Optimalsteuerungsaufgaben mit singulärem Zustand

Hans Joachim Oberle, Ricki Rosendahl

Schwerpunkt Optimierung und Approximation
Universität Hamburg

Hamburg, 19. April 2005

Inhalt

Allgemeine Optimalsteuerungsaufgabe

Bestimme:

$x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, Zustandsvariable (stetig, stückweise C^1)
$u : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, Steuerfunktion (stückweise stetig)

so dass das Funktional

$$I = g(x(b))$$

minimiert wird unter den Nebenbedingungen

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \ t \in [a, b], \ \text{f.ü.}, \qquad \text{(Zustandsgleichung)}$$

$$r(x(a), x(b)) = 0, \qquad \text{(Randbedingung)}$$

$$u_{min} \leq u(t) \leq u_{max}. \qquad \text{(Steuerbeschränkung)}$$

Ökonomisches Beispiel

Bestimme:

$$\begin{array}{ll} H, K : [0, T] \to \mathbb{R} & \text{Humankapital, Kapital} \\ c, s, \ell : [0, T] \to \mathbb{R} & \text{Konsum, Ausbildungsanteil, Nichtfreizeit} \end{array}$$

so dass das Funktional

$$I(c, s, l) = -\int_0^T U(t, c, \ell, H)\mathrm{e}^{-\rho t} dt - \Gamma \frac{K(T)^{1-\kappa}}{1-\kappa}$$

minimiert wird unter den Nebenbedingungen

$$\dot{H} = \sigma H^{\varepsilon} s \ell - \delta H, \qquad H(0) = H_0,$$

$$\dot{K} = i\, K + rH(1 - (1-a)s - as^2)\ell - c, \qquad K(0) = K_0,$$

$$c(t) > 0, \qquad 0 \le s(t) \le 1, \qquad 0 \le \ell(t) < 1.$$

Parameter i

Unstetigkeit in der rechten Seite der Differentialgleichung:

$$\dot{K} = i\, K + rH(1 - (1-a)s - as^2)\ell - c.$$

Parameter i: Zinssatz auf Kapital K:

$$i := \begin{cases} i_1 = 0.04, & \text{if} \quad K(t) \geq 0, \\ i_2 \geq i_1, & \text{if} \quad K(t) < 0. \end{cases}$$

Inhalt

Allgemeine Optimalsteuerungsaufgabe

Bestimme:

$$
\begin{array}{ll}
x : [a,b] \to \mathbb{R}^n, & \text{Zustandsvariable (stetig, stückweise } C^1) \\
u : [a,b] \to \mathbb{R}^m, & \text{Steuerfunktion (stückweise stetig)}
\end{array}
$$

so dass das Funktional

$$I = g(x(b))$$

minimiert wird unter den Nebenbedingungen

$$
\begin{array}{ll}
\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \; t \in [a,b], \text{ f.ü.}, & \text{(Zustandsgleichung)} \\
r(x(a), x(b)) = 0, & \text{(Randbedingung)} \\
u_{min} \le u(t) \le u_{max}. & \text{(Steuerbeschränkung)}
\end{array}
$$

Notwendige Bedingungen - stetiger Fall

Definiere Hamilton-Funktion:

$$\mathcal{H}(x, u, \lambda) := \lambda^T f(x, u)$$

In einem Lösungspunkt (x^0, u^0) muss dann gelten:

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}(t) &= -\mathcal{H}_x(x^0(t), u^0(t), \lambda(t)), \\
u^0(t) &= \operatorname{argmin}\{\mathcal{H}(x^0(t), u, \lambda(t)) : u_{min} \leq u \leq u_{max}\}, \\
\lambda(a) &= -\frac{\partial}{\partial x^0(a)} [\nu^T r(x^0(a), x^0(b))], \\
\lambda(b) &= \frac{\partial}{\partial x^0(b)} [\nu_0\, g(x^0(b)) + \nu^T r(x^0(a), x^0(b))], \\
\mathcal{H}[t_j^+] &= \mathcal{H}[t_j^-].
\end{aligned}$$

