

Hamburger Beiträge zur Mathematik

Ernst Kleinert

Was bedeutet logisches Gelten?

Heft 247

April 2006

Was bedeutet logisches Gelten?

von Ernst Kleinert

1

Die im Titel ausgesprochene Frage ist doppelsinnig. Sie meint zunächst: "Was bedeutet es, daß Logik gilt, was bedeutet das "gilt" in diesem Satz?" dann aber auch: "Welche Rolle spielt die Logik im menschlichen Denken?" Es ist klar, daß beide Fragen miteinander zusammenhängen, vielleicht sogar auf dasselbe hinauslaufen. Die Art des Geltens der Logik bestimmt ihre Rolle im Denken; ob es Sinn hat, ein Gelten außerhalb dieser Rolle zu suchen, ist fraglich (wir kommen darauf zurück). Wir nehmen unseren Ausgang von einer These, die auf die zweite Frage eine Antwort gibt: Die Gesetze der Logik, so wird gesagt¹⁾, sind Gesetze des richtigen Denkens. Zunächst wollen wir, wie es so fundamentalen Dingen zukommt, die vorkommenden Begriffe in einer für unseren Zweck geeigneten Weise präzisieren.

2

Die Begriffe des Logischen und näherhin des Schlüssigen haben einen ausufernden Gebrauch. Oft gebrauchen wir sie, wo von streng logischer Konsequenz keine Rede sein kann, vielmehr von einem Zueinanderpassen oder Stimmigsein. Auch wenn wir die Folgen einer Handlung voraussehen und sie dann ablehnen, ist das kein eigentliches Schließen. Oder wir sprechen von einem Fehlschluß, wo gar nicht geschlossen wurde, sondern sich etwa an eine Person oder ein Ereignis Erwartungen knüpften, die sich nicht erfüllten; manchmal sogar da, wo wirklich korrekt geschlossen, aber von falschen Voraussetzungen ausgegangen wurde. Schließlich nennen wir manchmal eine Handlung logisch, weil sie konsequent erscheint, wobei wir also Teleologie mit Logik verwechseln.

Unter logischen Gesetzen wollen wir alle Formeln einer Prädikatenlogik erster Stufe verstehen, die in allen Interpretationen wahr sind ("logisch wahr", wie eine schlechte Terminologie das nennt). Nach dem Vollständigkeitssatz sind dies genau diejenigen, die aus den üblichen Axiomen mit den üblichen Schlußweisen deduzierbar sind; wobei die Axiome nach technischen Gesichtspunkten gewählt sind. Unsere Diskussion wird sich auf einige Tautologien der Aussagenlogik beschränken, vor allem den Satz vom Widerspruch.

3

Den gesamten Gebrauch des Worts "Denken" zu untersuchen, können wir uns hier nicht zur Aufgabe machen. Wie Wittgenstein bei den Spielen, wird man auch hier wohl nur ein System von "Familienähnlichkeiten" ausmachen können. Wir sind an Logik interessiert; Logik hat zu tun mit Schließen, Schließen mit Urteilen, Urteile mit Begriffen. Es ist klar, daß längst nicht alles, was wir gewöhnlich Denken nennen, explizit begrifflich ist. Betrachten wir den Schachspieler, der eine Stellung studiert und Zugfolgen antizipiert. "Er denkt nach", wird jedermann sagen. Aber seine Tätigkeit wird meistens gar nicht zum

2

Begriff vordringen; er *sieht* vielmehr Stellungen auseinander hervorgehen, und wenn er daraufhin einen bestimmten Zug macht, hat er keinen Schluß vollzogen, sondern aus verschiedenen Möglichkeiten, die ihm vor Augen standen, eine gewählt. Er muß nicht eigens zu sich sagen, daß er etwa Figurenverlust vermeiden muß. Man kann das Schachspiel lernen und betreiben, ohne je einen Begriff zu gebrauchen; wir nennen es ein "Denkspiel", weil seine wesentlichen Handlungen "im Kopf" stattfinden ²⁾.

Unter Denken soll hier verstanden werden das Bilden von Gedanken (Frege sprach vom "Fassen", dazu unten mehr) und das Operieren mit ihnen. Den Ausdruck "Gedanke" benutze ich im Sinne von Frege ³⁾. Gedanke ist also propositionaler Gehalt, das, was wahr oder falsch sein kann. Die Operationen mit Gedanken schließen ein das Behaupten und Verneinen, das Verbinden von Gedanken zu neuen Gedanken (Freges "Gedankengefüge"), und das Erschließen von Gedanken aus gegebenen Gedanken.

Zur Illustration betrachten wir noch einmal unseren Schachspieler. Er denkt demnach nicht, weil er nicht mit Gedanken operiert, sondern mit visuell antizipierten Konstellationen von Figuren, also mit Vorstellungen. Auch ein menschlicher Rechner, der etwa eine Kolonne addiert, denkt nicht, sondern operiert mit Symbolen, obwohl hinter seinen Operationen eine Theorie steht, die sehr wohl gedacht sein will. Erst recht gilt das für die Rechenmaschine; auch sie operiert nicht mit Gedanken, sondern mit gewissen Darstellungen von Gedanken; die Symbolumwandlung, die der menschliche Rechner vollzieht, ist hier übersetzt in ein Verarbeiten elektrischer Impulse. Auf die Frage, wie sich der Gedanke dem denkenden Menschen darstellt, werden wir im Anhang eingehen.

Dieser Begriff von Denken ist zugegebenermaßen ein enger. Wir brauchen aber einen engeren Begriff, wenn wir zu eindeutigen Aussagen kommen und nicht zu vagen Formulierungen wie einem "eentlichen" oder "wesentlichen" Denken greifen wollen. Man sieht leicht, daß sich alles, was man so nennen wird, in solches Denken im engen Sinn übertragen läßt; das geschieht schon dann, wenn man es aufschreibt oder mitteilt. Auch ist klar, daß unser Begriff abdeckt, wofür Logik Gesetz sein kann.

4

Unsere Ausgangsthese führt uns jetzt zu der Frage, wann das Denken als *richtig* gelten soll. Gewöhnlich wird man, danach befragt, antworten, daß richtiges Denken eben solches sei, das den Gesetzen der Logik genügt. Auf dem Boden unserer These wäre das natürlich ein offensichtlicher Zirkel. Nun scheint nichts anderes übrigzubleiben, als zu sagen: die Richtigkeit des Denkens muß sich durch Konfrontation mit der Erfahrung, durch Bewährung erweisen. Aber das wäre ein Mißverständnis. Das Wort „richtig“ in unserer These bedeutet nicht „erfolgreich“; für den Erfolg des Denkens ist die Logik weder notwendig noch hinreichend (dazu unten mehr). „Richtiges Denken“ bedeutet vielmehr: Denken, wie es seiner natürlichen Funktionsweise nach sein sollte. Die letzte Instanz, bei der wir hierüber Auskunft suchen können, ist unser jeweiliges und individuelles Für-Gültig-Erkennen und Für-Wahr-Halten.

3

Hier tritt uns nun die These entgegen, mit der Frege den sogenannten Psychologismus aus den Angeln zu heben glaubte: die Logik habe es zu tun mit den Gesetzen des *Wahrseins*, nicht denen des *Fürwahrhaltens*. Sogleich drängt sich der Einwand auf, daß wir zum Wahrsein von Gedanken keinen andern Zugang haben als durch das Fürwahrhalten. Das sah natürlich auch Frege: "So verstehe ich unter Objektivität eine Unabhängigkeit von unserm Empfinden, Anschauen und Vorstellen, von dem Entwerfen innerer Bilder aus den Erinnerungen früherer Empfindungen, *aber nicht eine Unabhängigkeit von der Vernunft*; denn die Frage beantworten, was die Dinge unabhängig von der Vernunft sind, hieße urteilen, ohne zu urteilen, den Pelz waschen, ohne ihn naß zu machen" ⁴⁾. Zu dem Schluß, daß es ein Wahrsein unabhängig vom Fürwahrhalten gebe, veranlaßte ihn seine Überzeugung, daß wir die Gedanken beim Denken nicht erzeugen, sondern *fassen* ⁵⁾, was ihm besonders bei den Wahrheiten der Mathematik sinnfällig erschien. Ontologisch nötigte ihn das zu einem Gedankenplatonismus, der Annahme eines Gedankenreichs, das unabhängig vom Gedachtwerden besteht ⁶⁾.

Man sieht nun sofort, daß uns das Gedankenreich für unser Problem gar nichts nützen würde. Es bleibt ja immer noch die Frage, durch welches Merkmal wir das bloß Fürwahrgehaltene vom wirklich Wahrseienden, oder die bloß psychologischen von den wirklich logischen Gesetzen unterscheiden können. Der bloße Glaube an das Gedankenreich würde uns ja noch keinen privilegierten Zugang zu den wahren Gedanken verleihen, ebensowenig wie bloße Gottgläubigkeit zum Heil genügen kann ⁷⁾. Selbst ein solcher Zugang gäbe noch keine Antwort auf unsere Frage, warum richtiges Denken logisch sein muß.

Für die erste Frage allerdings, nach der Bedeutung des logischen Geltens, scheint der Mythos vom Gedankenreich etwas zu bringen, die Beruhigung nämlich, daß es das Wahre und Richtige, wie auch immer, aber jedenfalls irgendwie *gibt*, so daß unser Streben danach nicht sinnlos ist; das Gelten, was immer seine Natur sein mag, hätte so etwas wie ein ontologisches Fundament. Vielleicht ist die Anziehung, die von ihm ausgeht, darum so groß. "Der Satz von Pythagoras ist zeitlos wahr, gleichgültig, ob ihn irgendein Wesen denkt oder nicht." Vielleicht hat man sich an diese Art Rhetorik zu sehr gewöhnt, um Anlaß zum Widerspruch zu sehen. Welchen ausweisbaren Sinn hat diese Rede? Wie dumm, daß man nicht nachsehen kann, ob der Satz gilt, ohne ihn gleich denken zu müssen. Schwächen wir dementsprechend ab, verschwindet der Glanz des Absoluten: "Jedes Wesen, das sich auf unsere Mathematik einläßt, muß ihn anerkennen." Ist das mehr, als zu sagen, daß man ihn beweisen kann?

Wir lassen also das Gedankenreich auf sich beruhen und gehen auf dem eingeschlagenen Weg weiter; wegen der Wichtigkeit der Sache wollen wir uns aber in einem Anhang mit ihr auseinandersetzen.

