Hinreichende Bedingungen für Optimalsteuerungsprobleme mit nichtglatten Zuständen

Ricki Rosendahl

Schwerpunkt Optimierung und Approximation
Department Mathematik - Universität Hamburg

Hamburg, 10. April 2007

Inhalt

- glatte Optimalsteuerungsprobleme
  - Problembeschreibung und notwendige Bedingungen
  - Beispiel
  - Hinreichende Bedingungen
  - Beispiel
- nichtglatte Optimalsteuerungsprobleme
  - Problembeschreibung und notwendige Bedingungen
  - Beispiel
  - Hinreichende Bedingungen
  - Beispiel
- Ausblick
- Literatur

Allgemeine Optimalsteuerungsaufgabe

Problem P1. Bestimme eine stückweise stetige Funktion $u : [t_0, t_f] \to \mathbb{R}^m$, so dass das Funktional

$$J(x, u) = \int_{t_0}^{t_f} L(t, x(t), u(t))dt$$

minimiert wird unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t), u(t)), \qquad t \in [t_0, t_f], \text{f.ü.}, \\ r(x(t_0), x(t_f)) &= 0, \end{aligned}$$

wobei $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ und $r : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ zweimal stetig differenzierbar sind.

Zulässigkeit und schwaches lokales Minimum

Definition. Ein Paar (x, u) heißt *zulässig* für Problem P1, wenn x stetig und stückweise stetig differenzierbar und u stückweise stetig ist und die Zustandsgleichung sowie die Randbedingungen erfüllt sind.

Definition. Ein zulässiges Paar (x_0, u_0) heißt *schwaches lokales Minimum* für Problem P1, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass (x_0, u_0) das Zielfunktional J über alle zulässigen Paare (x, u) mit

$$||x - x_0||_\infty < \epsilon \quad \text{und} \quad ||u - u_0||_\infty < \epsilon$$

minimiert.

Hamilton-Funktion und Regularitätsbedingung

Definition. Für die allgemeine Optimalsteuerungsaufgabe P1 ist die *Hamilton-Funktion* mit $\lambda \in \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \ \rightarrow \ \mathbb{R}, \\ \mathcal{H}(t, x, u, \lambda) &:= \ L(t, x, u) + \lambda^T f(t, x, u). \end{aligned}$$

Regularitätsbedingung (R).

$$\text{Rang}\{D_{(x_s, x_f)} r(x_0(t_0), x_0(t_f))\} = p.$$

Notwendige Bedingungen erster Ordnung

Satz 1. Es sei (x_0, u_0) ein schwaches lokales Minimum von P1. Weiter sei (R) erfüllt. Dann gibt es $\lambda : [t_0, t_f] \to \mathbb{R}^n$ und $\nu \in \mathbb{R}^p$, so dass gilt:

- adjungierte Differentialgleichung

$$\lambda'(t) = -\mathcal{H}_x(t, x_0(t), u_0(t), \lambda(t))^T, \qquad t \in [t_0, t_f], \text{f.ü.},$$

- natürliche Randbedingungen

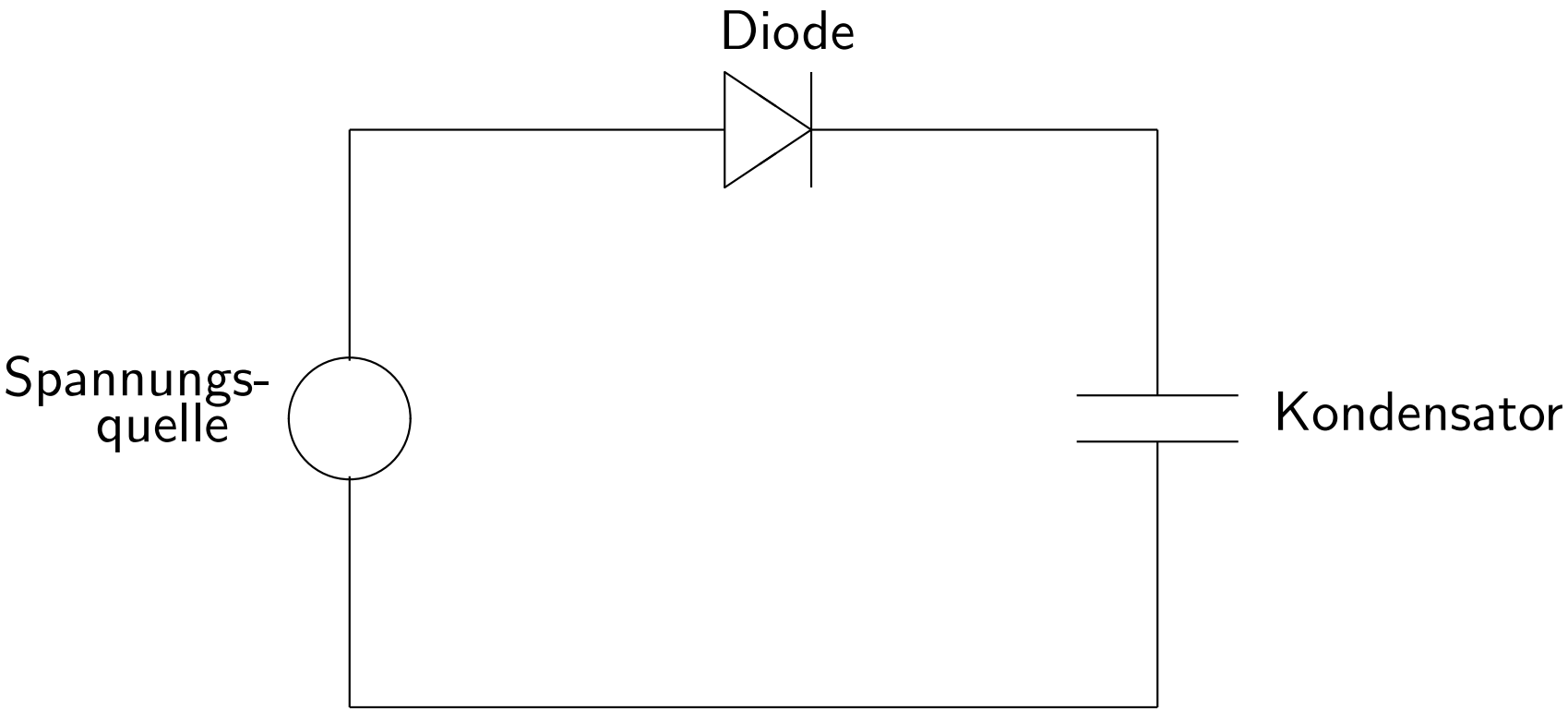
$$\begin{aligned} \lambda(t_0) &= -D_{x_s}\left[\nu^T r(x_0(t_0), x_0(t_f))\right]^T, \\ \lambda(t_f) &= D_{x_f}\left[\nu^T r(x_0(t_0), x_0(t_f))\right]^T, \end{aligned}$$

