen ineinander; beide lösen sich von ihren Ursprüngen und werden kategorial. Die Konstruktionen, welche die Topologie mit so beeindruckender Geläufigkeit handhabt, Summen und Produkte, verschiedene Kegelbildungen, Schleifenräume und Einhängungen, Ankleben von Zellen, sind kategorialer Natur oder lassen sich wenigstens kategorial formulieren, eine Kombinatorik von Pfeilen und Diagrammen [30)]. Eine Synthese von Topologie und Algebra war auch schon, wie eingangs angedeutet, Grothendiecks Begriff des Schemas, mit dem sich die klassische algebraische Geometrie gleichsam verflüssigte und die Freiheiten topologischer Bildungen aneignete. Wie die Synthese der Synthesen aussieht, ist Gegenstand laufender Arbeit; aber sie kann nicht ausbleiben, denn auch hier ist, wie Hegel sagt, das Wahre das Ganze.

25

Die Geschichte der Mathematik, wie die der Naturwissenschaft, ist auch eine solche der Entfernung von der Anschaulichkeit und damit auch von Einteilungen, welche unsere Anschauungsformen nahelegen; diese bleiben für die Erfahrung fundamental, aber die Wissenschaft läßt sie unter sich, das Verbindende gewinnt Übergewicht über das Trennende. Zunächst sind es Verallgemeinerung und Abstraktion, welche das sinnlich Erreichbare verlassen. Die Anschauungsbegriffe von Fläche und Körper werden verallgemeinert zum Begriff der Mannigfaltigkeit, der a limine keine Dimensions-beschränkung kennt und auch von der Einbettung in einen Standardraum (und der damit gegebenen Orientierung) abstrahiert; aus dem Rechnen mit Quanta entstehen die abstrakten Begriffe von Ring und Körper mit ihren unendlich vielen Realisierungen. Immerhin sind auch die abstrakten Gebilde vom Anschaubaren aus noch konstruktiv einholbar: jede „vernünftige“ Mannigfaltigkeit besitzt eine Zellenzerlegung, die Zellen sind homöomorph zu einer Einheitszelle, diese entsteht aus dem Einheitsintervall durch Produktbildung; jeder Ring entsteht durch Restklassenbildung aus einem Polynomring über $\mathbb{Z}$.

Verallgemeinerung und Abstraktion sind elementare Operationen des theoretischen Agierens. Jeder Gegenstand wird unter bestimmten Hinsichten erfaßt; Verallgemeinerung besteht darin, in einzelnen Hinsichten mehr Bestimmungen zuzulassen, Abstraktion darin, von einzelnen Hinsichten ganz abzusehen. Verallgemeinerung kann, aber muß nicht aus dem Anschauungsrahmen hinausführen; Abstraktion verläßt ihn immer, weil jeder angeschaute Gegenstand in allen möglichen Hinsichten bestimmt ist. Aber was am stärksten von der Anschauung abdrängt, spricht die elementarste aller Erfahrungen der Erkenntnis aus: daß die Gesetze hinter den Phänomenen eben *hinter* diesen stehen und von ihnen oft verdeckt werden. Schon Aristoteles vermerkt, daß das „für uns Erste" in der Regel nicht mit dem „von der Sache her Ersten" zusammenfällt, nach dem alle Wissenschaft strebt. Berücksichtigen wir den Einwand der kritischen Philosophie, werden wir als das „von der Sache her Erste" dasjenige ansehen, wodurch wir eine Sache verstehen und beherrschen. Das Entstehungsgesetz der Zahlen beschreibt die überschaubare Axiomatik von Peano; aber gleich am Anfang der Zahlentheorie erscheint der Begriff der Primzahl, auf den von jener Axiomatik her gar kein Licht fällt, dessen Gesetze zu ergründen sich schon Generationen abgearbeitet haben [31)]. Das einfache „Eins-nach-dem-Andern" ist für uns etwas Erstes und Unhintergehbares; aber es könnte sein, daß die Zahlenforschung einmal in einen ganz andern, dem ersten Blick vielleicht recht seltsam anmutenden Begriff münden wird, der auch über die Primzahlen strukturellen Aufschluß enthält. Ähnlich hat die Topologie seit langem verstanden, wie Gestalten entstehen (und das war sehr viel schwieriger als bei den Zahlen), aber die Beziehungen zwischen ihnen, die das Ziel der Wissenschaft sind, hat sie damit noch längst nicht in der Hand. Die *principia individuationis* der Gestalten ganz zu beherrschen, gelingt ihr nicht (wenn sie ihnen auch zweifellos ein gutes Stück nähergekommen ist); dazu ist die Abstraktion zu groß, bleiben auch die Funktionenräume immer noch zu reichhaltig. So ist unendlich viel Scharfsinn in die Homotopiegruppen der Sphären geflossen, ohne daß ein abschließendes Resultat erreicht wäre. Der erwähnte (homotopische) Begriff des Spektrums verläßt übrigens die Anschauung entschieden; die ihn beherrschenden Konstruktionen von Schleifenraum und Einhängung haben nur in den allerersten und -einfachsten Fällen eine Art von Sichtbarkeit (das Sphärenspektrum zeigt sich dem Auge bis zur Dimension 2). Man sollte hier auch vermerken, daß die universellen Objekte, welche der homotopisch formulierten Topologie ihre Durchschlagskraft geben (wie klassifizierende Bündel und Räume), fast durchweg durch Limesbildungen in unendliche Dimensionszahl entstehen und damit natürlich aller Anschauung entzogen sind, nichts anderes mehr als Fiktionen, die ein Sprachspiel ordnen (ein paradoxes Schauspiel: das Unendliche als Vereinfacher, wie ein Fluchtpunkt, der außerhalb der Bildfläche liegt, aber seine Linien in das Bild wirft). Das, wodurch wir Zahlen und Figuren *letztlich* verstehen (mit Peirce: im schließlichen Konsens der Forschergemeinschaft, wenn ein solcher erreicht werden sollte), wird nicht selbst von dieser Art sein, sondern etwas kategorial gänzlich verschiedenes.