Wodurch also ist Denken als richtiges zu erkennen? Wir haben festgestellt, daß nur eine Besinnung auf unsere Möglichkeiten des Für-Wahr-Haltens uns weiterbringen kann. Wir befinden uns damit bei dem, was Kant Transzendentalphilosophie nannte. Ihr zentraler Gegenstand ist das, was man das kategoriale System des Menschen nennen kann, die Gesamtheit seiner Möglichkeiten, Welt zu erfassen, sich begrifflich auf sie zu beziehen und das begrifflich Gefaßte in theoretischem Agieren zu bearbeiten. Auf allen drei Schichten dieses kategorialen Systems stellen wir bestimmte Gesetzmäßigkeiten fest. Der Raum, in dem wir uns finden, der Zeitfluß, dem wir unterworfen sind, die Wahrnehmungen und Empfindungen, die uns die Sinne geben, sie alle weisen bestimmte Strukturen und Ordnungen auf. Das "Kategoriale" liegt dabei darin, daß wir Alternativen zu diesen Ordnungen zwar theoretisch konstruieren und untersuchen, aber niemals wirklich erfahren können; die Alternativen sind höchstens denkbar, aber nicht "lebbar". Am ehesten lebbar erscheinen abweichende sensuelle Ausstattungen, die wir im Tierreich teilweise beobachten, wobei sich schon Grenzen zeigen; so vermögen wir ein Wesen ohne Tastsinn kaum zu denken ⁸⁾. Noch deutlicher werden unsere "kategorialen Grenzen" bei den Erfahrungsformen Raum und Zeit; einen vierdimensionalen Raum oder eine rückwärts laufende Zeit können nicht mehr wirklich vorstellen, immerhin noch mathematisch denken (die Physik freilich mutet uns das und mancherlei mehr zu). Anders verhält es sich mit der Organisation unseres theoretischen Agierens, zu dem die Logik ja gehört. Denn was immer wir auch zu denken versuchen, wir können es nur im Rahmen unserer Möglichkeiten des Denkens überhaupt; wir können nicht das Denken, ohne schon zu denken, "von außen" betrachten, ebensowenig wie man über seinen Schatten springen kann.

Illustrieren wir den Unterschied mit einem Beispiel. Die Tautologie $((p \vee q) \wedge (\neg q)) \rightarrow p$ (der disjunktive Syllogismus) bewährt sich in jeder Lage, in der es zwei Alternativen gibt, von denen wir eine ausschließen können. Auf den ersten Blick erscheint hier die Bewährung der Logik ähnlich der Bewährung eines mathematischen Modells etwa für einen Bewegungsvorgang wie das Schwingen eines Pendels. Jedoch besteht ein profunder Unterschied. Wenn das Pendel anders schwingen würde als vorausberechnet, würden wir schließen, daß unser Modell falsch ist, weil wir etwa einen Reibungskoeffizienten zu klein angesetzt oder eine Zwangskraft übersehen haben. Unsere Tautologie ist aber kein Modell, zu dem es eine Alternative gäbe. Ihre linke Seite (die Prämisse) ist unbestreitbar der "logische Kern" der beschriebenen Lage, ja genau betrachtet nur ihre formalisierte Beschreibung; von der Differentialgleichung, aus der wir die Bewegung des Pendels errechnen, kann man nichts dergleichen behaupten (schon die ihr zugrundeliegende Theorie der reellen Zahlen ist recht spekulativ und wohl nicht das letzte Wort der Mathematik in dieser Sache). An der Bewährung unserer Tautologie, also der Berechtigung des Implikationspfeils, können wir gar nicht zweifeln, und wenn sie einmal ausbleibt, werden wir schließen, daß wir eine Alternative übersehen oder q zu Unrecht ausgeschlossen haben, also in einer anderen Lage sind, als die linke Seite sie beschreibt.

Es ist diese spezifische Unbezweifelbarkeit, die auf den kategorialen Charakter verweist. Hier scheint eine Stelle zu sein, an der sich, mit Wittgenstein zu sprechen, "der Spaten zurückbiegt". Hat es noch Sinn zu fragen, warum wir das, was wir nicht denken können, tatsächlich nicht denken können?

8

Der Prototyp des Nicht-Denkbareren ist der Widerspruch; der Satz vom Widerspruch gilt als fundamentales Gesetz der Logik. Aristoteles hat ihn in aller gebotenen Ausführlichkeit formuliert: "Es ist nicht möglich, daß dasselbe demselben in derselben Hinsicht zur selben Zeit zukommt und nicht zukommt," und er fügt hinzu: "Dies ist das sicherste Prinzip von allen" ⁹⁾. Hier muß auffallen, daß der Satz nicht als *logisches*, sondern als *ontologisches* Prinzip ausgesprochen wird. Vom Denken und von der Logik ist in ihm keine Rede; er sagt etwas aus über die Seinsweise des Seienden. Durch die kritische Philosophie belehrt, sagen wir vorsichtiger: er sagt etwas aus über unsere Weise, das Seiende wahrzunehmen und aufzufassen. Er spricht nicht ein Gesetz aus, dem wir folgen *sollen*, sondern er konstatiert etwas, an dem wir nicht vorbeikommen, über das wir nicht hinwegkommen. Wenn man das ein Gesetz nennen will, dann ist es jedenfalls eines, das wir gar nicht übertreten *können*. Aus ihm leitet sich erst das - allerdings übertretbare - Gesetz ab, so zu denken, daß kein Widerspruch entsteht.

Der Satz selbst sagt nichts vom Denken, obwohl er durch das, was er aussagt, auf das Denken verweist: der Widerspruch kann nicht in den Sachen liegen, also muß er, wo er auftritt, durch das Denken entstanden sein. Er verweist aber auf das Denken schon durch seine Form, anders als etwa der Satz "Die Rose ist rot", mit dem ich aussprechen kann, was ich sehe, ohne Umweg über das Denken, in einem bloßen Reflex. Der implizite Denkvorgang bei unserem Satz wird durch die beiden Negationen angedeutet, die er enthält, und die wir gemäß der formalisierten Fassung $\neg(p \wedge (\neg p))$ als innere und äußere Negation unterscheiden können. Die Negation ist der theoretische Akt par excellence, mit dem das Denken der Welt gleichsam gegenübertritt und sich als logisches agens von ihr emanzipiert. Negation kann nur stattfinden, wo ein Sachverhalt, der vorliegt oder als vorliegend gedacht wird, mit einem andern verglichen wird, der nicht vorliegt, also vom Denken des Negierenden "mitgebracht" werden muß. Was verneint wird, ist nicht der Sachverhalt (dieser kann höchstens abgelehnt werden), sondern der Gedanke (hier folge ich Frege). Das Verneinen unterscheidet sich vom Verwerfen oder Ablehnen¹⁰⁾, was man zum Beispiel daran erkennen kann, daß sich das Verneinen iterieren läßt, das Ablehnen aber nicht. Zwar kann ich ein Getränk ablehnen, weil es bitter schmeckt, dann aber doch trinken, also die Ablehnung ablehnen, weil mir jemand sagt, daß es meiner Gesundheit zuträglich ist; aber das zweite Ablehnen ist ein ganz anderer Vorgang als das erste und hebt auch dieses nicht auf, denn den Geschmack lehne ich nach wie vor ab. Ablehnen kann auch ein Automat eine Münze, und hier würde das Ablehnen des Ablehnens gar keinen Sinn ergeben.

Das Verneinen ist ein *irreduzibler* Akt des theoretischen Agierens. Was beim Verneinen geschieht, läßt sich nicht weiter definieren, allenfalls durch mehr oder weniger synonyme Ausdrücke umschreiben. Eine Feststellung zu verneinen, kann man etwa sagen, heißt den in ihr ausgesprochenen Sachverhalt sozusagen durchzustreichen, ihn aus den möglichen Beschreibungen des gegenwärtigen Weltzustands zu tilgen. Diese Umschreibung macht eine wichtige und leicht zu übersehende Konsequenz deutlich: Wenn ich sage, daß die Rose nicht rot ist, sage ich nicht, daß sie eine andere Farbe hat; das *folgt* allerdings aus meiner Aussage ¹¹⁾, ist aber nicht ausgesagt und vielleicht gar nicht intendiert; es ist eben gar nichts Positives ausgesagt. Diese Natur des Verneinens geht bei der üblichen booleschen Interpretation verloren, wo man mit $\neg p$ durchaus etwas Positives setzt, nämlich das Komplement von p . Das Verneinen geschieht eben häufig in der Absicht, zum positiven Sachverhalt vorzudringen, wie bei dem schon erwähnten Fall von $((p \vee q) \wedge (\neg q)) \rightarrow p$. Der bloß "durchstreichende" Charakter des Verneinens tritt umso deutlicher hervor, je weniger man die Alternativen überschaut. Im Fall der Farben ist der Überblick leicht; wenn ich aber sage "Die Rose hat keine Tonart", habe ich fast nichts Positives ausgesagt, da ich die möglichen Prädikate nicht überschau ¹²⁾.

An dieser Stelle müssen wir eine wichtige Unterscheidung einführen. Ein Gedanke wie "Die Rose ist rot" kann einem wahrnehmbaren Sachverhalt entsprechen, kann Inhalt einer möglichen Erfahrung sein (auch dann, wenn er falsch ist). Solche Gedanken sollen *real* heißen ¹³⁾. Nach dem Gesagten kann dann kein verneinter Gedanke (kein Gedanke der Form $\neg p$) real sein, denn die Verneinung versetzt jeden propositionalen Gehalt in die theoretische Sphäre des Durchgestrichenen, des Nicht-Vorliegenden (den Fall der zweifachen Verneinung werden wir unten besprechen). Die Wahrnehmung kann einen verneinten Gedanken nur bestätigen, aber nicht "zeigen"; das wahrgenommene Nicht-so-Sein ist immer ein bestimmtes Anderssein. Das Nichtrotsein der Rose kann ich nicht sehen, sondern muß es aus ihrem Weißsein folgern; die Folgerung ist freilich so leicht zu ziehen, daß man den Gedankenschritt gar nicht mehr bemerkt und in der Tat sagt: ich *sehe*, daß die Rose nicht rot ist; aber diese Ausdrucksweise ist gewissermaßen elliptisch. Wenn die Rose weiß ist, kann ich ja ebensogut sagen "Ich sehe, daß sie nicht gelb ist"; das Feststellen des Nichtrotseins setzt also etwas "Mitgebrachtes" voraus, die weiße Rose kann mich "von sich aus" dazu nicht veranlassen; vielleicht habe ich erwartet oder gehofft, eine rote Rose zu sehen. Jedes Verneinen schließt eine Einmischung, einen *Akt* des theoretischen Agierens ein.

Von den drei klassischen Junktoren ist nun die Konjunktion der einzige, der aus einem Paar realer Gedanken wieder einen solchen machen kann (natürlich nicht immer). Es bedeute p "Ich sehe ein Pferd", q "Ich sehe einen Esel", beides reale Gedanken. Offenbar ist auch $p \wedge q$ real (ich kann ein Pferd sehen und daneben einen Esel). Der eigentliche Sinn der Disjunktion $p \vee q$ hingegen ist "Ich sehe ein Tier, das ein Pferd oder ein Esel ist; ich weiß aber nicht, welcher Fall vorliegt." Diese Aussage hat nicht einfach eine

Wahrnehmung zum Inhalt, sondern zugleich eine Stellungnahme zu dieser Wahrnehmung, nämlich daß ich sie nicht ganz deuten kann ¹⁴). Der Gedanke ist demnach nicht im oben eingeführten Sinn real, denn die Stellungnahme ist keine Wahrnehmung. Deutlicher ist der nicht-reale Charakter der Implikation $r \rightarrow s$, die ja auch dann wahr sein kann, wenn r im Augenblick nicht vorliegt; darin liegt sogar ihre wesentliche Funktion, als der logischen Form, in der wir Erfahrung (hier im Sinn von "Welterfahrung") sozusagen aufbewahren. Der eigentliche Sinn des "wenn r , dann s " ist gerade der, den die materiale Auffassung verleugnet, nämlich der eines *notwendigen* Nach-sich-Ziehens. Offenbar kann dieser Sinn durch eine *einzelne* Erfahrung gar nicht gefaßt werden, und er enthält zu einer Summe vorangegangener Erfahrungen einen theoretischen Akt der Induktion oder Extrapolation, den man dann mit Begriffen von Kausalität oder prästablierter Harmonie unterfüttern kann ¹⁵). Die Konjunktion dagegen hat eine "genuin reale" Funktion. Die Welt umgibt uns als real bestehende Konjunktion unübersehbar vieler Sachverhalte, und jede Beschreibung des Weltzustandes enthält eine Teilkonjunktion davon, wie "Die Sonne scheint, der Himmel ist blau" usw.

