Optimale Steuerung instationärer Strömungsvorgänge mit Wärmeübertragung

Florian Prill

Universität Hamburg Fachbereich Mathematik

20.12.2005 / Vortrag zur Diplomarbeit

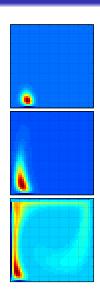
Zielsetzung

Einleitung

Optimierung mit partiellen Differentialgleichungen –

Anwendung: Beeinflussung einer Flüssigkeitsströmung.

- Modellierung mit den inkompressiblen NSE.
- Diskretisierung mit finiten Differenzen.
- Zielfunktional: Gradientenberechnung mit der Adjungiertenmethode.





Bibliographie

Einleitung



Optimal and instantaneous control of the instationary Navier-Stokes equations.

Habilitationsschrift, 2002

- M. Griebel, T. Dornseifer und T. Neunhoeffer Numerical simulation in fluid dynamics. SIAM Monographs, 1997
- F. Troeltzsch
 Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen.
 Vieweg Verlag, 2005

Beispiele

Ausblick

00000

Gliederung

Einleitung Adjungiertenmethode

Modellierung

- 2 Modellierung
- 3 Optimalsteuerung
- A Numerische Simulation
- Beispiele

Abstrakte Problemformulierung

Modellierung

Minimiere
$$J(\mathbf{y}, u)$$
 über $(\mathbf{y}, u) \in W \times U$
u. d. N. $\mathbf{e}(\mathbf{y}, u) = \mathbf{0}$.

U: Banachraum der zulässigen Steuerungen

W: Banachraum der möglichen Systemzustände.

 $e: W \times U \rightarrow Z^*$ Zustandsoperator (Z: Banachraum).

Ist $\mathbf{e}(\mathbf{y}, u) = \mathbf{0}$ lokal und eindeutig nach $\mathbf{y} = \mathbf{y}(u)$ auflösbar:

Minimiere
$$\hat{J}(u)$$
 über $u \in U$
mit $\hat{J}(u) := J(\mathbf{y}(u), u)$ reduziertes Zielfunktional.

Gradient des reduzierten Zielfunktionals

Differenzierbarkeitseigenschaften:

Modellierung

- In einer Umgebung von $(\mathbf{y}(u), u)$ sei J Frechét-differenzierbar.
- e sei stetig Frechét-differenzierbar,
- die partielle Ableitung $\mathbf{e}_{\mathbf{v}}(\mathbf{y}(u), u)$ sei lokal invertierbar.

Satz über implizite Funktionen liefert:

$$\mathbf{e}(\mathbf{y}, u) = \mathbf{0}$$
 lokal eindeutig auflösbar zu $u \mapsto \mathbf{y}(u)$.

und

$$\mathbf{y}'(u) \in \mathcal{L}(U, W)$$

 $\mathbf{y}'(u) = -\mathbf{e}_{\mathbf{y}}^{-1}(\mathbf{y}(u), u)\mathbf{e}_{u}(\mathbf{y}(u), u).$

Adjungiertengleichung

Modellierung

Anwendung der Kettenregel auf $\hat{J}(u) = J(\mathbf{y}(u), u)$ und Einsetzen von $\mathbf{y}'(u)$:

$$\hat{J}'(u)(\delta u) = J_u(\mathbf{y}(u), u)(\delta u) - \mathbf{e}_u^*(\mathbf{y}(u), u)\mathbf{e}_{\mathbf{y}}^{-*}(\mathbf{y}(u), u)J_{\mathbf{y}}(u)(\delta u)$$
$$= (J_u(\mathbf{y}, u), \delta u)_{U^*, U} + (\mathbf{e}_u^*(\mathbf{y}, u)\lambda, \delta u)_{U^*, U}$$

für
$$\lambda := -(\mathbf{e}_{\mathbf{y}}^*(\mathbf{y}, u))^{-1} J_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}, u) \in \mathbb{Z}$$
: adjungierter Zustand.

Berechnung von λ : Adjungiertengleichung

$$\mathbf{e}_{\mathbf{v}}^{*}(\mathbf{y}, u)\lambda + J_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}, u) = 0.$$

Optimierungsproblem

Problemstellung:

Steuerung einer zweidimensionalen Flüssigkeitsströmung

Zustand der Strömung \mathbf{y}

Steuerungseinfluss 11.

Der Zustand y ist Lösung der $\mathbf{e}(\mathbf{y}, u) = \mathbf{0}$

Navier-Stokes-Gleichungen

 $J(\mathbf{y}, u)$ problemabhängig formulierte

Zielfunktion

Gliederung

- 2 Modellierung Navier-Stokes-Gleichungen
- 3 Optimalsteuerung
- A Numerische Simulation
- Beispiele

Physikalische Größen

$$\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$$
 Ortsgebiet $t \in [0, T]$ Zeithorizont $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$ Geschwindigkeitsvektor $p(\mathbf{x}, t)$ Druck

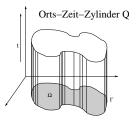


$$\varrho(\mathbf{x},t)$$
 Dichte

$$\mathbf{g} = (g_1, g_2)^T$$
 Vektor der Erdbeschleunigung

Schreibweise für den Nablakalkül:

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} = \left(\sum_{i=1}^{2} a_{i} \frac{\partial b_{j}}{\partial x_{i}}\right)_{i=1,2}, \ \nabla \cdot \mathbf{a} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial a_{i}}{\partial x_{i}}, \ \Delta c = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^{2} c}{\partial x_{i}^{2}}.$$



Erhaltungssätze

- Massenerhaltung: Masse kann weder erzeugt noch zerstört werden.

Erhaltungssätze

Massenerhaltung:

$$\frac{d}{dt} \int_{\sigma(t)} \varrho(\mathbf{x}, t) \ d\mathbf{x} = 0$$

wobei $\sigma(t) \subseteq \Omega$: beschränktes Kontrollvolumen.