26

Kehren wir zum Ausgang unserer Betrachtungen zurück. Die alte Mathematik der Zahlen und Figuren, wie sie Novalis kannte, konnte sich nie im Ernst anheischig machen, „Schlüssel aller Kreaturen" zu werden. Die seither vollzogene Transformation der Mathematik gibt einem solchen Anspruch mehr Gewicht, weil sie das mathematische Denken von der Oberfläche der Dinge, dem Sichtbaren und Zählbaren, in die Sphäre des theoretischen Agierens geführt hat. Die Ordnungsstrukturen, welche durch die kategorialen Begriffe beschrieben werden, waren ursprünglich solche mathematischer

Sachverhalte und von essentiell kombinatorischem Charakter; mittlerweile hat sich gezeigt, daß sie von sehr großer Allgemeinheit sind und bis in Sprache und Logik heraufreichen. Namentlich die Theorie der Topoi steht mit der Logik in so inniger Verbindung, daß man von partieller Identität reden kann. Demnach ist zu erwarten, daß man jenen Strukturen auch im Erkennen der Kreaturen begegnen wird; dies ist freilich zunächst nicht mehr als eine formale und triviale Folgerung.

„Kreatur“ meint vor allem das geschaffene Lebendige, und in welchem Sinn oder Grad eine Mathematik nach Art unserer heutigen ihm nähertreten kann, bleibt fraglich. Ludwig von Bertalanffy, der den traditionellen Antagonismus von mechanistischer und vitalistischer Auffassung durch seine eigene „organismische“ Theorie überwinden wollte, hat die Forderung nach einer „allgemeinen Systemlehre“ erhoben, die logisch-mathematischer Art sein müsse; was speziell die Biologie betrifft, so meinte er, daß „die Entwicklung einer nicht-quantitativen oder „Gestaltmathematik“ für die biologische Theorie von Bedeutung sein könne. Es würde sich ... um eine Mathematik handeln, in der nicht wie in der gewöhnlichen, der Physik so ausgezeichnet angepaßten Mathematik der Begriff der Größe, sondern der der Form oder Ordnung die primäre Rolle spielen würden“ [32)]. Wie wir gesehen haben, fehlt es heute nicht mehr an einer solchen Mathematik; auch was die allgemeine Systemtheorie betrifft (die nach Ansicht mancher am besten kategorial formuliert werden sollte), hat die Mathematik, auch hier ihrem eigenen Gesetz folgend, schon viel geleistet. Kann es ihr gelingen, Novalis zu widerlegen? Da zumindest zum menschlichen Lebendigen die Fähigkeit zur Selbstreferenz gehört, wird eine Mathematik, die das beanspruchen will, die logische Sphäre nicht allein als Metasphäre über sich, sondern gleichzeitig als Gegenstand in und vor sich haben müssen. Die enge Verbindung von Kategorientheorie und Logik gibt der Hoffnung Raum, daß die oben angedeutete, sich abzeichnende Kategorifizierung uns diesem Ziel näherbringt.