11

Nehmen wir nun an, p , "Die Rose ist rot", sei wahr. Im Widerspruch $p \wedge (\neg p)$ wird der wahre reale Gedanke p mit seiner Durchstreichung verbunden; diese Konjunktion ist schon formal kein realer Gedanke, da eine Negation im Spiel ist. Die äußere Negation im Satz vom Widerspruch, $\neg(p \wedge (\neg p))$, sagt, daß der so entstandene Gedanke immer falsch ist. Warum gilt der Satz vom Widerspruch, und was bedeutet das?

Man kann nun mit Frege antworten, daß er aufgrund der Bedeutung des Wörtchens "nicht" unmittelbar einleuchtet ¹⁶). Das ist nicht falsch, aber eine merkwürdige Auskunft, so als würde einem auf die Frage, warum Weiß jetzt matt ist, geantwortet: weil das aus den Regeln des Schachspiels folgt. Sie klingt, als hätten wir bei der Verteilung der Bedeutungen auf die Wörter noch das "nicht" übrig gehabt, dem wir dann eine Bedeutung gaben, derart daß der Satz vom Widerspruch in Geltung kommt ¹⁷), oder noch absurder: als hätten wir die Verneinung erfunden wie einen Zug im Schachspiel. Sollte man als Philosoph nicht auch fragen, wie wir zu den Bedeutungen der Wörter kommen und durch welche Akte wir uns ihrer versichern? Die Bedeutung von "nicht" und damit die Antwort auf unsere Frage ist im Akt des Verneinens enthalten und kann durch eine Besinnung auf diesen zwar nicht definiert, aber doch aufgehellt werden.

12

Der Widerspruch $p \wedge (\neg p)$ erscheint zunächst nicht als "einfach" falsch, so wie der Satz "Die Rose ist weiß", wenn sie in Wahrheit rot ist. Die meisten Sätze, die wir falsch nennen, sind derart, daß sie auch richtig sein könnten; sie sind "kontingent" falsch oder richtig. Vom Widerspruch gilt das nicht. Die Logik trägt dem Unterschied Rechnung, indem sie Modalitäten einführt und von "notwendig falsch" oder "unmöglich" spricht; so sind falsche mathematische Sätze notwendig falsch. Warum ist der Widerspruch notwendig falsch?

Der Widerspruch ist nicht einfach falsch, sondern *widersinnig*; er durchkreuzt den Sinn des Setzens wie des Verneinens, er fordert den Denkenden auf, einen Satz zugleich zu behaupten und durchzustreichen, gleichzeitig einen Schritt vorwärts und einen rückwärts gehen. Diese Widersinnigkeit erscheint nun in der Tat unmittelbar gründend im, oder begründet durch den Akt des Verneinens. Der Versuch, zwischen das Bilden des Widerspruchs und das Feststellen seiner Widersinnigkeit noch irgendetwas einzuschieben, eine weitere Erklärung oder Voraussetzung, ein logisches oder ein psychologisches Zwischenglied, mißlingt. Ein Versuch wie "Wenn p und gleichzeitig $\neg p$ wahr wären, wäre der Sinn der Durchstreichens aufgehoben" würde den Satz vom Widerspruch durch sich selbst begründen, obendrein unter Heranziehung des Tertium non Datur, was völlig absurd ist. Schon für Aristoteles zeigt der Versuch, den Satz zu beweisen, einen Mangel an Bildung an ¹⁸⁾.

Wie steht es nun mit dem Wahrheitswert? Einem *unsinnigen* Satz geben wir nicht ohne weiteres einen Wahrheitswert; er geht uns sozusagen nichts an, wie ein Antragsteller, der nicht einmal Anspruch darauf hat, einen Antrag stellen zu können. Den Satz "Die Rose steht in fis-moll" sehen wir in der Tat weder als wahr noch als falsch an; er ist gar kein "richtiger" Satz, sondern bei der Bildung des Satzes ist etwas danebengegangen, eine logische Funktion hat versagt; die philosophische Tradition spricht hier von einem Kategorienfehler ¹⁹⁾. Ist der Widerspruch weniger weit entfernt vom einfachen Falschsein als der unsinnige Satz, so daß er eher als dieser einen Wahrheitswert verdient? Auf formaler Ebene ist ein Unterschied kaum auszumachen; beide sind syntaktisch korrekt gebildet; der Widerspruch ist eine "zulässige" Formel, wenn p es ist. Hier sehen wir ein Argument dafür, dem Widerspruch einen Wahrheitswert zuzusprechen: wenn p und q wahrheitsdefinit sind (einen Wahrheitswert haben), dann sollten auch $\neg p$ und $p \wedge q$ es sein und damit auch der Widerspruch. Aber das ist letztlich ein technischer Gesichtspunkt, und wir werden nicht sagen wollen, daß ein Widerspruch nur konventionell falsch ist.

13

Zu etwas Nicht-Konventionellem kommen wir, wenn wir von der booleschen Interpretation der Verneinung ausgehen. Nach ihr ist $\neg p$ die logische Summe (Disjunktion) aller mit p unverträglichen Gedanken, also der "größte" solche Gedanke; dabei ist q mit p unverträglich, wenn $q \rightarrow \neg p$, in unserem Beispiel etwa "Die Rose ist weiß". Warum sind p und q unverträglich?

Nichts scheint klarer als das, wird man sagen. Ein Gegenstand kann eben nicht zugleich (ganz) rot und (ganz) weiß sein. Das ist eine Bedingung der Möglichkeit dafür, daß wir überhaupt Farbigkeit von Gegenständen wahrnehmen und über sie sprechen können. Wenn dieses Sprechenkönnen vom Wahrnehmenkönnen abhängt, werden wir also auf die Wahrnehmung als letzte Instanz geführt. Wenn ich versuche, mir eine Rose vorzustellen, die zugleich rot und weiß ist, dann kann ich nicht vermeiden, daß sich die Vorstellung in zwei Vorstellungen spaltet ("verzweigt", wie ein Mathematiker vielleicht sagen würde), die ich nicht mehr zur Deckung bringen, nicht mehr als Vorstellungen *eines* vorliegenden Sachverhalts denken kann. Könnte ich es, würde ich jenen Satz nicht als notwendig falsch ansehen, aber ich wäre schizophrän ²⁰⁾.

Etwas allgemeiner können wir sagen, daß die Bestimmungen unserer Wahrnehmungen hinsichtlich der verschiedenen Kategorien (im Sinne von Aristoteles) stets *eindeutig* sind. Wenn ich die Augen öffne, sehe ich *bestimmte* Gestalten in *bestimmten* Farben (und analog für die übrigen Sinne). Mitunter stelle ich fest, daß ich gar nichts Bestimmtes sehe. Das bedeutet aber nur, daß es mir nicht gelingt, das, was ich sehe, als diesen oder jenen Gegenstand, den ich vielleicht erwartet habe, zu identifizieren. Das Gesehene "deckt" sich nicht mit einem Bekannten, aber das ändert nichts an seiner Bestimmtheit.

Diese Art von Bestimmtheit oder Eindeutigkeit nennt die Philosophie *Faktizität*. Im gewöhnlichen Reden sagt man etwa "Es ist, wie es ist", womit man nicht sagen will, daß sich das, was ist, nicht ändern ließe, sondern daß alles Seiende in jedem Augenblick ein So-und-so-Beschaffenes ist, "so und nicht anders", wie man auch oft sagt, womit der Satz vom Widerspruch gleichsam widerwillig anerkannt wird. In solchen Wendungen kommt eine Art von Hilflosigkeit zum Ausdruck und damit implizit der Wunsch, sie zu überwinden; ein solcher Wunsch wiederum impliziert, daß der Satz vom Widerspruch nichts "an sich Geltendes" ausspricht, sondern eine Eigentümlichkeit unseres theoretischen Agierens und damit der *conditio humana*, jedenfalls in ihrer gewöhnlichen Form ²¹⁾. Cusanus (der kein Mystiker war, sondern ein Rationalist) hat in seiner Lehre vom "possest", vom "Können-Ist", eine andere Seinsweise in Betracht gezogen, die er Gott zuschrieb und in der alle Möglichkeiten des Seins gleichzeitig aktualisiert sind ²²⁾.

14

Jetzt greifen wir die Frage nach dem Gelten auf, zunächst nur für den Satz vom Widerspruch. Wir geben einer oben gemachten Unterscheidung einen Namen, wenn wir den Widerspruch in der Form $p \wedge (\neg p)$ *manifest*, in der "schwachen" Form $p \wedge q$, wo $q \rightarrow \neg p$, *latent* nennen ²³⁾. "Die Rose ist rot und weiß" ist vom Gesichtspunkt der Erfahrung ein "manifest" Widerspruch, logisch betrachtet aber latent, denn formal muß man vom Weißsein auf das Nichtrotsein erst schließen.

Der manifeste Widerspruch, sagten wir, ist widersinnig. Der Widerspruch verlangt von dem, der auf ihn stößt oder dem er mitgeteilt wird, etwas Unmögliches, nämlich gleichzeitig zu behaupten und zu verneinen. Einen solchen Gedanken kann man zwar bilden, aber man kann sich nicht auf ihn "einlassen", man kann keine Vorstellung entwickeln, die ihn „trägt“. Physikalistisch gesehen, hebt die *reactio* die *actio* auf, so daß gar nichts mehr geschieht und das Denken zum Stillstand kommt. Das Gelten des Satzes vom Widerspruch besteht in der Unmöglichkeit, zwei in solcher Weise entgegengesetzte Handlungen gleichzeitig zu vollziehen.

Freges Unterscheidung von Gedanken und „behauptender Kraft“ verdeutlicht die Sachlage weiter. Urteilen heißt nach Frege, einen Gedanken mit behauptender Kraft auszusprechen. Rein als Gedanke genommen, unter Aussetzung (*epoché*) der behauptenden Kraft, ist auch der manifeste Widerspruch behandelbar wie alle Gedanken, etwa im Rahmen geeigneter Logikkalküle ²⁴⁾. Erst wenn wir den widersprüchlichen Gedanken mit behauptender Kraft versehen wollen, tritt uns jene spezifische Unmöglichkeit entgegen.

Daß man mit einem Widerspruch nichts mehr sagt, stellt schon Aristoteles fest. Wenn die Aussage, daß die Rose rot ist, die Möglichkeit offenläßt, daß sie nicht rot ist, dann habe ich offenbar mit dem Satz "Die Rose ist rot" gar nichts ausgesagt, die Sprache läuft leer. Der Satz, der ihn ausspricht, beraubt sich der Möglichkeit, einen Sinn zu haben, wird zum bloßen flatus vocis. Ein manifester Widerspruch hebt die Rede, die ihn enthält, gleichsam auf, aber nicht im Hegelschen Doppelsinn, sondern rein zerstörend.