- Minimumprinzip

$$u_0(t) = \operatorname{argmin}\{\mathcal{H}(t, x_0(t), u, \lambda(t)) | u \in \mathbb{R}^m\}, \qquad t \in [t_0, t_f], \text{f.ü.}.$$

Elektrischer Schaltkreis mit Diode

Zustandsvariable x: Spannung am Kondensator
Steuerfunktion u: Spannung an der Spannungsquelle



Aufgabe aus dem Buch von Clarke [1].

Elektrischer Schaltkreis mit Diode

Problem DIO1. Minimiere das Funktional

$$J(u) := \frac{1}{2} \int_0^2 u(t)^2 dt$$

unter der Nebenbedingung

$$\dot{x} = 2(u - x)$$

und den Randbedingungen

$$x(0) = 4, \qquad x(2) = 3.$$

Anwendung der notwendigen Bedingungen

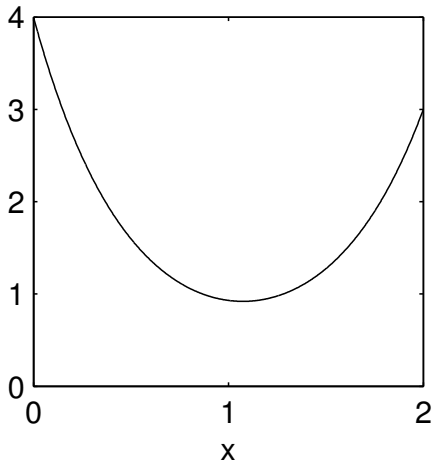
Hamilton-Funktion:

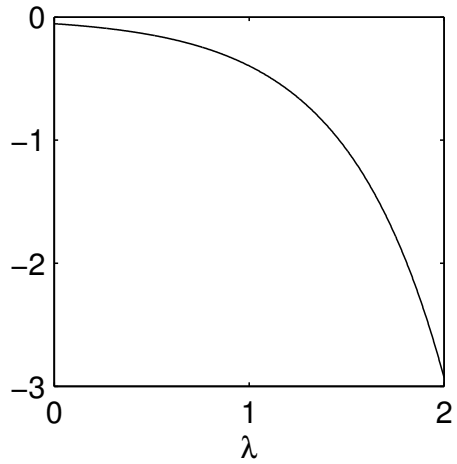
$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}u^2 + 2\lambda(u - x)$$

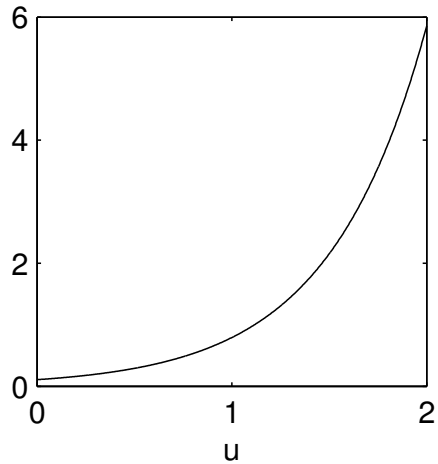
Resultierende Randwertaufgabe:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2(-2\lambda - x), & x(0) &= 4, \\ \dot{\lambda} &= 2\lambda, & x(2) &= 3. \end{aligned}$$