Randwertaufgabe - stetiger Fall

Bestimme:

$$\begin{array}{ll} x : [a,b] \to \mathbb{R}^n, & \text{Zustandsvariable (stetig, stückweise } C^1) \\ \lambda : [a,b] \to \mathbb{R}^n, & \text{adjungierte Variable (stetig, stückweise } C^1) \end{array}$$

welche die Differentialgleichungen

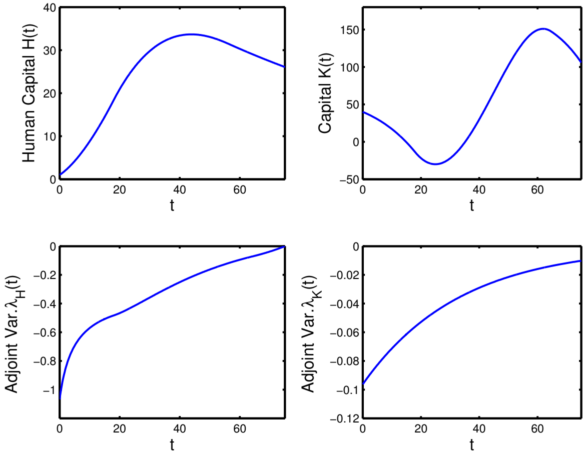
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)), \\ \dot{\lambda}(t) &= -\mathcal{H}_x(x(t), u(t), \lambda(t)) \end{aligned}$$

und folgende Randbedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} r(x(a), x(b)) &= 0, \\ \lambda(a) &= -\frac{\partial}{\partial x^0(a)} [\nu^T r(x^0(a), x^0(b))], \\ \lambda(b) &= \frac{\partial}{\partial x^0(b)} [\nu_0\, g(x^0(b)) + \nu^T r(x^0(a), x^0(b))]. \end{aligned}$$

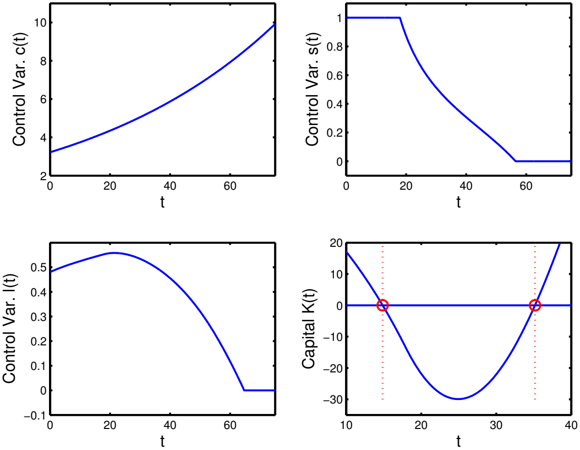
Ökonomisches Beispiel: Lösung - stetiger Fall

Zustandsvariablen und adjungierte Variablen bei $i_2 = i_1$:



Ökonomisches Beispiel: Lösung - stetiger Fall

Steuerfunktionen bei $i_2 = i_1$:



Inhalt

Optimalsteuerungsaufgabe - regulärer Fall

Bestimme:

$x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, Zustandsvariable (stetig, stückweise C^1)
$u : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, Steuerfunktion (stückweise stetig)

so dass das Funktional

$$I = g(x(b))$$

minimiert wird unter den Nebenbedingungen

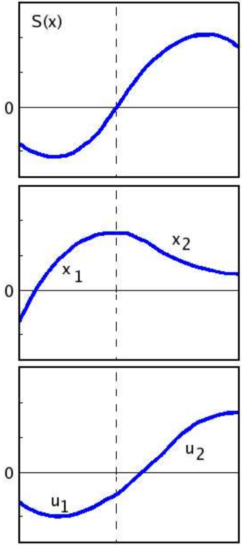
$$\dot{x}(t) = \begin{cases} f_1(x(t), u(t)), & \text{falls } S(x) \leq 0, \\ f_2(x(t), u(t)), & \text{falls } S(x) > 0, \end{cases} \quad t \in [a, b], \text{ f.ü.},$$

$$r(x(a), x(b)) = 0,$$

$$u_{min} \leq u(t) \leq u_{max}.$$

Annahme: Die Schaltfunktion $S(x)$ besitze nur isolierte Nullstellen!

Transformation



Teile das Intervall $[a, b]$ in zwei Teilintervalle bezüglich der Nullstelle t_1 von $S(x)$.