Der Widerspruch sagt also nichts mehr über die Sachen aus, wohl aber etwas über unser Denken der Sachen. Sein Auftauchen weist darauf hin, daß etwas nicht stimmt, daß sich das Denken verrannt hat. Wir werden zunächst nicht sagen können, wo und auf welche Weise, und es kann sein, daß dieses Sich-Verrennen etwas Aufschlußreiches ist und es sich lohnt, ihm nachzugehen und nach seiner Ursache zu fragen. Offenbar führte der begangene Weg zu einer Art Katastrophe oder Singularität (wie Mathematiker sagen könnten), zu einem Punkt, an dem "nichts mehr geht". So zwingt der Widerspruch das Denken, das bei den Sachen war, auf die Metaebene, zu sich selbst. Darin kann ein Gewinn liegen; manchmal ist der Widerspruch in der Tat willkommen, nämlich beim indirekten Beweis, allgemeiner überall da, wo das Labyrinth der Welt klein genug ist, so daß nach Erprobung aller Holzwege der richtige allein übrigbleibt.

Wo ein Widerspruch unerwünscht auftritt, haben wir falsch geschlossen oder sind von inkonsistenten Voraussetzungen ausgegangen. Fehlschlüsse kommen in der Regel schnell ans Licht; Fehler in den Voraussetzungen sind das größere Übel, da sie gewöhnlich schwerer aufzufinden sind und uns, wenn sie tief genug liegen, sogar zwingen, das Sprachspiel zu revidieren, derart, daß der Widerspruch nicht mehr auftritt oder, vorsichtiger gesagt, nicht mehr *auftaucht*. Denn der Widerspruch findet nur im Sprachspiel statt; es ist nicht so, daß das Denken auf einen "unmöglichen Sachverhalt" stößt (solche gibt es nicht), sondern es stößt gleichsam mit sich selbst zusammen.

Der manifeste Widerspruch $p \wedge (\neg p)$ wird impliziert von allen latenten Widersprüchen $p \wedge q$, wo $q \rightarrow \neg p$. Ein latenter Widerspruch wie "Die Rose ist rot und weiß" ist nicht unsinnig; man kann ihn widersinnig nennen, aber er ist es in einem andern Sinn als der manifeste: dieser verlangt, zwei Denkhandlungen zu vollziehen, die einander ausschließen, jener verlangt, zwei Vorstellungen zu bilden, die einander ausschließen. Der durch ihn ausgedrückte Gedanke kann nie Inhalt einer Erfahrung sein, selbst wenn p und q es sind, und zwar aus prinzipiellen Gründen: unsere Möglichkeiten des Erfahrens lassen das nicht zu ²⁵⁾. Der Gedanke ist nicht lebbar. In diesem Sinne ist er falsch, und zwar notwendig falsch. (Daß wir gerade diese kategoriale Ausstattung haben, müssen wir für kontingent halten. Da wir sie aber nun einmal haben, ist nicht mehr kontingent, was aus ihr folgt.) Jetzt haben wir einen guten Grund, auch den manifesten Widerspruch für falsch zu erklären: er ist sozusagen "mehr als falsch", indem er *alles* mit p Unvereinbare zugleich mit p bestehen lassen will, wo schon *eines* davon zur Falschheit der Konjunktion

genügen würde; wogegen der unsinnige Satz "Die Rose steht in fis-moll" *noch nicht einmal* falsch ist. Der widersinnige Satz enthält *zuviel* Sinn, beim unsinnigen ist es zur Konstitution von Sinn gar nicht gekommen.

Der Effekt des latenten Widerspruchs ist ähnlich dem des manifesten, nur schwächer, entsprechend der Tatsache, daß das q im latenten Widerspruch nur ein "Ausschnitt" von $\neg p$ ist (boolesch gesehen eine Teilmenge). Wenn jemand sagt, die Rose sei rot und nicht rot, müssen wir argwöhnen, daß er die Bedeutung von "nicht" nicht verstanden hat, womit ihm sein ganzes theoretisches Agieren entgleitet. Wenn er sagt, die Rose sei rot und weiß, hat er vielleicht nur die Bedeutung der Farbwörter nicht verstanden, oder seine Wahrnehmung der Farben ist gestört; eine solche Störung scheint weniger grundsätzlich, weniger tief zu sein. Der Unterschied ist erstens, daß wir nur zwei Wahrheitswerte kennen, aber viele Farbwerte, so daß das Zusammenfallen einiger von ihnen erträglich bleibt; zweitens und vor allem, daß Wahrheitswerte wichtiger sind als Farben. Wer blind ist, muß auf Farben (und noch viel mehr) ganz verzichten und kann trotzdem ein menschliches Leben führen. Wo aber Bejahung und Verneinung zusammenfallen, hört das Denken auf. Der latente Widerspruch nimmt dem Satz (vielleicht nur) einen Teil seiner Bedeutung, der manifeste die gesamte.

17

So erweist sich, daß "Gelten" mehr ist als ein bloßes Wort für die Seinsweise eines Idealen oder Abstrakten. In jedem wirklichen Gelten liegt ein Anspruch auf eine Art von Einflußnahme; was gilt, will beachtet, befolgt sein; seine Mißachtung kann sich rächen. Es gibt sovielerlei Arten des Geltens, wie es Arten der Einflußnahme gibt. Dabei ist der Anspruch auf die theoretische Sphäre beschränkt; wir sagen nicht von einem vorliegenden Sachverhalt, daß er gilt (er setzt seine Ansprüche von selbst durch), sondern allenfalls von dem Satz, der ihn ausspricht. Wir haben gesehen, wie das abstractum "Satz vom Widerspruch" sich in unserm Sprachspiel in der Tat *geltend macht*: seine Nichtbeachtung kann zur Folge haben, daß es seinen Sinn verliert; dies ergibt sich aus dem Gelten des Satzes, der Unmöglichkeit, zugleich zu bejahen und zu verneinen. Dieses Gelten hat seinen Ursprung nicht in einer Ordnung von Entitäten der erfahrbaren oder irgendeiner idealen Welt, sondern gehört zur Form unseres theoretischen Agierens.

18

Unterwegs hat sich auch gezeigt, daß die äußere Negation im Satz vom Widerspruch ein anderer Akt ist als die innere. Mit der inneren, "Die Rose ist nicht rot", streiche ich einen Gedanken durch und habe immer noch mit der Welt zu tun. Mit der äußeren, "Es ist falsch, daß die Rose rot und zugleich nicht rot ist", beurteile ich einen Gedanken, indem ich ihn für widersinnig erkläre; und dies hat mit der Welt nichts mehr zu tun, sondern gründet in der Organisation meines theoretischen Agierens. Die boolesche Vergrößerung ebnet diese (und andere) Unterschiede ein um eines glatten Kalküls willen; philosophische Nachfrage muß sie rückgängig machen, wenn sie über Banalitäten hinauskommen will.

12

Wir haben damit die Formulierung von Aristoteles ausgelegt, mit der kantischen Einschränkung, daß wir über das, was der Fall ist, nur urteilen können, insofern wir es erfahren und denkend erfassen können, verbunden schließlich mit der selbstverständlichen Tatsache, daß wir unsere Möglichkeiten solchen Erfassens nur auf dem Wege der Phänomenologie kennen lernen können, indem wir ihm und insbesondere den geltungsverleihenden Akten "zuschauen". Wenn man will, kann man das Psychologismus nennen ²⁶⁾.

19

Über die Unzulässigkeit des manifesten Widerspruchs, seinen disqualifizierenden Charakter ist sich die Menschheit erstaunlich einig, so wie sonst nur in mathematicis. Allein die Mystiker wagen ihn, um das Versagen menschlicher Rede angesichts bestimmter, aus dem gewohnten kategorialen Rahmen herausfallender Erfahrungen zu verdeutlichen. Aber nicht einmal Politiker, die Sätze wie "Die Homosexuellenehe schwächt die Familie" für schlüssig halten, würden einen manifesten Widerspruch zugeben; daher der Erfindungsreichtum im Wegreden und die Unverschämtheit im Weglügen von Widersprüchen. Eine probate Strategie zur Widerspruchsvermeidung ohne realen Aufwand ist auch die Beanspruchung der Ausnahme; was umso leichter fällt, je mehr man recht zu haben meint.

Der latente Widerspruch dagegen ist häufig ²⁷⁾, weil die Unverträglichkeit zweier Gedanken nicht immer so offen am Tage liegt wie beim Beispiel der Farben. Er kann sich umso leichter einschleichen, je länger der deduktive Weg vom latenten zum manifesten Widerspruch ist. Als ein Maß für seine Wahrscheinlichkeit könnte man die Anzahl der Schritte ansehen, die man in einem Dialog im Sinne von Lorenzen bis zum Sieg über den Proponenten des latenten Widerspruchs braucht. Widersprüche wie $(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$ sind "beinahe manifest". Wer habituell aus $p \rightarrow q$ auf $\neg p \rightarrow \neg q$ schließt, wird bald feststellen, daß sein Denken und Planen sich nicht bewährt, weil es häufig vorkommt, daß eine hinreichende Bedingung nicht notwendig ist. Doch schon wer meint, aus $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ auf $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ schließen zu dürfen, hat gute Aussichten, ungestraft davonzukommen, wenn er nicht gerade Mathematiker sein will. Solche Beispiele lassen darauf schließen, daß der gewöhnlichen Erfahrungs- und Denkwelt eine gewisse Komplexitätsschwelle innewohnt, derart, daß Widersprüche jenseits davon gar nicht bemerkbar sind, ähnlich wie wir auch das ultraviolette Licht nicht sehen können; zu ihrer Aufdeckung bedarf es dann wissenschaftlicher Anstalten.

"Rein logisch" betrachtet, ist der latente Widerspruch natürlich ebenso verderblich wie der manifeste, als der Kurzschluß, der das ganze System außer Kraft setzt, auch wenn er an entfernter Stelle auftritt. Die Wirklichkeit des theoretischen Agierens ist zum Glück weniger anfällig, selbst die mathematische; man denke nur an die Geschichte der Infinitesimalrechnung. Eine naive Theorie der Infinitesimalien, mit denen die Begründer dieser Disziplin operierten, produziert unausweichlich logische Konflikte (erst die moderne mathematische Logik hat hier gangbare Wege gebaut, indem sie die Metatheorie zum einschlägigen Diskurs in die Mathematik hereinnahm). Der Erfolg des Kalküls war aber derart, daß ein Verzicht auf ihn nicht mehr denkbar erschien und man den Makel

ertrug, mit der Hoffnung auf eine spätere einwandfreie Begründung (die ja dann auch nicht ausblieb). Auch ein Widerspruch in den Grundlagen ist also nicht notwendig fatal.

20

Der Satz vom Widerspruch dient nicht zum *Erschließen* von wahren, sondern nur zum *Ausschließen* von falschen Gedanken; ähnlich dem δαίμονιον des Sokrates kann er das Denken nicht führen, sondern nur kontrollieren. Das Gelten der meisten andern logischen Gesetze hängt nun am Satz vom Widerspruch, insofern eine Verletzung eines von ihnen zu einem Widerspruch führt und damit selbst als latenter Widerspruch anzusehen ist. Unter ihnen finden sich auch Schlußprinzipien, die ebenfalls das Denken nicht eigentlich leiten, aber doch voranbringen (sie sind wie eine Leiter, über die man heraufsteigen kann, wenn man sie vorher richtig angestellt hat). Am wichtigsten ist wohl der Modus Ponens $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$, der die logische Form des Aktualisierens einer Erfahrung $p \rightarrow q$ durch das Vorliegen von p darstellt (und von dem der schon herangezogene disjunktive Syllogismus eine Variante ist). Aus dieser seiner Funktion ergibt sich seine Ubiquität, denn der Mensch ist wesentlich ein erfahrungsmachendes Wesen; schon wenn man auf die Uhr schaut und daraufhin feststellt, daß der Zug angekommen sein müßte, hat man gemäß dem Modus Ponens geschlossen. Aus der Prädikatenlogik ist an erster Stelle die Syllogistik zu nennen ²⁸⁾.