Lösungskandidat:







Voraussetzungen für hinreichende Bedingungen

1. (x_0, u_0) sei zulässig, u_0 sei stetig.
2. Es existieren Multiplikatoren $\lambda : [t_0, t_f] \to \mathbb{R}^n$ und $\nu \in \mathbb{R}^p$, so dass die notwendigen Bedingungen erster Ordnung erfüllt sind.
3. Es sei die strenge Legendre-Clebsch Bedingung erfüllt:

   Definition. Die *strenge Legendre-Clebsch Bedingung* ist auf $[t_0, t_f]$ erfüllt, wenn es ein $d > 0$ gibt, so dass

   $$w^T \mathcal{H}_{uu}[t] w \geq d w^T w$$

   für alle $t \in [t_0, t_f]$ und $w \in \mathbb{R}^m$ gilt.

4. Es gelte Regularitätsbedingung (R).

Voraussetzungen für hinreichende Bedingungen

5. Es existiere eine Funktion $Q : [t_0, t_f] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ in symmetrischer Matrixform mit folgenden Eigenschaften:
   - Die Riccatische Differentialgleichung

     $$Q' = -\mathcal{H}_{xx} - Qf_x - f_x^T Q + (\mathcal{H}_{xu} + Qf_u)(\mathcal{H}_{uu})^{-1}(\mathcal{H}_{xu} + Qf_u)^T$$

     besitzt eine beschränkte Lösung auf $[t_0, t_f]$.
   - Die Matrix

     $$\begin{pmatrix} Q(t_0) + D^2_{x_s}(\nu^T r) & D^2_{x_s x_f}(\nu^T r) \\ D^2_{x_f x_s}(\nu^T r) & -Q(t_f) + D^2_{x_f}(\nu^T r) \end{pmatrix}$$

     ist positiv definit auf der Menge

     $$\text{Kern}\{D_{(x_s,x_f)} r(x_0(t_0), x_0(t_f))\}.$$

Hinreichende Bedingungen zweiter Ordnung

Satz 2. Die Bedingungen 1-5 seien erfüllt. Dann existieren $\epsilon > 0$ und $d > 0$, so dass

$$\begin{aligned} J(x,u) \geq J(x_0,u_0) \quad &+ \quad d\{||(x,u)-(x_0,u_0)||_2^2 \\ &+ \quad ||(x(t_0),x(t_f))-(x_0(t_0),x_0(t_f))||^2\} \end{aligned}$$

für alle Paare (x,u) aus der Menge
$B_\epsilon(x_0,u_0) := \{(x,u) \in L^\infty([t_0,t_f],\mathbb{R}^{n+m}) |\ ||(x,u)-(x_0,u_0)||_\infty \leq \epsilon\}$
gilt. Insbesondere ist (x_0,u_0) ein schwaches lokales Minimum.

Beweis: H. Maurer und S. Pickenhain [2].

Anwendung der hinreichenden Bedingungen

Prüfe alle Voraussetzungen zu Satz 2:

1. Lösungskandidat ist zulässig.
2. Lösungskandidat erfüllt notwendige Bedingungen erster Ordnung.
3. Strenge Legendre-Clebsch Bedingung ist erfüllt:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}u^2 + 2\lambda(u - x) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}_{uu} = 1 > 0.$$

4. Regularitätsbedingung (R) ist erfüllt:

$$r(x(0), x(2)) = \begin{pmatrix} x(0) - 4 \\ x(2) - 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$D_{(x_s, x_f)} r(x_0(0), x_0(2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Anwendung der hinreichenden Bedingungen

Weitere Voraussetzungen zu Satz 2:

5. Gesucht wird eine Lösung $Q : [t_0, t_f] \longrightarrow \mathbb{R}$ von
   - der Differentialgleichung

$$\dot{Q} = 4Q + 4Q^2$$

   - mit der Randbedingung: Die Matrix

$$\begin{pmatrix} Q(0) & 0 \\ 0 & -Q(2) \end{pmatrix}$$

   ist positiv definit auf Kern$\{D_{(x_s,x_f)} r(x_0(0), x_0(2))\}$.

Inhalt

- glatte Optimalsteuerungsprobleme
  - Problembeschreibung und notwendige Bedingungen
  - Beispiel
  - Hinreichende Bedingungen
  - Beispiel
- nichtglatte Optimalsteuerungsprobleme
  - Problembeschreibung und notwendige Bedingungen
  - Beispiel
  - Hinreichende Bedingungen
  - Beispiel
- Ausblick
- Literatur

Optimalsteuerungsaufgabe mit nichtglatten Zuständen

Problem P2. Bestimme eine stückweise stetige Funktion $u : [t_0, t_f] \to \mathbb{R}^m$, so dass das Funktional

$$J(x,u) \quad = \quad \int_{t_0}^{t_f} L(t, x(t), u(t))dt$$

minimiert wird unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t), u(t)), \qquad t \in [t_0, t_f], \text{f.ü.}, \\ r(x(t_0), x(t_f)) &= 0, \end{aligned}$$

mit nichtglatter rechter Seite f und Schaltfunktion S:

$$f(t,x,u) = \begin{cases} f_1(t,x,u), & S(x,u) \leq 0 \\ f_2(t,x,u), & S(x,u) > 0 \end{cases}.$$