- Impulserhaltung (2. Newtonsches Axiom): Die zeitliche

Navier-Stokes-Gleichungen

Einleitung

Erhaltungssätze

Massenerhaltung:

$$\frac{d}{dt} \int_{\sigma(t)} \varrho(\mathbf{x}, t) \ d\mathbf{x} = 0$$

wobei $\sigma(t) \subseteq \Omega$: beschränktes Kontrollvolumen.

- Impulserhaltung (2. Newtonsches Axiom): Die zeitliche Anderung des Impulses entspricht der Summe der einwirkenden Kräfte.

Erhaltungssätze

Massenerhaltung:

Modellierung

0000000000

$$\frac{d}{dt} \int_{\sigma(t)} \varrho(\mathbf{x}, t) \ d\mathbf{x} = 0$$

wobei $\sigma(t) \subseteq \Omega$: beschränktes Kontrollvolumen.

Impulserhaltung:

$$\frac{d}{dt} \int_{\sigma(t)} \varrho(\mathbf{x}, t) \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) \ d\mathbf{x} = \int_{\sigma(t)} \mathbf{f}_{\Sigma} \ d\mathbf{x}.$$

Erhaltungssätze

Massenerhaltung:

Modellierung

0000000000

$$\frac{d}{dt} \int_{\sigma(t)} \varrho(\mathbf{x}, t) \ d\mathbf{x} = 0$$

wobei $\sigma(t) \subseteq \Omega$: beschränktes Kontrollvolumen.

Impulserhaltung:

$$\frac{d}{dt} \int_{\sigma(t)} \varrho(\mathbf{x}, t) \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) \ d\mathbf{x} = \int_{\sigma(t)} \mathbf{f}_{\Sigma} \ d\mathbf{x}.$$

• Energieerhaltung (1. Hauptsatz der Thermodynamik): Die zeitliche Anderung der Gesamtenergie ist gleich der Summe der durch die Volumen- und Oberflächenkräfte eingebrachten Leistung sowie der Energieänderung durch Wärmeübergang.

Erhaltungssätze

Massenerhaltung:

$$\frac{d}{dt} \int_{\sigma(t)} \varrho(\mathbf{x}, t) \ d\mathbf{x} = 0$$

wobei $\sigma(t) \subseteq \Omega$: beschränktes Kontrollvolumen.

Impulserhaltung:

$$\frac{d}{dt} \int_{\sigma(t)} \varrho(\mathbf{x}, t) \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) \ d\mathbf{x} = \int_{\sigma(t)} \mathbf{f}_{\Sigma} \ d\mathbf{x}.$$

Energieerhaltung:

$$\frac{d}{dt} \int_{\sigma(t)} \varrho \varepsilon \ d\mathbf{x} = W(\sigma(t)) + Q(\sigma(t)).$$

Satz (Transporttheorem von Reynolds)

$$\frac{d}{dt} \int_{\sigma(t)} F(\mathbf{x}, t) \ d\mathbf{x} = \int_{\sigma(t)} \left[\frac{\partial F}{\partial t} (\mathbf{x}, t) + (\mathbf{y}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) F(\mathbf{x}, t) + F(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) \right] \ d\mathbf{x}.$$

Konstitutive Gleichungen

Modellierung

z.B. Newtonsches Fluid, Fouriersche Wärmeleitung.

Entdimensionalisierung (Π-Theorem von Buckingham)

Mathematische Modelle physikalischer Prozesse lassen sich in dimensionslose Form bringen. Die dimensionslosen Parameter können als Produkte von Potenzen der ursprünglichen Parameter geschrieben werden.

Erhaltungsgleichungen

- Transporttheorem +
- konstitutive Gleichungen
- Entdimensionalisierung +
- Näherung für Auftriebsphänomene +
- inkompressible

Navier-Stokes-Gleichungen mit Boussinesq-Approximation

- → Die Dichte ist konstant außer in den Termen der Auftriebskräfte; dort: Linearer Ansatz for $\varrho(\theta)$.
- → Alle anderen Fluideigenschaften werden als konstant angenommen.

Zustandsgleichungen

Zustandsgleichungen

$$\operatorname{div} \mathbf{y} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} + (\mathbf{y} \cdot \nabla)\mathbf{y} - \frac{1}{Re}\Delta\mathbf{y} + \nabla p = -\gamma \mathbf{g}\theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{y} \cdot \nabla)\theta - \frac{1}{Re}\frac{1}{Pr}\Delta\theta = 0$$

Reynoldszahl
$$Re=\frac{\varrho_{\infty}u_{\infty}L}{\mu}$$
, Prandtl
zahl $Pr=\frac{\nu\varrho_{\infty}c_{p}}{k}$

Randbedingungen

Modellierung

00000000000

Randbedingungen für die Geschwindigkeiten:

1 Haftbedingung (no-slip condition) Kein Fluid dringt durch die Wand, und das Fluid haftet an der Wand, d.h.

$$\mathbf{y} = \mathbf{0}$$
 auf $\Gamma_{no-slip}$.

2 Einströmbedingung (inflow condition) Beide Geschwindigkeitskomponenten sind fest vorgegeben:

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_{inflow}$$
 auf Γ_{in} , $\mathbf{y}_{inflow} : [0, T] \to \mathbb{R}^2$ gegeben.

Randbedingungen

Randbedingungen für das Temperaturfeld:

1 Vorgegebene Wandtemperatur: Dirichlet-Randbedingungen:

$$\theta|_{\Gamma} = \theta_0$$
 , θ_0 vorgegeben.

2 Definierter Wärmestrom Neumann-Randbedingungen:

$$-\kappa \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\eta}\bigg|_{\Gamma} = q_w$$

mit q_w : Wärmestrom, κ : Wärmeleitkoeffizient.