Definiere mit $\tau \in [0, 1]$:

$$
\begin{aligned}
x_1(\tau) &:= x(a + \tau(t_1 - a)), \\
x_2(\tau) &:= x(t_1 + \tau(b - t_1)), \\
u_1(\tau) &:= u(a + \tau(t_1 - a)), \\
u_2(\tau) &:= u(t_1 + \tau(b - t_1)).
\end{aligned}
$$

Tranformierte Optimalsteuerungsaufgabe

Bestimme:

$$\begin{array}{ll} (x_1, x_2) : [a, b] \to \mathbb{R}^{2n}, & \text{Zustandsvariablen (stetig, stückweise } C^1) \\ (u_1, u_2) : [a, b] \to \mathbb{R}^{2m}, & \text{Steuerfunktionen (stückweise stetig)} \end{array}$$

so dass das Funktional

$$I = g(x_2(1))$$

minimiert wird unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} {x_1}'(\tau) &= (t_1 - a) f_1(x_1(\tau), u_1(\tau)), & r(x_1(0), x_2(1)) &= 0, \\ {x_2}'(\tau) &= (b - t_1) f_2(x_2(\tau), u_2(\tau)), & x_2(0) - x_1(1) &= 0, \\ t_1'(\tau) &= 0, & S(x_1(1)) &= 0, \end{aligned}$$

$$u_{min} \leq u_i(\tau) \leq u_{max}, \quad i = 1, 2.$$

Rücktransformation

Durch die Definition von

$$\lambda(t) := \begin{cases} \lambda_1\left(\frac{t-a}{t_1-a}\right), & t \in [a, t_1[\\ \lambda_2\left(\frac{t-t_1}{b-t_1}\right), & t \in]t_1, b] \end{cases}$$

erhält man notwendige Bedingungen für das Ausgangsproblem:

Optimalsteuerungsaufgabe - regulärer Fall.

Notwendige Bedingungen - regulärer Fall

Definiere Hamilton-Funktion, $i = 1, 2$:

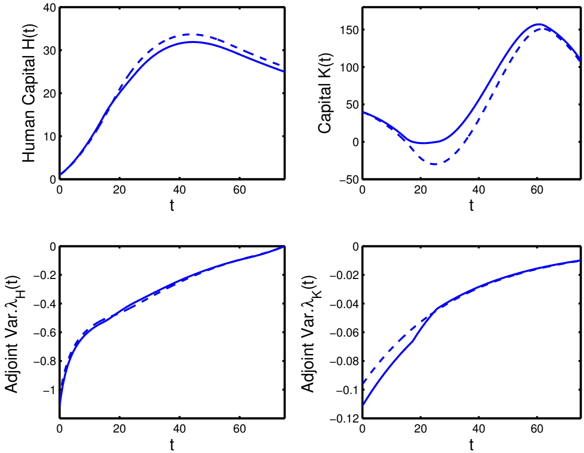
$$\mathcal{H}(x, u, \lambda) := \mathcal{H}_i(x, u, \lambda) := \lambda^T f_i(x, u)$$

In einem Lösungspunkt (x^0, u^0) muss dann gelten:

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}(t) &= -\mathcal{H}_x(x^0(t), u^0(t), \lambda(t)), \\
u^0(t) &= \operatorname{argmin}\{\mathcal{H}(x^0(t), u, \lambda(t)) : u_{min} \le u \le u_{max}\}, \\
\lambda(a) &= -\frac{\partial}{\partial x^0(a)} [\nu^T r(x^0(a), x^0(b))], \\
\lambda(b) &= \frac{\partial}{\partial x^0(b)} [\nu_0\, g(x^0(b)) + \nu^T r(x^0(a), x^0(b))], \\
\lambda(t_j^+) &= \lambda(t_j^-) + \kappa_j S_x(x^0(t_j)), \quad j = 1, \ldots, s, \\
\mathcal{H}[t_j^+] &= \mathcal{H}[t_j^-], \quad j = 1, \ldots, s.
\end{aligned}$$