Schaltfunktion S

Annahme (A). Es gebe eine Unterteilung $t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t_f$, $N \in \mathbb{N}$ mit $N-1$ Schaltpunkten, so dass $S(x_0(t), u_0(t))$ auf jedem Teilintervall $]t_{i-1}, t_i[$, $i = 1, \ldots, N$ als Funktion von t stetig ist und

$$\forall t \in [t_0, t_f] \backslash \{t_1, \ldots, t_{N-1}\} : S(x_0(t), u_0(t)) \neq 0.$$

Definition. Die Schaltfunktion $S : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ ist von der Ordnung 0, wenn S explizit von der Steuerung u abhängt, d.h.

$$D_u S(x, u) \neq 0.$$

Notwendige Bedingungen erster Ordnung

Satz 3. Es sei (x_0, u_0) ein schwaches lokales Minimum von P2. Es gelte Regularitätsbedingung (R). Die Schaltfunktion S sei von der Ordnung 0 und erfülle Annahme (A). Dann gibt es $\lambda : [t_0, t_f] \to \mathbb{R}^n$ und $\nu \in \mathbb{R}^p$, so dass gilt:

$$
\begin{aligned}
\lambda'(t) &= -\mathcal{H}_x(t, x_0(t), u_0(t), \lambda(t))^T, && t \in [t_0, t_f], \text{f.ü.},\\
\lambda(t_0) &= -D_{x_s}[\nu^T r(x_0(t_0), x_0(t_f))]^T,\\
\lambda(t_f) &= D_{x_f}[\nu^T r(x_0(t_0), x_0(t_f))]^T,\\
u_0(t) &= \operatorname{argmin}\{\mathcal{H}(t, x_0(t), u, \lambda(t)) | u \in \mathbb{R}^m\}, && t \in [t_0, t_f], \text{f.ü.},\\
\mathcal{H}[t_i^+] &= \mathcal{H}[t_i^-], \qquad i = 1, \ldots, N,\\
\lambda(t_i^+) &= \lambda(t_i^-), \qquad i = 1, \ldots, N.
\end{aligned}
$$

Beweis: H. J. Oberle [3].

Elektrischer Schaltkreis mit Diode

Problem DIO2. Minimiere das Funktional

$$J(u) := \frac{1}{2} \int_0^2 u^2(t) dt$$

unter der Nebenbedingung

$$\dot{x} = \begin{cases} a(u-x), & x-u \leq 0 \\ b(u-x), & x-u > 0 \end{cases},$$

und den Randbedingungen

$$x(0) = 4, \qquad x(2) = 3.$$

Dabei sind die Parameter gegeben durch $a = 4$ und $b = 2$.

Anwendung der notwendigen Bedingungen

Mit

$$c(t) := \begin{cases} b, & t \in [0, t_1[\\ a, & t \in [t_1, 2] \end{cases}$$

lautet die Hamilton-Funktion

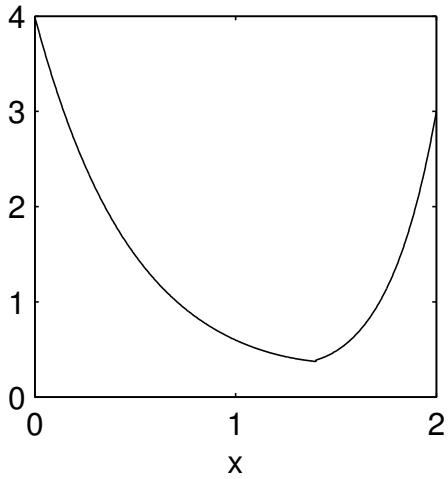
$$\mathcal{H}(x, u, \lambda) = \frac{1}{2}u^2 + \lambda c(u - x).$$

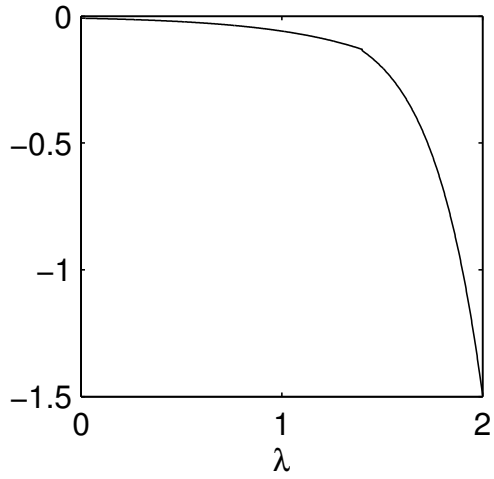
Resultierende Randwertaufgabe:

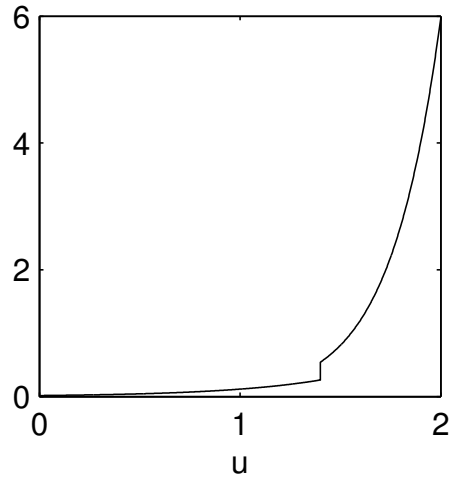
$$\begin{aligned} \dot{x} &= -c(c\lambda + x), & x(0) &= 4, \\ \dot{\lambda} &= c\lambda, & x(2) &= 3, \\ & & \frac{a+b}{2}\lambda(t_1) + x(t_1) &= 0. \end{aligned}$$

Lösung der Randwertaufgabe

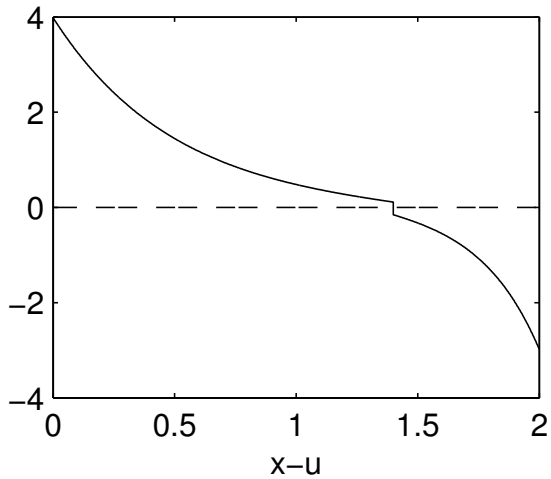
Lösungskandidat:







Schaltfunktion:



Voraussetzungen für hinreichende Bedingungen

1. (x_0, u_0) sei zulässig.
2. Es existieren Multiplikatoren $\lambda : [t_0, t_f] \to \mathbb{R}^n$ und $\nu \in \mathbb{R}^p$, so dass die notwendigen Bedingungen erster Ordnung für nichtglatte Optimalsteuerungsprobleme erfüllt sind.
3. Die strenge Legendre-Clebsch Bedingung sei auf $[t_0, t_f]$ erfüllt.
4. Es gelte Regularitätsbedingung (R).

Die Funktion $\tau : [t_0, t_f] \to \mathbb{R}$ beschreibe die Länge des jeweiligen Teilintervalls:
$t \in [t_{i-1}, t_i[\Rightarrow \tau(t) = t_i - t_{i-1}$ und $\tau(t_f) = t_N - t_{N-1}$.

Voraussetzungen für hinreichende Bedingungen

5. Es existieren Funktionen $Q : [t_0, t_f] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ (symmetrisch), $R : [t_0, t_f] \to \mathbb{R}^n$ und $q : [t_0, t_f] \to \mathbb{R}$, die die folgenden Eigenschaften besitzen:
   - Das Differentialgleichungssystem

$$
\begin{aligned}
Q' &= -\mathcal{H}_{xx} - f_x^T Q - Q f_x + (\mathcal{H}_{xu} + Q f_u)(\mathcal{H}_{uu})^{-1}(\mathcal{H}_{xu} + Q f_u)^T \\
R' &= \frac{1}{\tau}\left[-\mathcal{H}_x - Qf - \tau f_x^T R + \tau\left(\mathcal{H}_{xu} + Q f_u\right)\left(\mathcal{H}_{uu}\right)^{-1} f_u^T R\right] \\
q' &= \frac{1}{\tau}\left[-2R^T f + \tau R^T f_u (\mathcal{H}_{uu})^{-1} f_u^T R\right]
\end{aligned}
$$

     besitzt eine beschränkte Lösung auf $[t_0, t_f]$, die stückweise stetig differenzierbar ist.

Voraussetzungen für hinreichende Bedingungen

- Diese Lösung Q, R und q erfülle die folgenden Sprung- und Randbedingungen:

$$\begin{pmatrix} Q(t_0) + D^2_{x_s}(\nu^T r) & R(t_0) & D^2_{x_s x_f}(\nu^T r) & 0 \\ R^T(t_0) & q(t_0) & 0 & 0 \\ D^2_{x_f x_s}(\nu^T r) & 0 & -Q(t_f) + D^2_{x_f}(\nu^T r) & -R(t_f) \\ 0 & 0 & -R^T(t_f) & -q(t_f) \end{pmatrix}$$

sei positiv definit auf der Menge

$$\{(\eta_s, \eta_s^{(\tau)}, \eta_f, \eta_f^{(\tau)}) \in \mathbb{R}^{2(n+1)} | (\eta_s, \eta_f) \in \text{Kern}\{D_{(x_s,x_f)} r(x_0(t_0), x_0(t_f))\}\}$$

und für alle $i = 1, \ldots, N-1$ seien die folgenden Matrizen positiv definit auf $\mathbb{R}^{n+2}$:

$$\begin{pmatrix} Q(t_i^+) - Q(t_i^-) & R(t_i^+) & -R(t_i^-) \\ R^T(t_i^+) & q(t_i^+) & 0 \\ -R^T(t_i^-) & 0 & -q(t_i^-) \end{pmatrix}.$$