Anmerkungen und Nachweise

(1) Der vollständige Text lautet:

> Wenn nicht mehr Zahlen und Figuren
> sind Schlüssel aller Kreaturen,
> wenn die, so singen oder küssen,
> mehr als die Tiefgelehrten wissen,
> wenn sich die Welt ins freie Leben
> und in die Welt wird zurückbegeben,
> wenn dann sich wieder Licht und Schatten
> zu echter Klarheit werden gatten,
> und man in Märchen und Gedichten
> erkennt die ewgen Weltgeschichten,
> dann fliegt vor Einem geheimen Wort
> das ganze verkehrte Wesen fort.

Das Gedicht gehört zu den nachgelassenen Fragmenten zum „Heinrich von Ofterdingen“. Es wäre übrigens verfehlt, hier eine vulgär-romantische Wissenschaftsfeindlichkeit herauszulesen. Der Dichter besaß eine respektable mathematische Bildung und stellte diese Wissenschaft sehr hoch. Siehe dazu das einschlägige Kapitel in K.Radbruch, Mathematische Spuren in der Literatur, Darmstadt 1997.

(2) Eine affine Ebene, die den Satz von Pappus-Pascal erfüllt, ist eine Koordinatengeometrie über einem Körper. Dieser enthält ein Einselement, dessen additives Erzeugnis ein homomorphes Bild der ganzen Zahlen ist. Gibt es auf den Geraden der Ebene eine Relation “zwischen” mit den richtigen Eigenschaften, ist der Körper angeordnet, jenes Bild also ein isomorphes. Eine konzise Zusammenfassung findet man bei E.Beth, The Foundations of Mathematics, Amsterdam 1959, S.139 ff.

(3) Siehe meine Arbeit “Das kategoriale System und der Ort der Mathematik”, Hamburger Beiträge zur Mathematik 2005, und die dort erwähnte Literatur. In Chisholms „Realistic Theory of Categories“ gehört „Rand“ bzw. „Beranden“ zu den undefinierten Grundbegriffen, und der Rand konstituiert die Gestalt (s.u.), so daß der kategoriale Charakter des Gestaltbegriffs hier wirklich, und, soweit ich sehen kann, erstmals anerkannt und zur Geltung gebracht wird. Wie unsicher Philosophie hier traditionell war, zeigt sich bei Aristoteles, der einmal Gestalt als eine Art Quantität ansehen möchte (de anim. 425 a 17: μεγεθοσ γαρ τι το σχημα). Nicht viel besser ist die Behauptung einer modernen Enzyklopädie, daß Gestalt logisch betrachtet ein Ordnungsbegriff sei. – Die psychologische Gestalttheorie hat den Begriff sogleich grenzenlos verallgemeinert, ihn sogar in die Zahlbegriffe und die Logik hineingetragen (siehe M.Wertheimer, Drei Abhandlungen zur Gestalttheorie, Erlangen 1925). Das erste und bekannteste Beispiel war übrigens (bei v.Ehrenfels) nicht physische, sondern Schall-Gestalt, Melodie. Piaget hat die Gestalttheoretiker kritisiert, deren Feldbegriff ihm zu statisch erschien und für die individuellen Ordnungs- und Äquilibrationsleistungen bei der Gestaltwahrnehmung nicht genug Raum lasse; er möchte wahrgenommene Gestalt als Produkt „statistischer oder probabilistischer Aktivitäten“ konstruieren (Biologie und Erkenntnis, Frankfurt/M 1992, S.255f). Es ist aber nicht recht einzusehen, wie damit der „nicht-additive“ Charakter erklärt wird. Jedenfalls betrifft dies höchstens die subjektive Konstitution der Gestaltwahrnehmung, nicht die wahrgenommenen Gestalttatsachen. Jeder kann *sehen*, ohne zu rechnen, daß man die Ebene mit (regulären) Sechsecken, aber nicht mit Fünfecken pflastern kann; und daran ist nichts Statistisches oder Probabilistisches.

(4) Siehe dazu Mac Lane/Moerdijk, Sheaves in Geometry and Logic, Springer 1992, Ch. IX. Hinreichend dafür ist eine milde Regularitätsvoraussetzung („sober“), die von allen Hausdorffräumen erfüllt wird.