Gliederung

- 2 Modellierung

Schwache Formulierung

- 3 Optimalsteuerung
- A Numerische Simulation
- Beispiele

Schwache Formulierung

Einleitung

Integraldarstellung

- \rightsquigarrow Wie ist der Zustandsoperator $\mathbf{e}(\mathbf{y}, u)$ definiert?
- \leadsto Welche Gestalt hat der Raum W der möglichen Systemzustände?

Integraldarstellung

Modellierung

00000000000

 $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^2(\overline{Q}), \ p \in \mathcal{C}^1(\overline{Q})$ seien klassische Lösungen von

$$\operatorname{div} \mathbf{y} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} + (\mathbf{y} \cdot \nabla)\mathbf{y} - \frac{1}{Re}\Delta\mathbf{y} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega$$

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \text{ in } \Omega ; \ \mathbf{y} = \mathbf{0} \text{ auf } \Gamma \times (0, T)$$

Wähle Testfunktion $\mathbf{v} \in \mathcal{V} := \{ \mathbf{y} \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\Omega) \mid \operatorname{div} \mathbf{y} = 0 \}.$ \Rightarrow Multiplikation mit v, Integration, partielle Integration:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}) \ d\mathbf{x} + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{y} \cdot \nabla \mathbf{v} \ d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{y} \cdot \nabla) \mathbf{y} \cdot \mathbf{v} \ d\mathbf{x}$$
$$- \int_{\Omega} p(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \ d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} p(\mathbf{v} \cdot \eta) \ dS = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}) \ d\mathbf{x}.$$

Integraldarstellung

Modellierung

00000000000

Umformulierung: Für $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ gilt

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{y}, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{Re}(\mathbf{y}, \mathbf{v})_{H^1} + b(\mathbf{y}, \mathbf{y}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)}$$

mit dem Skalarprodukt

$$(\mathbf{y}, \mathbf{v})_{H^1} = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}) \ d\mathbf{x}$$

und der Trilinearform

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) := \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \ d\mathbf{x}.$$

⇒ Integraldarstellung macht bereits Sinn für allgemeinere Lösungsräume.

Funktionenräume

Man definiert die Räume

$$V := \overline{\mathcal{V}}^{\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}} \quad \text{und} \quad H := \overline{\mathcal{V}}^{\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}}.$$

Es werden Funktionen $\mathbf{y}:[0,T]\to V$ betrachtet.

- Einführung von Treppenfunktionen, Messbarkeits- und Integralbegriff
 - $\Rightarrow Bochner-R\"{a}ume\ L^p(0,T;V)$
- Distributionelle Zeitableitung $\frac{d}{dt}$

Definition des Zustandsoperators $\mathbf{e}: W \to Z^*$ mit

$$W := \{ \mathbf{y} \in L^2(0, T; V) \text{ mit distributioneller Zeitableitung} \}$$

 $Z := L^2(0, T; V) \times H$

Existenz- und Eindeutigkeitsresultate

Satz (Existenz- und Eindeutigkeitssatz)

Bei Dirichlet-0-Randbedingungen gilt: Für jede Anfangsbedingung $\mathbf{u}_0 \in H$ existiert genau eine schwache Lösung $y \in W$ der Navier-Stokes-Gleichungen.

Gliederung

Einleitung

- 2 Modellierung
- 3 Optimalsteuerung Differentiate-then-Discretize
- 4 Numerische Simulation
- Beispiele

Welche Gestalt hat die Adjungiertengleichung

$$\mathbf{e}_{\mathbf{y}}^{*}(\mathbf{y}, u)\lambda + J_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}, u) = 0?$$

- → Steuereinflüsse?
- \rightsquigarrow Wie ist das Zielfunktional $J(\mathbf{y}, u)$ definiert?

Strömungsbeeinflussung: Uberblick

Zielsetzungen:

- Tracking-Type-Zielfunktionen Steuerung der Strömung, so dass sie "möglichst gleich" einem Strömungsfeld $\mathbf{z}(\mathbf{x},t)$ / Temperaturfeld $\theta_d(\mathbf{x},t)$ ist.
 - \rightsquigarrow Parameteridentifikation
 - *→ Vermeidung heißer Zonen*
- Minimierung des Strömungswiderstandes eines angeströmten Körpers
- Minimierung der Wirbelstärke als Ansatz zur Vermeidung von Turbulenz

Modellierung

Einleitung

Steuereinflüsse

Verteilte Steuerung:

- i. Verteilte Kraft: Vorgabe eines Kraftterms u_F in den Impulsgleichungen.
- ii. Wärmequellen: Vorgabe eines Quellterms u_Q in der Energiegleichung. Randsteuerung:
- iii. Vorgabe von Geschwindigkeiten am Rand $\Gamma \times (0, T)$

$$\mathbf{y}(\mathbf{x},t) = u(\mathbf{x},t)$$
 für $(\mathbf{x},t) \in \Gamma \times (0,T)$.

iv. Heizung / Kühlung am Randstück $\Gamma \times (0, T)$:

$$-\kappa\eta\nabla\theta = q \quad \text{oder} \quad \theta = \theta_c \quad \forall \ (\mathbf{x}, t) \in \Gamma \times (0, T)$$

v. Sonstige Steuereinflüsse: Steuerung durch Schubspannungen am Rand; Veränderung der Geometrie.

Steuereinflüsse

Modellierung

Verteilte Steuerung:

- i. Verteilte Kraft: Vorgabe eines Kraftterms u_F in den Impulsgleichungen.
- ii. Wärmequellen: Vorgabe eines Quellterms u_Q in der Energiegleichung.