Hinreichende Bedingungen zweiter Ordnung

Satz 4. Die Bedingungen 1-5 seien erfüllt. Dann existieren $\epsilon > 0$ und $d > 0$, so dass

$$\begin{aligned} J(x,u) \geq J(x_0,u_0) \quad &+ \quad d\{||(x,u)-(x_0,u_0)||_2^2 \\ &+ \quad ||(x(t_0),x(t_f))-(x_0(t_0),x_0(t_f))||^2\} \end{aligned}$$

für alle zulässigen Funktionen $(x,u) \in B_\epsilon(x_0,u_0)$ mit derselben Schaltstruktur bzgl. S gilt. Insbesondere ist (x_0,u_0) ein schwaches lokales Minimum verglichen mit zulässigen Paaren (x,u) der gleichen Schaltstruktur.

Beweisidee

Annahme (A) sei erfüllt. Dann lässt sich $[t_0, t_f]$ in N Teilintervalle aufteilen:

$$[t_{i-1}, t_i], \qquad i = 1, \ldots, N.$$

Bezogen auf jedes Teilintervall definieren wir Zustandsvariablen und Steuerfunktionen über dem normierten Intervall $[0, 1]$ mit zugehörigen Teilintervalllängen $\tau_i(s) := t_i - t_{i-1}$,
$i = 1, \ldots, N, s \in [0, 1]$:

$$x_i(s) := x(t_{i-1} + s\tau_i), \qquad u_i(s) := u(t_{i-1} + s\tau_i).$$

Offensichtlich gilt für $s_i \in [0, 1]$, $i = 1, \ldots, N$:

$$\sum_{i=1}^{N} \tau_i(s_i) = t_f - t_0.$$

Hilfsproblem

Problem P2H. Bestimme stückweise stetige Funktionen $u_i : [0,1] \to \mathbb{R}^m$, $i = 1, \ldots, N$, so dass das Funktional

$$J = \sum_{i=1}^{N} \int_0^1 \tau_i(s) \cdot L(t_{i-1} + s\tau_i, x_i(s), u_i(s)) ds$$

minimiert wird unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}
&x_i'(s) = \tau_i(s) \cdot f(t_{i-1} + s\tau_i, x_i(s), u_i(s)), && s \in [0,1], \text{f.ü.}, \ i = 1, \ldots, N,\\
&\tau_i'(s) = 0, && s \in [0,1], \text{f.ü.}, \ i = 1, \ldots, N,\\
&r(x_1(0), x_N(1)) = 0,\\
&x_i(0) - x_{i-1}(1) = 0, && i = 2, \ldots, N,\\
&\left(\sum_{i=1}^{N} \tau_i(0) \right) - (t_f - t_0) = 0.
\end{aligned}$$

Variablen des Hilfsproblems P2H

Variablen für das Hilfsproblem werden mit einem Sternchen gekennzeichnet:

$$x^* := (x_1^T, \tau_1, \ldots, x_N^T, \tau_N)^T, \qquad u^* := (u_1^T, \ldots, u_N^T)^T.$$

Die Hamilton-Funktion ist mit $\lambda^* := (\lambda_1^T, \lambda_1^{(\tau)}, \ldots, \lambda_N^T, \lambda_N^{(\tau)})^T$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^*(s, x^*, u^*, \lambda^*) &:= \sum_{i=1}^N \tau_i \mathcal{H}_i(s, x_i, u_i, \lambda_i) \quad \text{mit} \\ \mathcal{H}_i(s, x_i, u_i, \lambda_i) &:= L(t_{i-1} + s\tau_i, x_i, u_i) + \lambda_i^T f(t_{i-1} + s\tau_i, x_i, u_i), \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i = 1, \ldots, N. \end{aligned}$$

Beweisskizze

1. Ist (x_0, u_0) zulässig für Problem P2, so ist (x_0^*, u_0^*) zulässig für das Hilfsproblem P2H.
2. Sind die nichtglatten notwendigen Bedingungen erster Ordnung für (x_0, u_0) erfüllt, so sind die allgemeinen notwendigen Bedingungen für (x_0^*, u_0^*) erfüllt.
3. Ist die strenge Legendre-Clebsch Bedingung auf $[t_0, t_f]$ erfüllt, so ist die Bedingung für das Hilfsproblem P2H auf $[0, 1]$ erfüllt, denn:

$$\mathcal{H}^*_{u^* u^*} = \mathrm{Diag}\{\tau_1 \mathcal{H}_{u_1,u_1}, \ldots, \tau_N \mathcal{H}_{u_N,u_N}\}$$

Beweisskizze

4. Ist Regularitätsbedingung (R) für Problem P2 erfüllt, so ist (R) auch für das Hilfsproblem P2H erfüllt:

$$r^*(x^*(0), x^*(1)) := \begin{pmatrix} r(x_1(0), x_N(1)) \\ x_2(0) - x_1(1) \\ \vdots \\ x_N(0) - x_{N-1}(1) \\ \sum_{i=1}^{N} \tau_i(0) - (t_f - t_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p+n\cdot(N-1)+1}.$$