Gegen Schlußregeln kann man verstoßen, indem man, in Kenntnis des Vorliegens der Prämisse, die Conclusio leugnet; das wird nur solchen unterlaufen, die den Schluß nicht als gültigen kennen. Häufiger ist die Verwendung von Regeln, die keine sind, wie der pervertierte Modus Ponens $((p \rightarrow q) \wedge q) \rightarrow p$. Wo das geschieht, wird freilich der "Schluß" nicht die Veranlassung der Handlung sein, sondern eher als eine Art theoretisches Dekor fungieren. Am häufigsten aber wird gegen die Schlußregeln gesündigt, indem man sie *nicht* anwendet, also Schlüsse nicht zieht, die man ziehen könnte (und sollte, wie beim Bridgespielen). Allerdings: wohin kämen wir, wenn wir stets alle möglichen Schlüsse zögen?

21

Wenn man wie Leibniz nicht glaubt, daß es kontingente Tatsachen gibt, muß man annehmen, daß jeder Irrtum einen latenten Widerspruch darstellt. In der Mathematik ist klar, daß alles Falsche einen (manifesten) Widerspruch zur Folge hat; aber zuweilen glauben auch bedeutende Mathematiker an Vermutungen, die sich dann als falsch erweisen (das kann Folgen haben, wenn man vorgreifend auf dem bloß Vermuteten weitergebaut hat). Daß sich der latente Widerspruch je ganz ausschalten läßt, scheint mehr als fragwürdig. Schließlich gibt es keine Garantie dafür, daß auch das vollständigste und bestbestätigte System wissenschaftlicher Aussagen widerspruchsfrei ist; im Gegenzug aber gewichtige Hinweise darauf, daß gewisse Irrtümer für den Menschen lebensnotwendig sind ²⁹⁾.

Andererseits ist hier festzustellen, was schon eingangs anklang: das Aneinanderreihen der Gedanken im gewöhnlichen theoretischen Agieren hat so selten den Charakter logischen

Schließens, daß für Widersprüche weniger Gelegenheit besteht, als man meinen könnte; meistens sind wir mit Sammeln, Suchen, Ordnen und Auswählen beschäftigt. Auch erklären wir leicht für widersprüchlich, was nur einen *Widerstreit* enthält. Dieser ist zunächst nichts Logisches, sondern bezeichnet nur "auseinanderlaufende" Tendenzen, die auf unvereinbare oder auch nur schlecht vereinbare Zustände *hinzielen*, wie das "odi et amo" des Catull. Ein echter Widerspruch wäre erst "amo et non amo"; aber von jemandem, der das sagte, würden wir urteilen, daß er nicht weiß, ob er liebt oder nicht, oder daß er das eine Mal liebt und dann wieder nicht, oder wir würden den Widerspruch durch Aspektanalyse entschärfen: er liebt ihren Geist, aber nicht ihre Manieren. Eine Art von Aspektanalyse liegt auch in der Erklärung, welche die Quantenmechanik für den (durchaus widersprüchlichen) Welle-Teilchen-Dualismus des Lichts gibt: je nach dem Wirkungszusammenhang, in dem man es betrachtet, zeigt sich dasselbe Objekt als Welle oder als Teilchen ^{29a)}. Indem er den Unterschied von Widerspruch und Widerstreit nicht angemessen berücksichtigte, hat sich Hegel (wie mir scheint) seine Logik verdorben.

22

Wenn man vom Satz vom Widerspruch handelt, muß man auch auf das stets mit ihm genannte, aber von ihm unabhängige Tertium non datur eingehen. In der booleschen Vergrößerung gehen beide Sätze, das Tertium non datur dabei in der Form $p \vee (\neg p)$ genommen, durch Dualisieren auseinander hervor und sind insofern von "derselben Qualität"; aber das verschleiert eine tiefe Verschiedenheit ³⁰⁾. Die Gültigkeit des Satzes vom Widerspruch ergab sich unmittelbar aus dem Sinn des Verneinens, in einer Art Denkwang. Ein vergleichbarer Zwang ist beim Tertium non datur nicht auszumachen. Formallogisch zeigt sich der Unterschied darin, daß es viel leichter ist, mehrwertige Logiken zu konstruieren als parakonsistente; die Interpretation der Wahrheitswerte als Wahrscheinlichkeiten öffnet sogar einen intuitiv plausiblen Weg dazu ³¹⁾. Wir können uns ein Tertium oft nicht vorstellen, sind aber nicht gezwungen, es zu leugnen; es kann sich kein Widerspruch daraus entwickeln, daß wir es für möglich halten, denn wir verzichten ja nur auf ein Schlußprinzip. Evident und unumgebar wie der Satz vom Widerspruch erscheint das Tertium non datur nur bei Aussagen, für die wir ein mehr oder weniger formalisierbares Entscheidungsverfahren haben, die also, technisch gesprochen, rekursiv entscheidbar sind. Schon bei Fragen wie "Hat er die Tat begangen?" gibt es nicht nur moralisch und juristisch, sondern auch faktisch Zwischenstufen. Hier erscheint das Tertium non datur als eine bloß zum Zweck der Vereinfachung vorgenommene Idealisierung, die nicht allen Kontexten gerecht wird. Die Phänomene sind gewissermaßen kontinuierlich, das Begriffssystem aber diskret, so daß wir manchmal weder behaupten noch verneinen können, daß eine Tatsache unter einen Begriff fällt, und zwar nicht, weil wir die Tatsache nicht gut genug kennen, sondern weil das Begriffsnetz zu grob ist.

Noch deutlicher wird der Unterschied, wenn wir das verwandte (schwächere) Schlußprinzip „Duplex negatio affirmat“ $\neg \neg p \rightarrow p$ betrachten (das boolesch mit dem Satz vom Widerspruch in der Form $p \rightarrow \neg \neg p$ *identisch* wird, weil boolesch $\neg \neg p$ mit p identisch ist). Eine negierte Aussage ist eine Aussage über eine Aussage, eine doppelt negierte also eine Aussage über eine Aussage über eine Aussage; daß diese zweifache

Einschaltung des theoretischen Agierens die Rückkehr zur "einfachen" Aussage bedeuten soll, ist jedenfalls nicht zwingend. Das einfache p ist eine Aussage über einen Sachverhalt, und aus ihm folgen Aussagen über Aussagen; daß man aber aus Aussagen über Aussagen auf einen Sachverhalt soll schließen können, kehrt das "natürliche" Dependenzverhältnis zwischen Aussagen und Sachverhalten um und hat so a limine einen spekulativen Zug.

Der manifeste Widerspruch hebt das Aussagen auf, indem er wahr und falsch zusammenzwingen will; das Tertium (ubi datur) reichert die Möglichkeiten des Wahrseins mit Zwischenwerten an, macht das Denken "offener". In der Quantentheorie hat sich schon gezeigt, daß wir diesen „logischen Freiraum“ für die Logik mikrophysikalischer Sachverhalte benötigen³²⁾. Im Lichte dessen sollte man vielleicht das Tertium non datur in der gewöhnlichen Logik für nicht mehr halten als eine gutbestätigte Hypothese, oder eine Frage der Optik. Die Zulassung eines Tertium hat freilich einen Preis, nämlich den Verzicht auf die Möglichkeit des indirekten Beweises³³⁾.

23

Wir wollen noch auf die einfachsten aller logischen Gesetze eingehen, die Verbandsregeln für Aussagen, also die Kommutativität und Assoziativität der Konjunktion und Disjunktion sowie die beiden Distributivitäten. Ihr Gelten fällt unter das oben Gesagte, insofern ein Verstoß gegen sie, boolesch betrachtet, einen Widerspruch zur Folge hat (wie alles Falsche in der Mathematik). Sie haben aber, für sich genommen, mit Negation und Widerspruch nichts zu tun, da sie auch in Verbänden ohne Negationsoperator (ohne Komplemente) gültig sind. Sie sind also von mehr elementarem Charakter, was sich dadurch bemerkbar macht, daß sie kaum je an die bewußte Oberfläche des theoretischen Agierens dringen. Zum Glück ist es, wie wir sehen werden, fast unmöglich, gegen sie zu verstoßen.

Am klarsten ist das bei der Kommutativität der Konjunktion. Da wir hier keine temporale Logik zugrundelegen, alle Aussagen also als gleichzeitig geltend, auf denselben momentanen Weltzustand bezogen zu denken sind, ist die Reihenfolge bei $p \wedge q$ nur eine Frage der Notation (unsere Schreibweise ist *eindimensional*), so daß es gar nicht möglich ist, mit $q \wedge p$ einen andern Sinn zu verbinden als mit $p \wedge q$; nur in rhetorischer Hinsicht wird man zwischen "Die Rose ist rot und dornig" und "Die Rose ist dornig und rot" unterscheiden. Ähnliches gilt für die Kommutativität der Disjunktion.

Die Frage der Assoziativität tritt, aus mathematischer Sicht, immer da auf, wo eine binäre Operation zu einer solchen mit offener Stellenzahl erweitert werden soll; aus der Gleichung $a(bc) = (ab)c$ folgt durch eine leichte Induktion, daß der Wert von Produkten beliebiger Länge von der Beklammerung unabhängig ist. Konjunktion und Disjunktion von Aussagen sind aber "von Hause aus" Operationen offener Stellenzahl, und jede Reduktion auf eine Folge binärer ist eine Frage der Einteilung, die wir für unsere Zwecke vornehmen, die also per definitionem keinen Einfluß auf den Sinn des Eingeteilten haben kann. Erst wenn die theoretische Einteilung in eine praktische umgesetzt wird, ergeben

sich Unterschiede, die aber, idealiter wenigstens, nur die Handlungen, nicht ihr Ergebnis betreffen. Als Beispiel kann der Fall dienen, daß Äpfel, Birnen und Pflaumen zu ernten sind, aber nur zwei Helfer zur Verfügung stehen. Daß in der Praxis die Ergebnisse, wenn wir einmal alle möglichen Wege probieren, selten ganz gleich sein werden, liegt daran, daß wir nie alle möglichen Einflüsse erfassen und noch weniger kontrollieren können ³⁴⁾.

Subtiler sind die Distributivitäten. Ein Fall für die linke Seite von $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ wäre etwa "Er trägt einen Mantel und einen Hut oder eine Mütze". Dies erscheint als die Zusammenfassung der rechten Seite, "Er trägt einen Mantel und einen Hut, oder er trägt einen Mantel und eine Mütze", wie man sie vornehmen wird, wenn man die Aussagen zweier Zeugen für einen Steckbrief auswertet. Umgekehrt erscheint die rechte Seite als eine sozusagen ausgerechnete Version der linken, derer man selten bedürfen wird. Als Beispiel dafür kann man den Fall sehen, in welchem ein Handwerker für einen Fußboden graue und weiße Kiesel mittlerer Größe braucht und den einen seiner Gehilfen nach mittleren weißen, den andern nach mittleren grauen ausschickt (in welchem Fall übrigens das "distribuiere" seine ursprüngliche Bedeutung hat). Die duale Distributivität $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ scheint noch seltener vorzukommen (es ist mir nicht gelungen, ein genuines Beispiel aufzufinden). Eine Instanz der linken Seite wäre "Es regiert die Partei A, oder die Parteien B und C"; man würde eher sagen "Es regiert A oder eine Koalition von B und C". Allgemein neigen wir dazu, die beiden Glieder einer Disjunktion möglichst analog zu bezeichnen; ähnlich würde man in "Sie trägt ein Kleid oder Rock und Jacke" den Ausdruck "Rock und Jacke" zu "Kostüm" zusammenfassen. Die rechte Seite wäre bei beiden Beispielen eine fast unverständliche Verklausulierung ("Es regieren A oder B und A oder C").