(5) F.W.Lawvere, Categories of Space and of Quantity, in: The Space of Mathematics, J.Echeverria/A.Ibarra/T.Mormann (eds), de Gruyter 1992. Siehe auch die Diskussion in meinem Buch „Mathematik für Philosophen“, Leipziger Universitätsverlag 2005, 14.3.

(6) Siehe M.J.Greenberg, Lectures on Algebraic Topology, Benjamin 1967, 27.9.

(7) Das gilt für „mathematische“ Linien ohne Breite; ein „sichtbares“ (ebenes) Kreuz ist natürlich ein berandetes Flächenstück.

(8) Ein Rahmen für eine Mathematik nicht der Einzelgestalten als vielmehr ihrer Gesamtheit wäre, bei fester Dimension n, die Menge der n-dimensionalen, zusammenhängenden, berandeten Mannigfaltigkeiten im n-dimensionalen Raum, modulo der Operation der von den Rotationen, Translationen und Homothetien erzeugten Untergruppe der affinen Gruppe. Es sollte möglich sein, diese Orbitmenge wenigstens zu metrisieren. Für $n = 1$ besteht sie aus einem Punkt.

(9) Siehe M. Do Carmo, Differentialgeometrie von Kurven und Flächen, Braunschweig 1983.

(10) Siehe dazu W.S.Massey, A Basic Course in Algebraic Topology, Springer 1991, S.114.

(11) Man erhält so die 2g „kanonischen“ Erzeuger der (ersten) Homologiegruppe.

(12) Siehe etwa J.Hocking/G.Young, Topology, Addison-Wesley 1960, S.176.

(13) Die heutige Physik würde vielleicht widersprechen, unter Hinweis auf absolute Konstanten wie die Lichtgeschwindigkeit.

(14) Siehe dazu F.Waismann, Einführung in das mathematische Denken, München 1970, S.198.

(15) Disquisitiones generales circa superficies curvas, Werke IV.

(16) Siehe dazu J.Milnor, Morse Theory, Princeton UP 1963.

(17) Poincaré sprach die Vermutung nur für die Dimension 3 aus, welche sich als die schwierigste erwiesen hat; das Problem scheint nunmehr gelöst zu sein.

(17a) Eine Formel, aus der sie folgt, kannte schon Descartes, wie erst in neuerer Zeit bekannt wurde. Siehe dazu T.tom Dieck, Topologie, S.328.

(17b) Systematisch ausgenutzt wird das mit den „bump-functions“, die für die differentielle Topologie unentbehrlich sind (z.B. für die „Teilungen der Eins“).

(18) Siehe dazu S.Fefermans einschlägige Aufsätze in: In the Light of Logic, Oxford UP 1998.

(19) in: Le Labyrinthe du Continu, J.-M.Salanskis (ed), Springer 1992. Gegen die Mathematisierung kontinuierlicher Gestalt durch Punktmengen kann der grundsätzliche Einwand erhoben werden, daß dies dem Begriff des Kontinuums zuwiderläuft, wie schon Aristoteles herausarbeitete, Kant bekräftigte und in der Folge auch Mathematiker wie

Weyl und Thom. Andererseits kann gefragt werden werden, in welchem Umfang die Anschauung als Leitfaden für die Mathematik des Kontinuums dienen kann. Ich verweise auf die Diskussion in meiner „Mathematik für Philosophen“ (Anm. 5), 8.6.

(20) Übrigens ist bemerkenswert, mit wie groben Approximationen sich unser Gestalterkennen zufriedengibt; das erinnernd-assoziierende Denken baut aus kleinsten Chiffren die ganze vital gesättigte Form auf. Einem guten Zeichner genügen ein paar Striche zur Wiedergabe einer Physiognomie mit einem bestimmten Ausdruck; erstaunlich auch die auf einfachste Linien bis zur Computerfähigkeit reduzierte, aber kaum verwechselbare Darstellung der Sportarten durch charakteristische Stellungen; das gleiche gilt für viele Hinweisschilder an öffentlichen Plätzen wie Bahnhöfen und Flughäfen. Vom Wickelraum bis zur Kapelle wird das ganze Repertoire einer solchen Lokalität aufgeblättert, hinzu kommen die Logos und Embleme der Werbung, die sich seit Jahrzehnten in die Lebenswelt drängen. Nur wenig davon ist Technobild im Sinne von Flusser, vieles stellt einfach eine Rückkehr zur Bilderschrift dar. Ein Analphabet hat es heute entschieden leichter als vor 100 Jahren.