Die Jacobimatrix von $r^*(x^*(0), x^*(1))$ lautet

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} D_{x_s} r & 0 & & & & & & & & & D_{x_f} r & 0 \\ & & I_n & 0 & & & -I_n & 0 & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \ddots & & & \\ & & & & & I_n \; 0 & & & & -I_n \; 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \; 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \; 0 \end{array}\right).$$

Beweisskizze

5. Wir nutzen die Blockstruktur der Jacobimatrix von f^* und der Hessematrix von $\mathcal{H}^*$ bzgl. des Hilfsproblems P2H aus.
   - Die Riccatische Differentialgleichung wird erstellt für eine Matrix mit Bockstruktur:

$$Q^* = \mathrm{Diag}(Q_1^*, \ldots, Q_N^*) \quad \text{mit} \quad Q_i^* := \begin{pmatrix} Q_i & R_i \\ R_i^T & q_i \end{pmatrix}$$

Zugehörige Differentialgleichungen lauten:

$$\begin{aligned}
\dot{Q}_i &= \tau \cdot \big[-\mathcal{H}_{xx} - f_x^T Q_i - Q_i f_x \\
&\qquad + (\mathcal{H}_{xu} + Q_i f_u)(\mathcal{H}_{uu})^{-1}(\mathcal{H}_{xu} + Q_i f_u)^T \big], \\
\dot{R}_i &= -\mathcal{H}_x - Q_i f - \tau f_x^T R_i + (\mathcal{H}_{xu} + Q_i f_u)(\mathcal{H}_{uu})^{-1} \tau f_u^T R_i, \\
\dot{q}_i &= -2R_i^T f + \tau R_i^T f_u (\mathcal{H}_{uu})^{-1} f_u^T R_i,
\end{aligned}$$

$i = 1, \ldots, N$ auf dem normierten Intervall $[0, 1]$.

Beweisskizze

- Die Randbedingung für das Hilfsproblem P2H lautet:

$$\begin{pmatrix} Q^*(0) & 0 \\ 0 & -Q^*(1) \end{pmatrix} + D^2_{(x_s^*, x_f^*)}((\nu^*)^T r^*)$$

muss positiv definit auf der folgenden Menge sein:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Kern}\{D_{(x_s^*, x_f^*)} r^*(x^*(0), x^*(1))\} = \\
&\Big\{ \left(\eta_{s1}, \eta_{s1}^{(\tau)}, \ldots, \eta_{sN}, \eta_{sN}^{(\tau)}, \eta_{f1}, \eta_{f1}^{(\tau)}, \ldots, \eta_{fN}, \eta_{fN}^{(\tau)}\right) \in \mathbb{R}^{2N(n+1)} \Big| \\
&\qquad (\eta_{s1}, \eta_{fN}) \in \ \mathrm{Kern}\{D_{(x_s, x_f)} r(x_1(0), x_N(1))\}, \\
&\qquad \eta_{si} = \eta_{fi-1}, \ \ i = 2, \ldots, N, \\
&\qquad \sum_{i=1}^{N} \eta_{si}^{(\tau)} = 0 \Big\}.
\end{aligned}$$

Elektrischer Schaltkreis mit Diode

Problem DIO2. Minimiere das Funktional

$$J(u) := \frac{1}{2} \int_0^2 u^2(t) dt$$

unter den Nebenbedingungen

$$\dot{x} = \begin{cases} a(u-x), & x-u \leq 0 \\ b(u-x), & x-u > 0 \end{cases},$$

und den Randbedingungen

$$x(0) = 4, \qquad x(2) = 3.$$

Dabei sind die Parameter gegeben durch $a = 4$ und $b = 2$.

Anwendung der hinreichenden Bedingungen

Prüfe alle Voraussetzungen zu Satz 4:

1. Lösungskandidat ist zulässig.
2. Lösungskandidat erfüllt die notwendigen Bedingungen erster Ordnung für nichtglatte Optimalsteuerungsprobleme.
3. Die strenge Legendre-Clebsch Bedingung ist auf $[t_0, t_f]$ erfüllt.
4. Regularitätsbedingung (R) ist erfüllt.

Anwendung der hinreichenden Bedingungen

Weitere Voraussetzungen zu Satz 4:

5. Finde eine Lösung $Q : [t_0, t_f] \to \mathbb{R}$, $R : [t_0, t_f] \to \mathbb{R}$ und $q : [t_0, t_f] \to \mathbb{R}$ von
   - dem Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= 2cQ + (cQ)^2, \\ \dot{R} &= \frac{1}{\tau}[c\lambda - cQ(u-x) + \tau cR + \tau(cQ)(cR)], \\ \dot{q} &= \frac{1}{\tau}[-2cR(u-x) + \tau(cR)^2]. \end{aligned}$$

Anwendung der hinreichenden Bedingungen

Die Lösung Q, R und q erfülle die folgenden Sprung- und Randbedingungen:

- Die Matrix

$$\begin{pmatrix} Q(0) & R(0) & 0 & 0 \\ R(0) & q(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Q(2) & -R(2) \\ 0 & 0 & -R(2) & -q(2) \end{pmatrix}$$

ist positiv definit auf der Menge $\{(\eta_s, \eta_s^{(\tau)}, \eta_f, \eta_f^{(\tau)}) \in \mathbb{R}^4 | (\eta_s, \eta_f) \in \text{Kern}\{D_{(x_s,x_f)} r(x_0(t_0), x_0(t_f))\}\}$, und die Matrix

$$\begin{pmatrix} Q(t_1^+) - Q(t_1^-) & R(t_1^+) & -R(t_1^-) \\ R(t_1^+) & q(t_1^+) & 0 \\ -R(t_1^-) & 0 & -q(t_1^-) \end{pmatrix}$$

ist positiv definit auf $\mathbb{R}^3$.