Die Verbandsregeln gestatten kein Schließen, sondern dienen zum Umordnen und Umformen, zum "Zurechtlegen" eines gegebenen propositionalen Materials für weitere theoretische oder praktische Zwecke. Ein Verstoß gegen sie ist eine Art Rechenfehler, den man kaum als Verstoß gegen die Gesetze der Logik ansehen wird; er kann nur auftreten, wenn man beim Umformen einzelne Ausdrücke vergißt, verändert oder an die falsche Stelle setzt. Die Folgen werden ähnlich sein wie bei andern Rechenfehlern - das Resultat wird sich nicht bewähren.

24

Ziehen wir Bilanz. Das eherne Reich zeitloser Wahrheiten, den Hort des Geltens, zu dem wir uns nur irgendwie aufschwingen müssen, um daran teilzuhaben, mußten wir verabschieden. Es bleibt uns ein einziges ausschließendes Prinzip als unpassierbare Barriere unseres theoretischen Agierens, wobei latente Verstöße dagegen kaum vermeidbar sind. Von ihm hängt eine Reihe von Schlußregeln ab, die aber das Denken nicht im selben Sinne zwingen, eben weil die Konklusion als etwas Bedingtes auftritt und wir selten in unbezweifelbarer Gewißheit über die Prämissen sein können. Unbedingt ist nur das *Verbot*, kein *Gebot* ³⁵⁾.

Trotz der Ubiquität logischer Substrukturen in unserem theoretischen Agieren kann man die Rolle der Logik in diesem Agieren leicht überschätzen. Wie das Beispiel des

17

Schachspielers zeigte, ist jedes eigentliche, auch (im gewöhnlichen Sinne) denkende Beider-Sache-Sein per se nicht explizit begrifflich, sondern wird dies erst in der reflektierenden, theoretischen Rekonstruktion, und erst da öffnet sich das Feld für die Logik. Aber selbst philosophische Abhandlungen bestehen oft mehr in einem Zurechtlegen und Ordnen von Grundbegriffen als in Schlüssen ³⁶. Das mathematische Paradigma, ein hohes Gebäude auf schmaler axiomatischer Basis, kann nur in Grenzen als Vorbild dienen. Die Ausdehnung des Lebens und Denkens geht leichter in die Breite als in die Höhe oder Tiefe; daher die schier unüberwindlichen Schwierigkeiten, auf welche die "künstliche Intelligenz" stößt, wenn sie auch nur elementare Lebensvollzüge simulieren will. Nicht die bloße Menge verschiedener Wenn-Danns ist dabei das Problem (Quantität ist gerade kein Problem für den Rechner), sondern die kaum explizierbaren Gesetze ihrer Verzweigungen und Verflechtungen. Hier ist auch die Idealisierung zu nennen, welche die Logik a limine macht, indem sie nur wahrheitsdefinite Aussagen betrachtet. In der Praxis ist es oft ein großes Problem, den Wahrheitsgehalt von Sätzen auszumachen, die nur grad- oder aspektweise gelten, wie "Ich liebe dich", "Pyrrhus hat die Schlacht gewonnen" oder "Kanzler X ist gut für unser Land". Daher die Häufigkeit der Rückfrage "Wie ist das gemeint?", die in der Mathematik kaum je Sinn hat.

Die Logik enthalte Gesetze des richtigen Denkens, war unsere Ausgangsthese; aber es sind gewiß nicht die einzigen. In manchen Wissenschaften, wie der Philologie, spielt Logik eine sehr untergeordnete Rolle, aber selbst in der Mathematik ist bloße Folgerichtigkeit, bloßes Fehlervermeiden das kleinste Problem. Viel wichtiger (und schwieriger) als das Vermögen zu schließen ist - ganz allgemein - das Urteilsvermögen, nämlich (nach Kant) das Vermögen, unter die richtigen Begriffe zu subsumieren. Die Fehlleistungen hier sind, als das $\pi\rho\omega\tau\omicron\nu\ \psi\epsilon\upsilon\delta\omicron\varsigma$, viel folgenreicher und hartnäckiger als die beim Schließen; denn dieses beginnt erst danach. Noch wichtiger sind die "richtigen Ideen", die fruchtbare Begriffsbildung, die Fragestellung, die zu brauchbaren Resultaten führt und uns weiterbringt. Und am wichtigsten für das Fortkommen der Menschheit ist das richtige Wollen; denn das Wollen setzt sich über das Denken leicht hinweg und wird, wenn es nicht ans Ziel kommt, den Fehler in der Logik zuletzt suchen.

So erscheint die Logik von allen Ingredientien, die das Denken zu einem richtigen und erfolgreichen machen, als das am wenigsten Problematische und am wenigsten Bedeutsame. Seine Notwendigkeit wird allerdings überall zugegeben, wo Rationalität überhaupt ein Wert ist und man nach Gründen fragt. Die Wissenschaft gibt sich mit bloßem Erfolg ohne Folgerichtigkeit nicht zufrieden; und wo uns eine Folgerung nicht paßt, zweifeln wir an den Prämissen, aber nicht am Schluß.

25

"Du hast versucht, das Gelten der Logik allein aus den Funktionsweisen des kategorialen Systems abzuleiten. Mir scheint jedoch, du drückst dich um den Hauptpunkt herum. Diese Funktionen müssen doch eine Entsprechung in der Wirklichkeit haben, sie müssen auf die Wirklichkeit *passen*. Wenn nur zwei Personen als Täter in Betracht kommen und wir die eine ausschließen können, dann war es die andere. Das *erschließen* wir, aber so *verhält* es sich doch auch." Ja, aber der Ausdruck "sich verhalten" nährt die falsche

18

Suggestion, daß die logische Struktur irgendwie der Wirklichkeit *inhäriert*. Sie inhäriert jedoch nur unserem Schluß. Man sagt ja auch nicht, daß ein Planet Logik "betätigt", weil seine Bahn Gesetzen gehorcht, zu deren Auffindung *wir* Logik benötigen. "Aber wenn der Schluß richtig ist, dann muß doch etwas in der Wirklichkeit *bestehen*, das ihn richtig macht. Ein *realer* Zusammenhang zwischen Sachverhalten, der dem *logischen* Zusammenhang zwischen den Aussagen analog ist, so wie die Bahn des Planeten der Differentialgleichung, der sie genügt." Betrachte es so: Der Sachverhalt besteht, er liegt vor, und unsere Logik ist ein Mittel (von mehreren), mit dem wir unsere Sätze dem Sachverhalt anzupassen versuchen. Nicht selten geschieht das auf dem Weg der Ausschließung. So wie ein Bildhauer die Skulptur erschafft, indem er alles wegschlägt, was nicht zu ihr gehört. Und der Meißel hat keine Ähnlichkeit mit der Skulptur. "Der Meißel hat immerhin mit dem Stein gemeinsam, daß beide hart sind. Außerdem sind die beiden möglichen Täter nur *ein* Beispiel. Die Wissenschaft überzieht die Welt mit Strukturen logischen Charakters, und diese Logifizierung *bewährt* sich, also muß sie ein fundamentum in re haben, es muß ihr eine Ordnung der Wirklichkeit außer uns entsprechen." Daß menschliches Dasein gelingt, oder wenigstens nicht völlig scheitert, ist ein Faktum. Die Philosophie kann dieses Faktum nur aufhellen, in seiner Eigenart klarlegen, sie kann feststellen, was *von uns aus gesehen* vorliegt. Kant hat dafür Grenzen aufgewiesen. Sie kann dieses Wechselwirken aus Erfahrung und theoretischem Agieren nicht "von außen" betrachten. "Also doch die prästabilierte Harmonie oder Wittgensteins guter Engel?"

Anhang: Zum Gedankenreich

1. Zunächst kann man dagegenhalten, daß dieser Platonismus (wie auch sonst) ein Problem auf Kosten eines andern löst oder besser: das Problem nur verschiebt, denn wie hat man sich nun das commercium zwischen der auch nach Frege nicht "wirkenden" und insofern nicht "wirklichen" Gedankenwelt und der auf einen physischen Träger angewiesenen, insofern also der Kausalität unterworfenen Gehirntätigkeit zu denken? ³⁷⁾ Jedoch ist das keine eigentliche Widerlegung, ebensowenig wie der Hinweis auf die monströse "Übevölkerung des Universums" (vor allem durch die falschen Gedanken), die eine solche Annahme nach sich zieht. Versuchen wir, das mögliche Mißverständnis aufzudecken, welches hinter der Überzeugung steht, die Gedanken würden gewissermaßen als "fertige" gefaßt. Gerade bei mathematischen Sätzen erscheint sie auf den ersten Blick plausibel, ja zwingend, und nur dieser Anschein kann erklären, daß sie einem Denker wie Frege als nicht einmal begründungsbedürftig erschien. Sehen wir näher zu.

2. Jemand teilt mir einen mathematischen Satz mit, den ich noch nicht kenne, einen Gedanken, den ich noch nie gedacht habe. Die Mitteilung enthält gewisse Begriffe. Diese Begriffe muß ich kennen, wenn ich den Gedanken verstehen will, und das schließt ein, daß ich auch bestimmte Beziehungen zwischen ihnen schon kennen muß. Die neue Beziehung, in welcher der mitgeteilte Gedanke besteht, muß sich ja durch die schon bekannten Begriffe ausdrücken lassen. Die Mitteilung *aktiviert* diese Begriffe und ihre Beziehungen untereinander in bestimmter Weise; vor meinem "inneren Auge" baut sich ein "begriffliches Szenario" auf, repräsentiert durch gewisse Vorstellungen, welche die

Begriffe bei mir hervorrufen. Manchmal muß ich meinen Gesprächspartner unterbrechen, weil der Aufbau nicht Schritt hält mit der Mitteilung. Die Mitteilung verändert dieses Szenario, aber ohne mein Mitwirken würde die Veränderung nicht zustandekommen. Der neue Gedanke stiftet eine neue Einheit zwischen den aktivierten Bestandteilen, aber ich muß sie denkend vollziehen, wenn ich sie verstehen will. Wenn ich dann den Satz verstanden habe, habe ich damit den Gedanken natürlich nicht selbst *erfunden*. Trotzdem habe ich ihn, durch die Mitteilung angeleitet, selbst *erzeugt*, ich habe mir gleichsam eine Kopie hergestellt, die nun meinem Denken zur Verfügung steht. Die Mitteilung geschieht nicht so, daß mir der "fertige" Gedanke überreicht wird wie ein Gegenstand, sondern eher wie ein Bausatz, bestehend aus schon bekannten Gedanken, die ich selbst zusammensetzen muß, oder, wenn noch eine Metapher erlaubt ist: wie das Brennmaterial zu einem Feuer, das ich selbst entzünden und in Gang halten muß.