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}, t)$$
 für $(\mathbf{x}, t) \in \Gamma \times (0, T)$.

$$-\kappa \eta \nabla \theta = q \quad \text{oder} \quad \theta = \theta_c \quad \forall \ (\mathbf{x}, t) \in \Gamma \times (0, T)$$

Tracking-Type-Zielfunktional

Modellierung

Tracking-Type-Problem mit Steuerung durch verteilte Kraft und Wärmequellen

Minimiere das Zielfunktional

$$J(\mathbf{y}, p, \theta, u_F, u_Q) := \frac{\alpha_1}{2} \int_Q \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_2^2 d\mathbf{x} dt + \frac{\alpha_2}{2} \int_Q \|\theta - \theta_d\|_2^2 d\mathbf{x} dt + \frac{\alpha_3}{2} \|u_F\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\alpha_4}{2} \|u_Q\|_{L^2(Q)}^2$$

unter Beachtung der Zustandsgleichungen

$$\mathbf{y}_{t} + (\mathbf{y} \cdot \nabla)\mathbf{y} - \frac{1}{Re}\Delta\mathbf{y} + \nabla p = -\gamma\mathbf{g}\theta + \mathbf{u}_{F}$$
$$\operatorname{div}\mathbf{y} = 0$$
$$\theta_{t} + (\mathbf{y} \cdot \nabla)\theta - \frac{1}{Re}\frac{1}{Pr}\Delta\theta = \mathbf{u}_{Q}$$

Berechnung des Gradienten

Berechnung der Adjungiertengleichung

$$\mathbf{e}_{\mathbf{y}}^{*}(\mathbf{y}, u)\lambda + J_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}, u) = 0.$$

- Der Term $\mathbf{e}_{\mathbf{v}}^*$ wird mittels (PI) berechnet.
- Die Adjungiertengleichung kann wieder als semilineare parabolische PDql. betrachtet werden.
- Lösung rückwärts in der Zeit.
- Diskretisierung analog zu den Navier-Stokes-Gleichungen.

Optimalitätssystem

Zustandsgleichungen

$$\mathbf{y}_{t} - Re^{-1}\Delta\mathbf{y} + (\mathbf{y} \cdot \nabla)\mathbf{y} + \nabla p - u_{F} + \gamma\mathbf{g}\theta = 0$$
$$-\operatorname{div}\mathbf{y} = 0$$
$$\theta_{t} + (\mathbf{y} \cdot \nabla)\theta - Re^{-1}Pr^{-1}\Delta\theta - u_{Q} = 0$$

Anfangs- und Randbedingungen

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \theta(0) = \theta_0 \text{ in } \Omega \text{ ; } \mathbf{y} = 0, \ \theta = \theta_d \text{ auf } \Gamma \times (0, T)$$

Adjungierte Zustandsgleichungen

$$-\mu_t - Re^{-1}\Delta\mu - (\mathbf{y} \cdot \nabla)\mu + (\nabla \mathbf{y})^T \mu + \nabla \xi + (\nabla \theta)\mu_\theta = -\alpha_1(\mathbf{y} - \mathbf{z})$$
$$-\operatorname{div}\mu = 0$$

$$\gamma \mathbf{g} \mu - (\mu_{\theta})_{t} - Re^{-1} Pr^{-1} \Delta \mu_{\theta} + (\mathbf{y} \cdot \nabla) \mu_{\theta} = -\alpha_{2} (\theta - \theta_{d})$$

Anfangs- und Randbedingungen

$$\mu(T) = 0$$
, $\mu_{\theta}(T) = 0$ in Ω ; $\mu = 0$, $\mu_{\theta} = 0$ auf $\Gamma \times (0, T)$

Optimalitätssystem

$$\mathbf{y}_{t} - Re^{-1}\Delta\mathbf{y} + (\mathbf{y} \cdot \nabla)\mathbf{y} + \nabla p - u_{F} + \gamma \mathbf{g}\theta = 0$$
$$-\operatorname{div}\mathbf{y} = 0$$
$$\theta_{t} + (\mathbf{y} \cdot \nabla)\theta - Re^{-1}Pr^{-1}\Delta\theta - u_{Q} = 0$$

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \theta(0) = \theta_0 \text{ in } \Omega \text{ ; } \mathbf{y} = 0, \ \theta = \theta_d \text{ auf } \Gamma \times (0, T)$$

$$-\mu_t - Re^{-1}\Delta\mu - (\mathbf{y} \cdot \nabla)\mu + (\nabla \mathbf{y})^T \mu + \nabla \xi + (\nabla \theta)\mu_\theta = -\alpha_1(\mathbf{y} - \mathbf{z})$$
$$-\operatorname{div}\mu = 0$$

$$\gamma g \mu - (\mu_{\theta})_t - Re^{-1} P r^{-1} \Delta \mu_{\theta} + (y \cdot \nabla) \mu_{\theta} = -\alpha_2 (\theta - \theta_d)$$

$$\mu(T) = 0$$
, $\mu_{\theta}(T) = 0$ in Ω ; $\mu = 0$, $\mu_{\theta} = 0$ auf $\Gamma \times (0, T)$

Differentiate-then-Discretize

Einleitung

Optimalitätssystem

$$\mathbf{y}_{t} - Re^{-1}\Delta\mathbf{y} + (\mathbf{y} \cdot \nabla)\mathbf{y} + \nabla p - u_{F} + \gamma \mathbf{g}\theta = 0$$
$$-\operatorname{div}\mathbf{y} = 0$$
$$\theta_{t} + (\mathbf{y} \cdot \nabla)\theta - Re^{-1}Pr^{-1}\Delta\theta - u_{Q} = 0$$