(21) Die wohl beste Einführung in diese Materie gibt B.Booß, Topologie und Analysis, Springer 1977.

(22) Der Ursprung war ein Artikel von M.Kac im American Mathematical Monthly, 1966. Für Neueres kann man sich im internet informieren, etwa mit den Suchwörtern „hear shape drum“.

(23) Natürlich gibt es auch entgegengesetzte Fälle; über einen Wein erfährt man durch Riechen und Schmecken mehr als durch Sehen, über die Qualität eines Stoffs mehr durch Tasten; vor allem das Hören gewährt uns Welteindrücke, die anders nicht zu haben sind. All das ändert nichts am Übergewicht des Sehens.

(24) Hat man sich schon einmal darüber gewundert, wie lange die Mathematik gebraucht hat, den elementaren Begriff des einfachen Zusammenhangs zu formulieren? – Geradezu skandalös ist der Unverstand beim immer noch beredeten Turiner Grabtuch. Wenn man ein menschliches Gesicht einfärbt, ein Tuch darüber legt und dieses dann eben ausbreitet, wird das Gesicht wie eine Karikatur verzerrt erscheinen, weil die ganze Tiefenausdehnung in die Breite geht (man denke nur an den Abstand von Auge und Ohr). Diese Tatsache, auf die vor Jahrzehnten schon hingewiesen wurde, erledigt für jeden, der sie begriffen hat, die gesamte Frage mit einem Schlag; aber von öffentlichen Konsequenzen habe ich nichts bemerkt.

(25) Das gilt zunächst nur für extensive Quantität. Mit intensiven ist schlecht rechnen, sie haben eher einen Grad als eine Größe und verhalten sich nicht additiv.

(26) Gauß an Bessel, 1830 (Werke Bd. VIII, S.201).

(27) Genauer: kategorisch ist die L2-Theorie der natürlichen Zahlen (mit dem mengentheoretisch formulierten Induktionsaxiom): die L1-Theorie (Peanoarithmetik)

besitzt nach dem aufsteigenden Satz von Löwenheim-Skolem Modelle beliebiger unendlicher Mächtigkeit („Nichtstandardmodelle“).

(27a) Trivialerweise kann jede Triangulierung beliebig verfeinert werden. Von „schwacher“ Eindeutigkeit könnte man sprechen, wenn je zwei Triangulierungen eine gemeinsame Verfeinerung besäßen. Das trifft in kleinen Dimensionen zu und wurde allgemein eine Weile vermutet; jedoch hat sich diese „Hauptvermutung der kombinatorischen Topologie“ als falsch erwiesen. Siehe dazu R.Stöcker/H.Zieschang, Algebraische Topologie, Stuttgart 1988, S.252.

(28) O.Rognes/S.Schwede, Modern Foundations of Stable Homotopy Theory, Report Nr.46/2005, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Einleitung: „The initial „ring“ is no longer the ring of algebraic integers, but the *sphere spectrum* of algebraic topology....although spectra go beyond algebra, the classical algebraic world is properly contained in the stable homotopy category.“

(29) Siehe dazu meinen Aufsatz „Über Linearität“, in: Drei Studien zur Struktur der Mathematik, Hamburger Beiträge zur Mathematik 2006.

(30) Siehe H.-J.Baues, Combinatorial Foundations of Homology and Homotopy, Springer 1999.

(31) Genauer: die multiplikative Struktur der ganzen Zahlen ist für sich genommen auch nicht schwierig (ein unendliches Produkt zyklischer Halbgruppen, erzeugt von den Primzahlen, das ist die Eindeutigkeit der Primzerlegung); es ist ihre „Inkompatibilität“ mit der additiven, welche die Probleme der Zahlentheorie verursacht. Aus der Primzerlegung zweier Zahlen folgt im allgemeinen nichts über die ihrer Summe, vom Nachfolger einer Zahl weiß man nur, daß er zu ihr teilerfremd ist. Obwohl die multiplikative Struktur auf so durchsichtige Weise aus der additiven hervorgeht, stehen beide gleichsam wie Fremde nebeneinander.

(32) L.v.Bertalanffy, Das biologische Weltbild, Bern 1949, S.185ff, S.150. Freilich zeigt sich der Autor mathematisch nicht auf dem laufenden; so scheint er die Arbeit von Bourbaki nicht gekannt zu haben, mit welcher der Größenbegriff als mathematischer Leitbegriff bereits verabschiedet war.