Wem etwa der Satz von Pythagoras mitgeteilt wird, der muß schon wissen, was ein Dreieck, was ein Quadrat über einer gegebenen Seite, was ein Flächeninhalt ist und daß man solche Inhalte addieren und vergleichen kann. Wenn er all das kennt und weiß, kann er den Gedanken, in welchem der Satz besteht, leicht nachvollziehen, indem er zwei Ausdrücke als gleich setzt; aber die Ausdrücke hat er selbst erzeugt, und auch die Gleichsetzung muß er selbst vollziehen und sich ihre Bedeutung klarmachen. Demnach hat er den Gedanken nicht "gefaßt", sondern selbst konstruiert; hinzu kommt nun noch die Information, daß er wahr ist, was nachzuweisen natürlich weiteres Denken erfordert. Vom "Fassen" eines fertigen Gedankens ist in dem ganzen Prozeß nichts zu erkennen. Ähnlich sagt man einem Kind, das mit Bausteinen spielt, "Du mußt diesen Stein hierhin setzen, diesen dorthin"; und am Ende hat das Kind das Haus, wenn auch nicht selbst erdacht, aber selbst gebaut, und ist danach vielleicht imstande, auch selbstgedachte Häuser zu bauen; ebenso wie mich das Verstehen genügend vieler vorgedachter mathematischer Gedanken instand setzt, neue solche Gedanken zu erzeugen.

Noch weniger kann vom Fassen im Sinne Freges die Rede sein, wo ich einen Gedanken, etwa in wissenschaftlicher Arbeit, selbst bilde³⁸⁾. Jeder, der solche Arbeit kennt, weiß, welche Mühe es kosten kann, bis ein Gedanke nach und nach Umrisse gewinnt, sich ausprägt und im Denken befestigt. Die Illusion eines Fassens entsteht beim "spontanen Einleuchten", beim Erleben von Inspiration; aber die Vorarbeit war Voraussetzung dafür, und was uns in der Inspiration "gegeben" wird, ist genau besehen nicht der Gedanke selbst, sondern die größere Mühelosigkeit des Hervorbringens (wie jeder weiß, der das Gold im Mund der Morgenstunde schätzen gelernt hat). Die Illusion entsteht auch dann, wenn der erzeugte Gedanke so geläufig geworden ist, daß man ihn nur "einzuschalten" braucht wie eine Lampe. Ein großer Komplex von Objekten und Sachverhalten kann sich mit einem Schlag vor dem "inneren Auge" entfalten, sobald man sich an die Arbeit setzt; die konstruktive Arbeit ist vorausgegangen und muß nur noch "abgerufen" werden.

3. Nun wird man uns entgegenhalten, daß die hier beschriebenen Erfahrungen Frege doch wohl nicht fremd waren. Was also veranlaßte ihn, das Erzeugen zu leugnen und vom Fassen zu sprechen? Zunächst kann man allem, was irgendwann und -wie ins Sein kommt, die zeitlose Seinsweise des Möglichschens zuschreiben. Diese Banalität war sicher nicht, was Frege meinte. Man wird auch nicht annehmen wollen, daß gerade er sich von

der Metapher des Fassens verführen ließ, die ein Gefäßes unabhängig vom Fassen suggeriert („fassen“ ist transitiv). Eine subtilere Verführung liegt in den in der Tat unterschiedlichen Seinsweisen von raumzeitlichen und abstrakten Gegenständen. Die erzene Statue entsteht und vergeht, aber für ihre Form gilt das zumindest nicht in derselben Weise; wenn die Statue eingeschmolzen und neu gegossen wird, werden wir nicht mehr von derselben Statue reden, wohl aber von derselben Form, so daß diese von einer *einzelnen* Realisierung unabhängig erscheint. Aber daraus folgt nicht, daß sie von der *ganzen* - materiellen oder imaginierten - Welt, in der sie entsteht, unabhängig ist. Und welchen Sinn hat es, zu sagen, die Formen der unzähligen unwiederbringlich verlorenen Statuen bestünden weiter fort? Analoges gilt aber vom Gedanken: Der Gedanke ist (bestenfalls) unabhängig von *bestimmten* Vorstellungen, von *bestimmten* Formen des Gedachtwerdens, aber daraus folgt nicht, daß er unabhängig vom Gedachtwerden schlechthin besteht. Mir scheint, daß Frege hier ähnlich unklar bleibt wie Aristoteles in der Frage nach dem Sein der Formursache (εἶδος), die nur *in* den Dingen bestehen, aber nicht mit ihnen entstehen oder vergehen soll. Wenn der Satz von Pythagoras nicht unabhängig von der Vernunft besteht, diese aber einmal nicht vorhanden war und einmal nicht mehr sein wird, wie kann er dann „zeitlos“ sein? Nun insofern *wir* ihn als einen solchen *denken*, genauer, ihn für geltend ansehen, solange in unserer Weise, also entsprechend den Gesetzen *unserer* kategorialen Verfassung gedacht wird ³⁹⁾. Von Zeitlosigkeit kann nur insofern die Rede sein, als diese Gesetze unverändert bleiben; sie besteht nur relativ zu jener Verfassung.

4. Dieses Selbst-Erzeugen auch des mitgeteilten Gedankens ist, wie gesagt wurde, stets begleitet von gewissen Vorstellungen (von Aristoteles φαντασµατα genannt), und sehr mit Recht unterscheidet Frege die Vorstellungen vom Gedanken. Die Vorstellungen gehören zu meinen persönlichen Denkgewohnheiten, den Assoziationen und Konnotationen, welche die beteiligten Begriffe bei mir hervorrufen; sie sind gar nicht vollständig faßbar, noch weniger mitteilbar, und ändern sich im Lauf der Zeit; ein Anderer wird ganz andere haben, ich habe darin keinen Einblick ⁴⁰⁾. Darum können wir auch nie ganz sicher sein, daß wir denselben Gedanken denken wie unser Gesprächspartner oder auch nur unsern eigenen von gestern; sehr fraglich ist oft, ob wir die Gedanken früherer Denker so denken wie sie selbst. Jedes Aneignen ist ja auch ein Umbilden. Bei reglementierten Sprachspielen wie dem mathematischen ist die Übereinstimmung wahrscheinlich am größten, das Wiedererkennen am verlässlichsten (weil durch Formalisierung auf ein Minimum reduziert); aber auch hier bleiben wir letztlich auf den Diskurs und seine Kontrollmöglichkeiten angewiesen. Nur bei ganz elementaren Sachverhalten wie dem Satz von Pythagoras besteht die Möglichkeit einer explanatio ad oculos. Im Ganzen aber hängt unsere Kommunikation in der Luft, wie all unser Sein mit seinem Erkennen und Sollen, und muß wie das Feuer ständig in Gang gehalten werden. Schon im Mythos von der Sprachverwirrung ist gesehen, daß es hier keine Garantien gibt.

Auch wenn man die These vom Erzeugen des Gedankens beim Denken akzeptiert, bleiben noch Fragen bezüglich des Verhältnisses vom Denken (im gewöhnlichen Sinn) zum Gedanken. Man ist versucht, an das aristotelische Verhältnis von δυνάµις und ενεργεια (εντελεχεια) zu denken ⁴¹⁾. Wie gelingt es uns ferner, den Gedanken von der

Vorstellung, mit welcher verbunden wir ihn denken, zu unterscheiden, wie erkennen wir denselben Gedanken in wechselnden Vorstellungen? Hier gewinnt der Begriff der Intentionalität zentrale Bedeutung. Wenn ich etwa mathematisch nachdenke (sagen wir, um Trivialfälle zu vermeiden, über einen algebraischen Sachverhalt, der sich nicht figürlich darstellen läßt), bin ich gleichsam durch die (notwendig symbolischen) Vorstellungen hindurch auf den abstrakten Sachverhalt gerichtet; es würde gerade das Abreißen der Konzentration bedeuten, wenn meine Aufmerksamkeit auf die Vorstellungen überginge. Für unseren Schachspieler hingegen ist die vorgestellte Stellung auf dem Brett der Ziel- und Brennpunkt seiner Intention. Hier ist die Vorstellung der Gegenstand der Intention, im andern Fall dient sie als Mittel, als eine Art Katalysator.

Wir verfolgen aber diese Fragen nicht weiter, sondern resümieren den Befund. Wir können den Prozeß des Denkens ohne weiteres verstehen, wenn wir vom Erzeugen der Gedanken ausgehen. Nur davon machen wir vielfältige, aufweisbare und nachvollziehbare Erfahrungen, vom Fassen nie. Der Gedanke ohne Vorstellung, "Gedanke an sich" oder "reiner" propositionaler Gehalt, ist eine *Fiktion*, nicht anders als Punkte ohne Ausdehnung und alle andern Fiktionen der Mathematik⁴². Man mag immerhin vom Gedankenreich (und dann auch vom Fassen) reden als einer Gesamtheit möglicher Gedanken, wie Mathematiker von einem Mengenuniversum, solange man sich im klaren hält, daß *wir* dieses Reich fingieren. Es ist eine bequeme und vielleicht sogar unvermeidbare *façon de parler*; aber wir können ihm kein Gelten zuschreiben, das wir nicht selbst hineingelegt haben.

Anmerkungen und Nachweise

(1) So etwa Heidegger, *Logik*, Marburger Vorl. 1925/26, Gesamtausg. Bd. 21 (Frankfurt 1976), S.37, oder G.Patzig, *Sprache und Logik*, Göttingen 1981, S.7.

(2) Das Beispiel zeigt auch, daß Anschauung ohne Begriffe jedenfalls nicht völlig blind sein muß.

(3) G.Frege, *Der Gedanke*, in: *Logische Untersuchungen*, ed. G.Patzig, Göttingen 1986.

(4) *Grundlagen der Arithmetik*, § 26, Schluß (Hervorhebung von mir).

(5) *Der Gedanke*, S.49.

(6) *Der Gedanke*, S.43: "Ein drittes Reich muß anerkannt werden" (neben der Außenwelt und den Vorstellungen, der Innenwelt). Besonders manifest: "Wenn man einen Gedanken faßt oder denkt, so schafft man ihn nicht, sondern tritt nur zu ihm, der schon vorher bestand, in eine gewisse Verbindung" (*Der Gedanke*, S.44 Fußnote); ähnlich in: *Die Verneinung*, *Logische Untersuchungen* S.64 (oben).

(7) Es ist eine billige Religion, die verspricht, daß Berge sich durch bloßen Glauben

versetzen ließen, statt durch Arbeit.

(8) Vgl. Aristoteles, de anima, Buch II, Kap.11. Man stellt sich leicht körperlose Geister vor, aber man versuche nur einen Augenblick, sich alle Konsequenzen klarzumachen.

(9) Metaphysik, III. 1005 b 19. Man beachte die vorsichtige relative Ausdrucksweise; vom "Absoluten" ist keine Rede.

(10) Was nicht ausschließt, daß das Ablehnen genetisch eine Vorstufe des Verneinens ist; vgl. dazu Freuds Aufsatz über die Verneinung. Es wäre eine Aufgabe von hohem Interesse, diesen Text mit dem gleichnamigen von Frege zusammenzubringen.

(11) Jene Folgerung hat übrigens noch die weitere Voraussetzung, daß die Rose überhaupt eine Farbe hat; diese steckt in der Annahme, daß der Satz "die Rose ist rot" kategorial wohlgeformt ist; dies wiederum ist eine Voraussetzung dafür, daß ihm überhaupt ein Wahrheitswert zukommt.

(12) Wenn die Rose nicht rot ist, bleiben nur vier oder fünf andere Farben übrig, so daß "Die Rose ist nicht rot" alles andere ist als ein "unendliches" Urteil, wie immer man das auch verstehen mag. Beim zweiten Beispiel verhält es sich freilich anders; jedoch hat Frege m.E. das noch bei Kant erscheinende „unendliche“ Urteil destruiert (Die Verneinung, bes. S.62).