Vereinfachung der Randbedingungen

Der Zustand ist im Anfags- und Endpunkt fest vorgegeben.
Der Endzeitpunkt $t_f = 2$ ist fest vorgegeben.
Wähle für das Hilfsproblem die zusätzliche Bedingung:

$$\tau_1(1) + \tau_2(0) - (t_f - t_0) = 0.$$

Dann muss gelten:

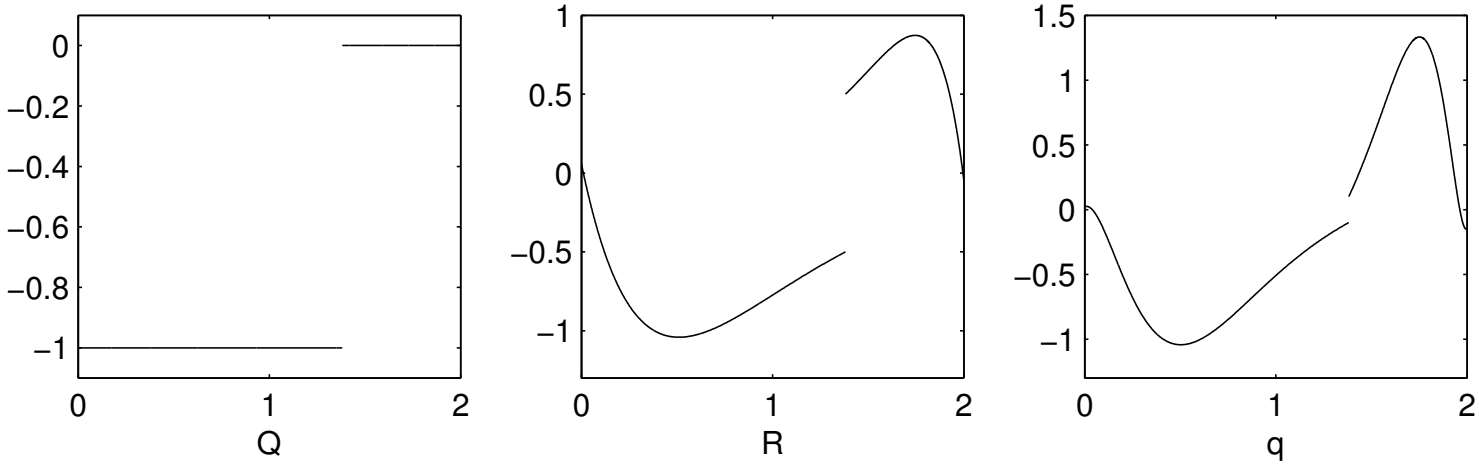
Die Lösung Q, R und q erfülle die folgenden Sprung- und Randbedingungen:

- $q(0) > 0$ und $q(2) < 0$, und die Matrix

$$\begin{pmatrix} Q(t_1^+) - Q(t_1^-) & R(t_1^+) + R(t_1^-) \\ R(t_1^+) + R(t_1^-) & q(t_1^+) - q(t_1^-) \end{pmatrix}$$

ist positiv definit auf $\mathbb{R}^2$.

Lösung der Riccatischen Differentialgleichung



t	$Q(t)$	$R(t)$	$q(t)$
t_0	-1.0000	0.0598	0.0214
t_1^-	-1.0000	-0.5000	-0.1000
t_1^+	0.0000	0.5000	0.1000
t_f	0.0000	-0.0448	-0.1460

Ausblick

weitere Möglichkeiten:

- gemischte und Steuerrestriktionen
- modifizierte strenge Legendre-Clebsch Bedingung
- Schaltfunktion der Ordnung 1
- Probleme mit freien Steuerungen
- Probleme mit singulärem Zustand, Schaltfunktion der Ordnung 0

noch offen:

- Probleme mit Zustandsbeschränkungen
- Probleme mit singulärem Zustand, Schaltfunktion der Ordnung 1
- Schaltfunktionen höherer Ordnung

Literatur

- F. H. Clarke. *Optimization and Nonsmooth Analysis*. SIAM, Philadelphia, 1990.
- H. Maurer and S. Pickenhain. Second-Order Sufficient Conditions for Control Problems with Mixed Control-State Constraints. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 86(3): 649-667, 1995.
- H. J. Oberle. Nonsmooth Optimal Control Problems with Switching Functions of Order Zero. *Hamburger Beiträge zur Angewandten Mathematik*, Reihe A: Preprint 192, 2006.