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \theta(0) = \theta_0 \text{ in } \Omega \text{ ; } \mathbf{y} = 0, \ \theta = \theta_d \text{ auf } \Gamma \times (0, T)$$

$$-\mu_t - Re^{-1}\Delta\mu - (\mathbf{y} \cdot \nabla)\mu + (\nabla \mathbf{y})^T \mu + \nabla \xi + (\nabla \theta)\mu_\theta = -\alpha_1(\mathbf{y} - \mathbf{z})$$
$$-\operatorname{div}\mu = 0$$

$$\gamma \mathbf{g} \mu - (\mu_{\theta})_{t} - Re^{-1} Pr^{-1} \Delta \mu_{\theta} + (\mathbf{y} \cdot \nabla) \mu_{\theta} = -\alpha_{2} (\theta - \theta_{d})$$

$$\mu(T) = 0$$
, $\mu_{\theta}(T) = 0$ in Ω ; $\mu = 0$, $\mu_{\theta} = 0$ auf $\Gamma \times (0, T)$

Berechnung des Gradienten

Modellierung

Die Gleichung

$$\hat{J}'(u)(\delta u) = (J_u(\mathbf{y}, u), \delta u)_{U^*, U} + (\mathbf{e}_u^*(\mathbf{y}, u)\lambda, \delta u)_{U^*, U}$$

reduziert sich zu

$$\hat{J}'(u_F, u_Q)(v_F, v_Q) = (-\mu + \alpha_3 u_F, v_F)_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} + (-\mu_\theta + \alpha_4 u_Q, v_Q)_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}.$$

 $\rightsquigarrow Diskretisierung?$

Modellierung

Einleitung

Diskretisierung des Optimalsteuerungsproblems

1. Parametrisierung der Steuerung:

Die Steuerung u wird durch eine Funktion u_h ersetzt, die nur von endlich vielen Parametern abhängt:

 u_{Fh}, u_{Oh} : stückweise konstante Gitterfunktionen.

2. Diskretisierungsverfahren für die Differentialgleichungen:

Z.B. mit staggered grid, Differenzenverfahren.

3. Optimierer:

Diskretisierung des Zielfunktionals: $\hat{J}_h(u_{Fh}, u_{Oh})$.

 $\rightsquigarrow diskretes L^2$ -Skalarprodukt!

Diskretisierung der Gradientendarstellung.

→ "differentiate-then-discretize"

Das entstandene nichtlineare Optimierungsproblem wird mit einem geeigneten Verfahren gelöst.



Optimierungsverfahren

Unrestringiertes Optimierungsproblem

Finde Gitterfunktionen (u_{Fh}, u_{Qh}) , so dass die Zielfunktion

$$\hat{J}_h(u_{Fh}, u_{Qh}) := J_h((\mathbf{y}_i, p_i, \theta_i)(u_{Fh}, u_{Qh}), u_{Fh}, u_{Qh})$$

minimal wird.

Mögliche Lösungsverfahren:

- Gradientenverfahren
- Inverses LBFGS-Verfahren

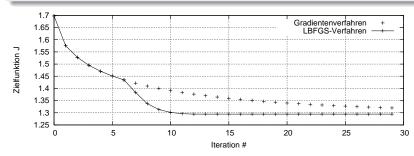
Optimierungsverfahren

Unrestringiertes Optimierungsproblem

Finde Gitterfunktionen (u_{Fh}, u_{Qh}) , so dass die Zielfunktion

$$\hat{J}_h(u_{Fh}, u_{Qh}) := J_h\left((\mathbf{y}_i, p_i, \theta_i) (u_{Fh}, u_{Qh}), u_{Fh}, u_{Qh} \right)$$

minimal wird.



Schrittweitensteuerung

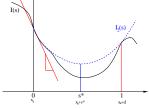
Optimale Schrittweite in Richtung d:

$$s^* = \arg\min_{s>0} I(s)$$
, $I(s) := \hat{J}_h(\mathbf{x}^k + s\mathbf{d})$

Approximation durch ein quadratisches Modell

$$I_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad I_2(s):=\hat{J}_h(\mathbf{x}^k)+as+bs^2$$

Berechnung der Koeffizienten durch einen Probeschritt.



Minimum der Modellfunktion bei

$$s^* = -\frac{(\nabla \hat{J}_h(\mathbf{x}^k), \mathbf{d})}{2(\hat{J}_h(\mathbf{x}^k + \mathbf{d}) - \hat{J}_h(\mathbf{x}^k) - (\nabla \hat{J}_h(\mathbf{x}^k), \mathbf{d}))}.$$

Gliederung

- 2 Modellierung
- 3 Optimalsteuerung
- 4 Numerische Simulation Zeitdiskretisierung
- Beispiele

Diskretisierung der Zustandsgleichungen in der klassischen Formulierung mit den Variablen \mathbf{u}, p, θ

Zustandsgleichungen

Modellierung

$$\operatorname{div} \mathbf{y} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} + (\mathbf{y} \cdot \nabla)\mathbf{y} - \frac{1}{Re}\Delta\mathbf{y} + \nabla p = -\gamma \mathbf{g}\theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{y} \cdot \nabla)\theta - \frac{1}{Re}\frac{1}{Pr}\Delta\theta = 0$$

Adjungierte Zustandsgleichung:

Diskretisierung auf analoge Weise.

Semi-implizites Eulerverfahren

Die Diskretisierung bzgl. der Zeitvariablen t erfolgt durch ein Euler-Verfahren.