(13) Ähnlich dem Prädikat "erfüllbar" in der formalen Logik.

(14) Was übrigens zeigt, daß das intuitionistische (konstruktive) "oder" etwas ganz anderes ist und auch anders benannt werden sollte.

(15) Insbesondere hängt die Wahrheit des "eigentlichen" $p \rightarrow q$ nicht allein von denjenigen von p und q ab. Noch bei der materialen Implikation hat die Verteilung der Wahrheitswerte konventionellen Charakter. Wenn p nie vorliegt, wird man $p \rightarrow q$ nicht für wahr erklären, sondern für gegenstandslos.

(16) Gedankengefüge, Logische Untersuchungen S.89. (Wieder die Weigerung, sich auf den Denkprozeß einzulassen!)

(17) Boolesch kann man allerdings die Negation in der Tat *definieren* als die einzige unäre, nichtkonstante und nur vom Wahrheitswert abhängende Operation n mit Aussagen, derart, daß $p \wedge n(p)$ immer falsch ist.

(18) Met. IV 4. Er behauptet allerdings, daß man den widerlegen könne, der einen Widerspruch behauptet. Das ist merkwürdig, denn eine Widerlegung von P ist dasselbe wie ein Beweis von $\neg P$; wenn also P ein Widerspruch ist, ist die Widerlegung von P ein Beweis des Satzes von Widerspruch zumindest im gegebenen Fall. A limine ist fraglich, ob man den Behaupter eines Widerspruchs widerlegen kann; es kommt auf den Begriff der Widerlegung an. Gewöhnlich versteht man unter der Widerlegung von P die

Ableitung eines Widerspruchs aus P. Demnach würde ein Widerspruch sich selbst widerlegen; eine offenbare *petitio principii*. In Met. IX, 5 d scheint Aristoteles übrigens *begründen* zu wollen, daß man nicht eines und das Entgegengesetzte zugleich tun könne.

(19) Formalisierte Sprachen haben für solche Fälle mehrere "Sorten", wie etwa Punkte und Geraden in der Geometrie, und die Grundrelationen sind sortengebunden; ein Kategorialfehler läge vor etwa bei "der Punkt x liegt auf dem Punkt y". Eine solche Aussage ist dann nicht "zulässig" oder "well-formed", und die Wahrheitsrelation für sie nicht definiert.

(20) Ja und? kann man fragen. Wir stellen fest, daß solche Menschen mit der Welt nicht mehr zurechtkommen und auf fremde Hilfe angewiesen sind. In meiner Terminologie: ihr kategoriales System ist aus den Fugen geraten, oder wie man "politisch korrekt" sich auszudrücken hätte: hat sich geändert. Wir können hier nur von dem "gewöhnlichen" System handeln, ohne daß sich damit Wertungen verbinden sollen.

(21) Vgl. dazu Freuds Arbeit „Vom Gegensinn der Urworte“.

(22) Nicolaus Cusanus, *Triologus de Possest*, 7: *deus id [est] quod esse potest*.

(23) Demnach ist ein manifester Widerspruch auch ein latenter, weil $(\neg p) \rightarrow (\neg p)$. Ich lasse mich jetzt nicht ein auf eine formale Definition des "echt" latenten, nicht manifesten Widerspruchs; man beachte, daß es sich um syntaktische Begriffe handelt. In der Tradition heißen Aussagen p, q mit $p \rightarrow \neg q$ (und folglich auch $q \rightarrow \neg p$) *konträr*.

(24) Das macht sich die sog. "parakonsistente" Logik zur Aufgabe; sie erforscht formale Systeme, in denen Widersprüche in gewissem Umfang, sozusagen nur "lokal", zulässig sind, ohne daß das ganze System trivialisiert wird, d.h. alle Sätze ableitbar werden. Das erfordert natürlich den Verzicht auf gewisse Schlußprinzipien wie das "ex falso quodlibet", allgemeiner auf solche, bei denen das consequens keine „inhaltliche“ Beziehung zum antecedens hat. Damit könnte man leben, da solche Prinzipien ohnehin eher konventionellen Charakter haben. Jedoch genügt das nicht, und der Preis, den man für diese logische Extravaganz zahlen muß, scheint mir zu hoch. Eine engagierte und inhaltsreiche Einführung bietet M.Bremer, *An Introduction to Paraconsistent Logics*, Frankfurt/M 2005.

(25) Man beachte, daß hier die Umkehrung nicht gilt; ein vierdimensionaler Raum ist nicht erfahrbar, aber auch nicht widersprüchlich.

(26) Wenn man das Fregesche "Fassen" der Gedanken zugunsten des oben dargelegten Erzeugens aufgibt und den fiktiven Charakter der Gedanken anerkennt, dann werden die Argumente gegen den Psychologismus hinfällig und erscheinen als bloße Gegenbehauptungen. Man kann nicht zum "Absoluten" gelangen, einfach indem man es *meint*. Die Selbstverständlichkeit, mit der dabei das Ideale und Zeitlose in Anspruch genommen wird, hat etwas Naives.

(27) Darauf weist auch Patzig hin; siehe seinen Artikel "Widerspruch" im Handbuch philos. Grundbegriffe, München 1973.

(28) Auch hier gibt es eine Komplexitätsschwelle, nämlich durch die Anzahl aufeinander folgender wechselnder Quantoren. Im Alltag sind mehr als zwei selten ("In jeder Filiale gibt es Einen, der für alles verantwortlich ist"), selbst die Mathematik kommt kaum je über vier hinaus.

(29) Etwa bei Nietzsche, Menschliches, Allzumenschliches I, Nr.7: Der Irrtum über das Leben zum Leben notwendig, und viele andere Belege. Vaihinger hat dann diese Unausweichlichkeit des Widerspruchs systematisch und maßlos überzogen. Grosso modo: die Fiktionen, derer wir allerdings bedürfen, sind *für sich genommen* nicht notwendig widersprüchlich; Widersprüche können aber entstehen, wenn man die Art ihres Geltens mißversteht. In ebenso grotesker Übertreibung behaupten die Vertreter der parakonsistenten Logik die Unausweichlichkeit und Ubiquität von Widersprüchen.

(29a) Eine Entität gleichzeitig als Teilchen und als Welle anzusehen, ist ein Widerspruch, denn ein Teilchen ist etwas Raumzeitliches, eine Welle aber ein Bewegungszustand und damit ein abstractum. Demnach haben wir für Entitäten von der Art des Lichts keinen Gattungsbegriff, jedenfalls nicht in der ordinary language.

(30) Wie erst die intuitionistische Kritik hervorgehoben hat, aber auf anderer Grundlage, nämlich der konstruktiven Auffassung der Disjunktion.

(31) Algebraisch entsprechen den mehrwertigen Logiken nichtboolesche Heyting-algebren, wie man sie sehr leicht angeben kann (zum Beispiel der Verband der offenen Teilmengen des reellen Zahlkörpers, wobei man als Konjunktion das Innere des Durchschnitts nehmen muß. Die "Negation" einer Menge ist dann das Innere ihres Komplements. Allgemein gilt $U \subset \neg \neg U$, aber die Inklusion kann echt sein, etwa wenn U das Komplement einer diskreten Menge ist.) Kategoriale Logik ist im *Normalfall* intuitionistisch, der boolesche Fall ist speziell. Siehe dazu MacLane/Moerdijk, Sheaves in Geometry and Logic, Springer 1992. Kap.VI.

(32) Siehe etwa P.Mittelstaedt, Sprache und Realität in der modernen Physik, Mannheim 1986, Kap. V.

(33) Hier sollte bemerkt werden, daß der disjunktive Syllogismus auch dialogisch gültig ist, also das Tertium non datur nicht voraussetzt. Der Opponent kann die Behauptung angreifen, indem er die Prämisse $((p \vee q) \wedge (\neg q))$ behauptet. Jetzt kann der Proponent die vom Opponenten gemachte Behauptung $p \vee q$ angreifen und gewinnt sofort, da der Opponent nach den Regeln des Spiels nun p behaupten muß oder q .

(34) Für mehr über Assoziativität und Kommutativität verweise ich auf meinen so betitelten Aufsatz in Math. Semesterber. 2002.

(35) Mit dieser Asymmetrie korrespondiert eine andere, nämlich daß es leichter ist, die

Widersprüchlichkeit als die Widerspruchsfreiheit von Axiomensystemen zu beweisen. Die erstere ergibt sich aus dem System selbst, die zweite kann nur relativ zu einem andern System nachgewiesen werden und in letzter Instanz gar nicht. Alles Scheitern kommt von allein, alles Gelingen muß erarbeitet werden.

(36) Zur Rolle der Logik in der Philosophie siehe G.Patzig, Logische Aspekte einiger Argumente in Aristoteles' Metaphysik, Ges.Schriften Bd.III (Göttingen 1996).

(37) Freges eigene Ausführung dazu (Der Gedanke, S. 51) kann kaum befriedigen; sie läuft darauf hinaus, daß auch zum Sinneseindruck ein Nichtsinnliches hinzukommen muß, damit wir ihn als Wahrnehmung der Außenwelt verstehen können, so daß das Gedankenfassen nicht mysteriöser ist als die gewöhnliche Wahrnehmung. Was dieses Nichtsinnliche aber sei, sagt er nicht. Man sollte übrigens bemerken, daß Freges ontologische These mit seinen bleibenden Leistungen nichts zu tun hat. Auch wird man ihm die in Abschnitt 5 beschriebene naive Mythologie nicht im Ernst unterstellen.

(38) Zwischen dem mitgeteiltem und dem selbstgefundenen Gedanken ist nicht immer scharf zu trennen. Manche Texte etwa sind so kryptisch, daß sie eher als Anregung denn als Mitteilung gelten können. Oft bringt mich eine Mitteilung auf Gedanken, die in ihr selbst gar nicht angelegt sind, die ich aber ohne sie nicht gefunden hätte. Man wird auch nicht immer imstande sein, den Zeitpunkt anzugeben, an dem man den Gedanken verstanden hat, und manchmal weiß man nicht einmal so recht, ob man ihn überhaupt verstanden hat, was beides bei einem eigentlichen Fassen doch nicht zweifelhaft sein dürfte. Allgemeine Kriterien für das Verstandenhaben werden sich kaum angeben lassen; ob der Prüfling den mathematischen Satz nur auswendig oder auch „inwendig“ kennt, läßt sich mit letzter Sicherheit nicht herausfinden.

(39) Mir scheint evident, daß in dieser Frage Heidegger richtig gesehen hat (Sein und Zeit, § 44). Frege weigerte sich, sich auf den faktischen Denkvollzug einzulassen, Heidegger, aus ihm herauszutreten; beide zu ihrem Schaden.

(40) Für Näheres zur Rolle der Anschauung in diesem Prozeß siehe meinen Aufsatz in Phil.Nat.35(2), 1998.

(41) Vgl. dazu Met. IX 8 (Denken als $\epsilon\nu\epsilon\rho\gamma\epsilon\iota\alpha$). Die Metapher des Fassens weist jedenfalls in eine falsche Richtung - von dem, was ich sonst "zu fassen bekomme", weiß ich vorher, wie es beschaffen ist, kenne seine "essentia"; beim Gedankenfassen aber erschließt sich gerade diese, der Gedanke *ist* seine essentia.

(42) Analog wäre ein Reich der Gefühle unabhängig vom Fühlen. Dahin hat sich die Philosophie nicht verstiegen, weil ihr Gefühle weniger wichtig sind als Gedanken, aber auch die Psychologie nicht.