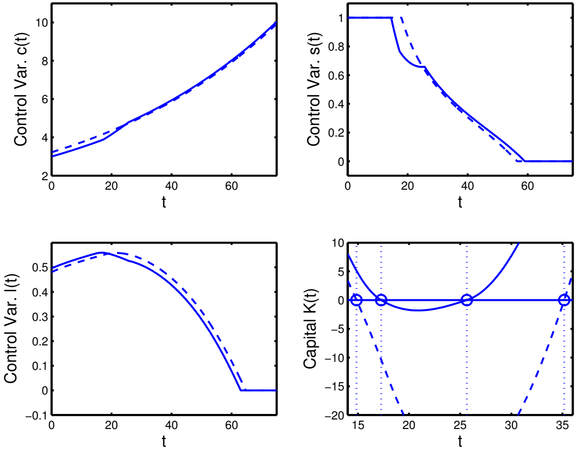
Ökonomisches Beispiel: Lösung - regulärer Fall

Zustandsvariablen und adjungierte Variablen bei $i_2 > i_1$:



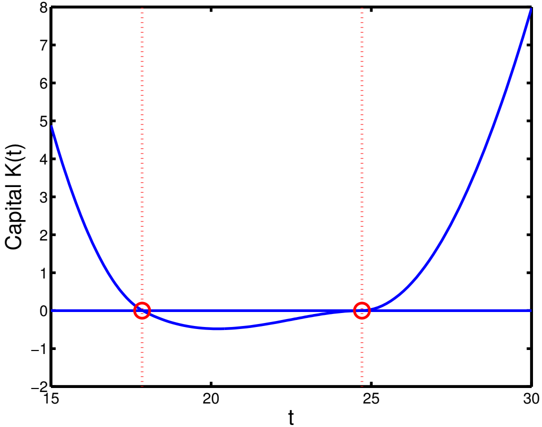
Ökonomisches Beispiel: Lösung - regulärer Fall

Steuerfunktionen bei $i_2 > i_1$:



Ökonomisches Beispiel: Lösung - regulärer Fall

Zustandsvariable $K(t)$ im Grenzfall $i_2 = i_2^*$,
Zweiten Nullstelle wird horizontal durchlaufen.



Inhalt

- Einführung
- Stetige Optimalsteuerungsaufgabe
- Unstetige Optimalsteuerungsaufgabe - regulärer Fall
- Unstetige Optimalsteuerungsaufgabe - singulärer Fall
- Zusammenfassung

Optimalsteuerungsaufgabe - singulärer Fall

Bestimme:

$x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, Zustandsvariable (stetig, stückweise C^1)
$u : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, Steuerfunktion (stückweise stetig)

so dass das Funktional

$$I = g(x(b))$$

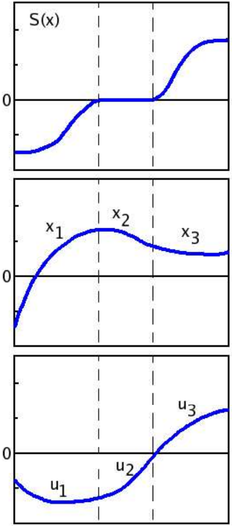
minimiert wird unter den Nebenbedingungen

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} f_1(x(t), u(t)), & \text{falls } S(x) < 0, \\ f_2(x(t), u(t)), & \text{falls } S(x) = 0, \\ f_3(x(t), u(t)), & \text{falls } S(x) > 0, \end{cases} \quad t \in [a, b], \text{ f.ü.},$$

$$r(x(a), x(b)) = 0,$$

$$u_{min} \leq u(t) \leq u_{max}.$$

Transformation



Teile das Intervall $[a, b]$ in drei Teilintervalle bezüglich der Anfangs- und Endpunkte t_1, t_2 des singulären Teilstückes von $S(x)$.