• Eulersches Polygonzugverfahren:

$$\mathbf{y}_t pprox rac{1}{\delta t} \left(\mathbf{y}(\mathbf{x}, t + \delta t) - \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)
ight)$$

Semi-implizites Verfahren:

$$\frac{\mathbf{y}^{n+1} - \mathbf{y}^n}{\delta t} - Re^{-1}\Delta \mathbf{y}^{n+1} + (\mathbf{y}^n \cdot \nabla)\mathbf{y}^n + \nabla p^{n+1} = -\gamma \mathbf{g}\theta^{n+1}.$$

Ausblick

Einleitung

Quasi-Stokes-Problem

Modellierung

Die semi-implizite Zeitdiskretisierung ergibt

$$(I - \delta t R e^{-1} \Delta) \mathbf{y}^{n+1} = -\delta t \nabla p^{n+1} + \mathbf{g} \quad \text{mit } \nabla \cdot \mathbf{y}^{n+1} = 0$$

mit der Hilfsvariablen

$$\mathbf{g} := \mathbf{y}^n - \delta t(\mathbf{y}^n \cdot \nabla) \mathbf{y}^n - \delta t \gamma \mathbf{g} \theta^{n+1}.$$

Der Term **g** enthält nur bekannte Größen, wenn zuerst die Energiegleichung

$$\left(I - \delta t \frac{1}{Re} \frac{1}{Pr} \Delta\right) \theta^{n+1} = \theta^n - \delta t \left(\mathbf{y}^n \cdot \nabla\right) \theta^n$$

gelöst wird.

Schurkomplement-Ansatz

Modellierung

Räumliche Diskretisierung:

 Δ_h : Laplace-Operator

$$S := I - \delta t R e^{-1} \Delta_h$$

 $B := \nabla_h$: Gradient

 $-B^T = (\nabla_h \cdot)$: Divergenzoperator

Das Problem lautet also

$$\left(\begin{array}{cc} S & B \\ B^T & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \mathbf{y}^{n+1} \\ \delta t \ p^{n+1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \mathbf{g} \\ 0 \end{array}\right).$$

Aquivalent dazu ist die Schurkomplement-Formulierung:

Löse
$$B^T S^{-1} (\mathbf{g} - \delta t B p^{n+1}) = 0$$

und $\mathbf{y}^{n+1} = S^{-1} (\mathbf{g} - \delta t B p^{n+1})$.

PCG-Verfahren

Die in jedem Zeitschritt neu zu berechnende Gleichung

$$\delta t B^T S^{-1} B p^{n+1} = B^T S^{-1} \mathbf{g}$$

wird mit einem vorkonditionierten CG-Verfahren gelöst.

Vorkonditionierer für $B^TS^{-1}B$

Randbedingungen:

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}_0 \quad \text{auf } \Gamma_0 \subseteq \partial \Omega$$

$$\bar{\nu} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \eta} = \mathbf{g}_1 + \eta \cdot \delta t \cdot p \quad \text{auf } \Gamma_1 = \partial \Omega \setminus \Gamma_0$$

$$M\mathbf{r}_0 := \bar{\nu}\mathbf{r}_0 + \bar{\alpha}\varphi_0$$

mit dem Vektor φ_0 berechnet durch

$$\begin{split} -\Delta_h \varphi_0 &= \mathbf{r}_0 \quad \mathrm{in} \ \Omega \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} &= \mathbf{0} \quad \mathrm{auf} \ \Gamma_0 \ , \ \varphi_0 = \mathbf{0} \quad \mathrm{auf} \ \Gamma_1. \end{split}$$

Effekt des Vorkonditionierers

Parameter: Gittergröße 20×20 , Nischenströmung mit $Re = 100, \bar{u} = 1$

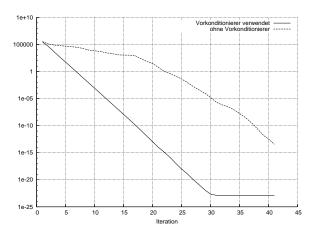


Abb.: Entwicklung des Residuums $\|\mathbf{r}\|_2^2$.



Gliederung

- 2 Modellierung
- 3 Optimalsteuerung
- 4 Numerische Simulation

Ortsdiskretisierung

- 6 Beispiele



Approximation der Differentialoperatoren

• Diskreter Gradient ∇_h : Vorwärtsdifferenz

$$\nabla_{h}: \quad p \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}$$

$$u_{ij} = \frac{1}{\delta x} (p_{i+1,j} - p_{ij}) \quad \text{für } i = 1, ..., n_{x} - 1 , j = 1, ..., n_{y}$$

$$v_{ij} = \frac{1}{\delta y} (p_{i,j+1} - p_{ij}) \quad \text{für } i = 1, ..., n_{x} , j = 1, ..., n_{y} - 1.$$

- Divergenz div_h: Rückwärtsdifferenz.
- Diskreter Laplace-Operator Δ_h :

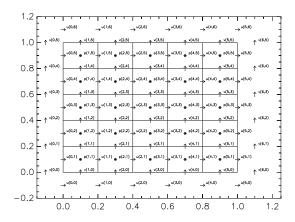
$$\tilde{u}_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} \end{bmatrix}_{ij} + \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2} \end{bmatrix}_{ij} \quad \text{für } i = 1, ..., n_x - 1 , \ j = 1, ..., n_y$$

$$\tilde{v}_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2} \end{bmatrix}_{ii} + \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial y^2} \end{bmatrix}_{ii} \quad \text{für } i = 1, ..., n_x , \ j = 1, ..., n_y - 1$$

Diskretisierung auf versetzten Gittern

 n_x, n_y : Anzahl der Gitterpunkte in xund y-Richtung.

$$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{(n_x-1) imes n_y}$$
 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_x imes (n_y-1)}$
 $\mathbf{p}, \mathbf{\theta} \in \mathbb{R}^{n_x imes n_y}$



Numerische Besonderheiten

- Numerische Behandlung des konvektiven Terms
- Neumann-Bedingungen
- Zulässige Zeitschrittweiten

Gesamtalgorithmus: Simulation

Gegeben: Anfangswerte \mathbf{y}_0 , θ_0 . Iterationszahl N.

$$p^0 \leftarrow \mathbf{0}, \ t \leftarrow 0.$$

for i := 0, 1, 2, ..., N do

Modellierung

Prüfe die Gültigkeit der Schrittweite δt , ggf. STOP mit Fehlermeldung.

Berechne θ^{n+1} .

Berechne rechte Seite der Impulsgleichungen g. Löse die Schurkomplement-Gleichung

$$\delta t B^T S^{-1} B p^{n+1} = B^T S^{-1} \mathbf{g}$$

mit dem PCG-Algorithmus und berechne damit den neuen Geschwindigkeitsvektor \mathbf{y}^{n+1} . $t \leftarrow t + \delta t$.

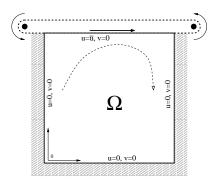
$$t \leftarrow t + \delta t$$
.

Gliederung

- 2 Modellierung
- 3 Optimalsteuerung
- A Numerische Simulation
- 6 Beispiele

Numerische Simulation

Testrechnung: Nischenströmung



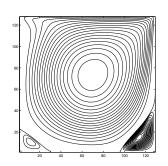


Abb.: Nischenexperiment, Gittergröße 128×128 .

Parameter:

$$\Omega = [0, 1]^2$$
 , $Re = 1000$, $\mathbf{g} = \mathbf{0}$, $\bar{u} = 2$.



Gliederung

- 2 Modellierung
- 3 Optimalsteuerung
- A Numerische Simulation
- 6 Beispiele

Optimale Steuerung

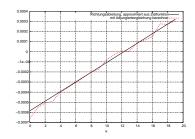
Berechnung des Gradienten

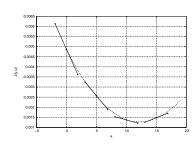
Vergleich des Adjungierten-Ansatzes mit einer Approximation durch finite Differenzen:

Wahl einer Testrichtung δu :

$$\delta u(\mathbf{x}) = e^{\frac{1}{4t^2-1}}, \quad t := \|\mathbf{x} - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\|_2.$$

 \Rightarrow Berechnung von $\nabla \hat{J}(k \cdot \delta u) \cdot \delta u, k = 1, 2, ...$





Parameteridentifikation

Modellierung

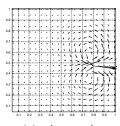
Steuerungsmechanismus: Verteilte Kraft Daten des Strömungsfeldes:

$$Re = 10$$
 ; $T = 2$; $\Omega = [0, 1]^2$

Gesucht: Steuereinfluss
$$\bar{u}_F((0.75, 0.5)^T, \cdot) = (10, 0)^T$$

Energiegleichung bleibt unberücksichtigt:

$$J(\mathbf{y}, p, u_Q) := \frac{\alpha_1}{2} \int_Q \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_2^2 d\mathbf{x} dt + \frac{\alpha_3}{2} \|u_F\|_{L^2(Q)}^2, \quad \alpha_1 = 10, \ \alpha_3 := 1$$



Ausblick

Einleitung

Parameteridentifikation Steuerungsmechanismus: Verteilte Kraft

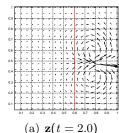
Daten des Strömungsfeldes:

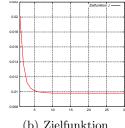
$$Re = 10$$
 ; $T = 2$; $\Omega = [0, 1]^2$

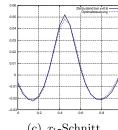
Gesucht: Steuereinfluss
$$\bar{u}_F((0.75, 0.5)^T, \cdot) = (10, 0)^T$$

Energiegleichung bleibt unberücksichtigt:

$$J(\mathbf{y}, p, u_Q) := \frac{\alpha_1}{2} \int_Q \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_2^2 d\mathbf{x} dt + \frac{\alpha_3}{2} \|u_F\|_{L^2(Q)}^2, \quad \alpha_1 = 10, \ \alpha_3 := 1$$









(c) x_1 -Schnitt

Parameteridentifikation Steuerungsmechanismus: Verteilte Kraft

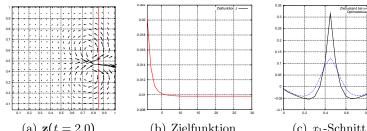
Daten des Strömungsfeldes:

$$Re = 10$$
 ; $T = 2$; $\Omega = [0, 1]^2$

Gesucht: Steuereinfluss
$$\bar{u}_F((0.75, 0.5)^T, \cdot) = (10, 0)^T$$

Energiegleichung bleibt unberücksichtigt:

$$J(\mathbf{y}, p, u_Q) := \frac{\alpha_1}{2} \int_Q \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_2^2 d\mathbf{x} dt + \frac{\alpha_3}{2} \|u_F\|_{L^2(Q)}^2, \quad \alpha_1 = 10, \ \alpha_3 := 1$$





(c) x_1 -Schnitt

Optimale Steuerung

Einleitung

Umkehrung eines Wirbels

Optimalsteuerung des Strömungsfeldes:

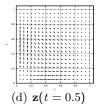
$$Re = 10$$
 ; $Pr = 7$; $\gamma = 0.02$; $T = 2$; $\Omega = [0, 1]^2$

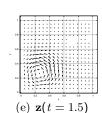
Gewünschte Strömung $\mathbf{z}(\mathbf{x}, t)$ im Zielfunktional:

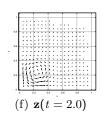
$$z(\mathbf{x},t) := \left[\begin{array}{c} -\varphi_{x_2}(t,x_1,x_2) \\ \varphi_{x_1}(t,x_1,x_2) \end{array} \right]$$

mit der Stromfunktion φ

$$\varphi(t, x_1, x_2) := \theta(t, x_1)\theta(t, x_2) , \quad \theta(t, y) := (1 - y)^2(1 - \cos 2\pi yt)$$