Definiere mit $\tau \in [0, 1]$:

$$
\begin{aligned}
x_1(\tau) &:= x(a + \tau(t_1 - a)), \\
x_2(\tau) &:= x(t_1 + \tau(t_2 - t_1)), \\
x_3(\tau) &:= x(t_2 + \tau(b - t_2)), \\
u_1(\tau) &:= u(a + \tau(t_1 - a)), \\
u_2(\tau) &:= u(t_1 + \tau(t_2 - t_1)), \\
u_3(\tau) &:= u(t_2 + \tau(b - t_2)).
\end{aligned}
$$

Tranformierte Optimalsteuerungsaufgabe

Bestimme:

$(x_1, x_2, x_3) : [a, b] \to \mathbb{R}^{3n}$, Zustandsvariablen (stetig, stückweise C^1)
$(u_1, u_2, u_3) : [a, b] \to \mathbb{R}^{3m}$, Steuerfunktionen (stückweise stetig)

so dass das Funktional

$$I \;=\; g(x_3(1))$$

minimiert wird unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}
{x_1}'(\tau) &= (t_1 - a) f_1(x_1(\tau), u_1(\tau)), & r(x_1(0), x_3(1)) &= 0,\\
{x_2}'(\tau) &= (t_2 - t_1) f_2(x_2(\tau), u_2(\tau)), & x_2(0) - x_1(1) &= 0,\\
{x_3}'(\tau) &= (b - t_2) f_3(x_3(\tau), u_3(\tau)), & x_3(0) - x_2(1) &= 0,\\
t_1'(\tau) &= 0, & S(x_2(\tau)) &= 0,\\
t_2'(\tau) &= 0, & &
\end{aligned}$$

$$u_{min} \le u_i(\tau) \le u_{max}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Notwendige Bedingungen - singulärer Fall

Definiere Hamilton-Funktion, $i = 1, 2, 3$:

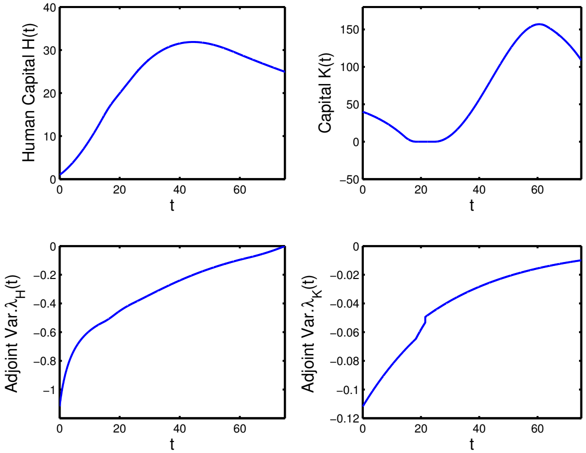
$$\mathcal{H}(x, u, \lambda, \mu) := \mathcal{H}_i(x, u, \lambda, \mu) := \lambda^T f_i(x, u) + \mu S^{(1)}(x, u)$$

In einem Lösungspunkt (x^0, u^0) muss dann gelten:

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}(t) &= -\mathcal{H}_x(x^0(t), u^0(t), \lambda(t), \mu(t)), \\
u^0(t) &= \operatorname{argmin}\{\mathcal{H}(x^0(t), u, \lambda(t), \mu(t)) : u_{min} \le u \le u_{max}\}, \\
\mu(t) S(x^0(t)) &= 0, \\
\lambda(a) &= -\frac{\partial}{\partial x^0(a)} [\nu^T r(x^0(a), x^0(b))], \\
\lambda(b) &= \frac{\partial}{\partial x^0(b)} [\nu_0\, g(x^0(b)) + \nu^T r(x^0(a), x^0(b))], \\
\lambda(t_j^+) &= \lambda(t_j^-) + \kappa_j S_x(x^0(t_j)), \qquad j \in J_{reg} \cup J_{anf}, \\
\mathcal{H}[t_j^+] &= \mathcal{H}[t_j^-], \qquad j = 1, \ldots, s.
\end{aligned}$$

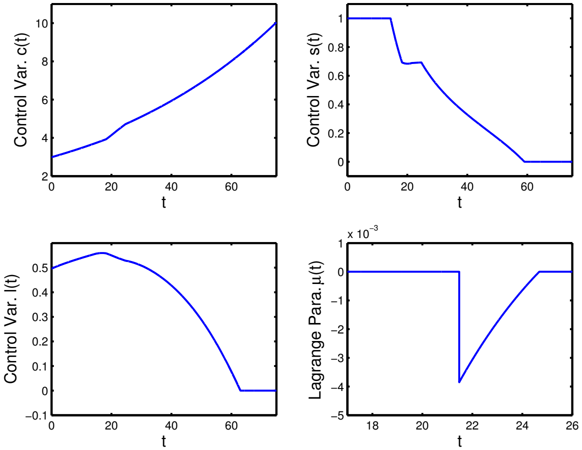
Ökonomisches Beispiel: Lösung - singulärer Fall