Umkehrung eines Wirbels Steuerungsmechanismus: Heizung / Kühlung

Zielfunktional:

$$J(\mathbf{y}, p, \theta, u_Q) := \frac{\alpha_1}{2} \int_Q \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_2^2 d\mathbf{x} dt + \frac{\alpha_4}{2} \|u_Q\|_{L^2(Q)}^2,$$

$$\alpha_1 = 10, \ \alpha_4 := 1$$

Optimale Steuerung

Einleitung

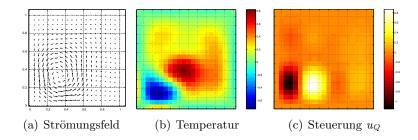
Umkehrung eines Wirbels

Steuerungsmechanismus: Heizung / Kühlung

Zielfunktional:

$$J(\mathbf{y}, p, \theta, u_Q) := \frac{\alpha_1}{2} \int_Q \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_2^2 d\mathbf{x} dt + \frac{\alpha_4}{2} \|u_Q\|_{L^2(Q)}^2,$$

$$\alpha_1 = 10, \ \alpha_4 := 1$$



Ausblick

Einleitung

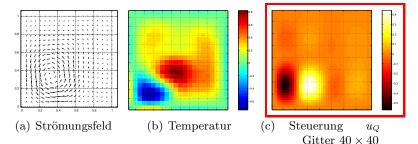
Umkehrung eines Wirbels

Steuerungsmechanismus: Heizung / Kühlung

Zielfunktional:

$$J(\mathbf{y}, p, \theta, u_Q) := \frac{\alpha_1}{2} \int_Q \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_2^2 d\mathbf{x} dt + \frac{\alpha_4}{2} \|u_Q\|_{L^2(Q)}^2,$$

$$\alpha_1 = 10, \ \alpha_4 := 1$$



Optimale Steuerung

Einleitung

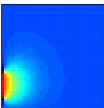
Vermeidung heißer Zonen

Geometrie des Nischenproblems: $\Omega = [0, 1]^2$, Re = 10.

$$J(\mathbf{y}, p, \theta, u_F, u_Q) := \frac{\alpha_3}{2} \int_Q \|\theta - \theta_d\|_2^2 d\mathbf{x} dt + \frac{\alpha_6}{2} \|u_Q\|_{L^2(Q)}^2$$

mit
$$\alpha_3 = 1000$$
, $\alpha_6 = 0.01$, $\theta_d \equiv \mathbf{0}$.

(a) ohne Steuerung.



Vermeidung heißer Zonen

Geometrie des Nischenproblems: $\Omega = [0, 1]^2$, Re = 10.

$$J(\mathbf{y}, p, \theta, u_F, u_Q) := \frac{\alpha_3}{2} \int_Q \|\theta - \theta_d\|_2^2 d\mathbf{x} dt + \frac{\alpha_6}{2} \|u_Q\|_{L^2(Q)}^2$$

mit
$$\alpha_3 = 1000$$
, $\alpha_6 = 0.01$, $\theta_d \equiv \mathbf{0}$.

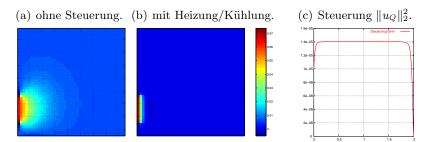


Abb.: Plot des Temperaturfeldes (t = 2.0).



Gliederung

Einleitung

- 2 Modellierung
- 3 Optimalsteuerung
- A Numerische Simulation
- 6 Beispiele

Steuerung über lange Zeitintervalle



Receding Horizon Control

Nachteil des Optimierungsverfahrens:

• Für die Berechnung der adjungierten Gleichung müssen sämtliche Ergebnisse der Zustandsgleichungen im Speicher gehalten werden!

Lösungsansätze:

- checkpointing-Strategie
- Betrachtung als *closed loop*-Problem
 - \Rightarrow Receding Horizon Control.

Receding Horizon Control

Gegeben: Zeithorizont T > 0, Zeitschrittweite Δt , $N\Delta t = T$, endlicher Zeithorizont M > 1 (ganzzahlig).

```
1 t \leftarrow 0: u^0 \leftarrow u_0.
2 for i := 0, 1, 2, ..., N-1 do
             Löse das Optimierungsproblem
                         \min_{\hat{u}_{1,...,M}} \hat{J}_{i+1,...,i+M}(\hat{u}) \text{ mit Startwert } \hat{u} = u^i
                                                                                   Zukunft
                                                            Vergangenheit
\begin{array}{c|c} \mathbf{4} & u^{i+1} \leftarrow \hat{u}_1 \\ \mathbf{5} & t \leftarrow t + \Delta t \end{array}
                                                                                      Zeithorizont
6 end
                                                     Steuerung u
                                                                                       Lösung û
                                                   Zeitschritt 0
```

Testrechnung: Vermeidung heißer Stellen

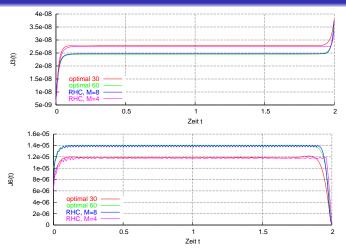


Abb.: Vergleich zwischen der Optimalsteuerung nach 30 und 60 Iterationen und receding horizon control. Oben: Abweichung vom Temperaturfeld θ_d , unten: Verlauf der Steuerung u_Q (t = 1.9).



Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Vortrag:

Einleitung

- Modellierung + Simulation der inkompressiblen NSE.
- Optimalsteuerung.

...nicht erwähnt:

- Allgemeineres Zielfunktional.
- Randsteuerung.
- Existenzaussagen für optimale Steuerung.

Weitere Untersuchungen:

- Numerisches Verfahren: Fehler + Stabilität?
- Zusätzliche physikalische Effekte: 3D, Kompressibilität, ...