Zustandsvariablen und adjungierte Variablen bei $i_2 > i_2^*$:



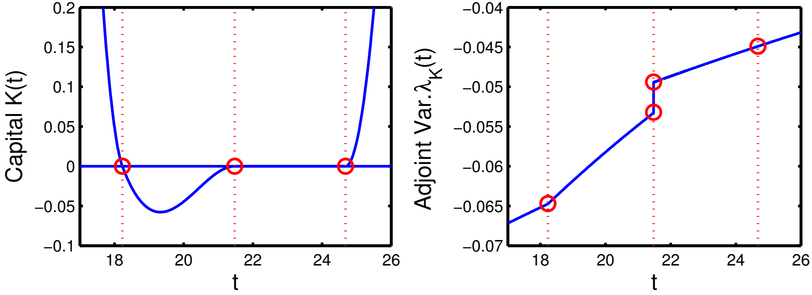
Ökonomisches Beispiel: Lösung - singulärer Fall

Steuerfunktionen bei $i_2 > i_2^*$:



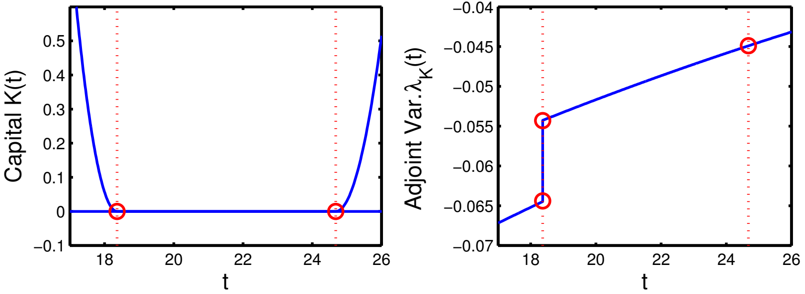
Ökonomisches Beispiel: Lösung - singulärer Fall

Zustandsvariable $K(t)$ mit singulärem Teilstück und adjungierte Variable $\lambda_K(t)$ mit Sprung, $i_2 > i_2^*$:



Ökonomisches Beispiel: Lösung - zustandsbeschränkter Fall

Zustandsbeschränkung $K(t) \geq 0$:



Zusammenfassung

- Theorie: Optimalsteuerungsaufgabe und notwendige Bedingungen
- Anwendung auf ökonomisches Beispiel
    - stetiger Fall
    - regulärer Fall
    - singulärer Fall
    - zustandsbeschränkter Fall

Vielen Dank!

Anhang: Steuerfunktionen, $i_2 = i_1$

$$c^* = (-\lambda_K)^{-1/\alpha}$$

$$s^* = \begin{cases} 0, & \text{if } s_0 < 0, \\ s_0, & \text{if } s_0 \in [0,1], \\ 1, & \text{if } s_0 > 1 \end{cases}$$

$$\ell^* = \begin{cases} 0, & \text{if } \Phi(s^*) \geq -\xi, \\ \ell_0, & \text{if } \Phi(s^*) < -\xi, \end{cases}$$

$$s_0 := \frac{a-1}{2\,a} + \frac{\lambda_H\,\sigma\,H^{\varepsilon-1}}{2\,a\,r\,\lambda_K},$$

$$\ell_0 := 1 - (-\xi/\Phi(s^*))^{1/\beta},$$

$$\Phi(s) := \lambda_H\,\sigma\,H^{\varepsilon}\,s + \lambda_K\,r\,H\,g(s).$$

Anhang: Parameter des ökonomischen Beispiels

α	$=$	2	β	$=$	1.5
γ	$=$	0.8	κ	$=$	0.8
ξ	$=$	0.4	ν	$=$	0.0015
Γ	$=$	0.2	ρ	$=$	0.01
σ	$=$	1	ε	$=$	0.35
δ	$=$	0.01	r	$=$	1
a	$=$	0.3	T	$=$	75
H_0	$=$	1	K_0	$=$	40

Anhang: ökonomisches Beipsiel: Lösung zustandsbschränkter Fall