Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik
Dr. Matthias Voigt, Dr. Heiko Kröner

Sommersemester 2019

Optimierung – 8. Übungsblatt.

Bitte bearbeiten Sie die Übungsaufgaben in festen Zweiergruppen.
Abgabetermin: *Donnerstag, 20.06.2019 vor der Übung.*

Aufgabe 1 (6 Punkte): Betrachten Sie die Optimierungsaufgabe

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{bei} \quad Ax = b,$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ mit $m < n$ gilt. Sei $Z \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mit $\operatorname{im} Z = \ker A$ und sei

$$\min_{z\in\mathbb{R}^k} F(z)$$

mit $F(z) = f(w + Zz)$ die entsprechende reduzierte Aufgabe, wobei $w \in \mathbb{R}^n$ eine partikuläre Lösung von $Ax = b$ ist. Es seien nun $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\widetilde{z} \in \mathbb{R}^k$ so gegeben, daß $\widetilde{x} = w + Z\widetilde{z}$ gilt. Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) Es gilt

$$\nabla f\big(\widetilde{x}\big) + A^\mathsf{T}\lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla F\big(\widetilde{z}\big) = 0.$$

b) Sei f nun zusätzlich in einer Umgebung von $\widetilde{x}$ zweimal stetig differenzierbar. Ist

$$F''\big(\widetilde{z}\big) = Z^\mathsf{T} f''\big(\widetilde{x}\big) Z \tag{1}$$

positiv definit, so existiert ein $\alpha > 0$, sodaß

$$d^\mathsf{T} f''\big(\widetilde{x}\big) d \geq \alpha \|d\|^2 \quad \forall\, d \in \ker A. \tag{2}$$

Gilt andererseits (2) und hat Z vollen Spaltenrang, so ist $F''\big(\widetilde{z}\big)$ in (1) positiv definit.

Aufgabe 2 (5 Punkte):

a) Lösen Sie folgende Aufgabe mittels Lagrangemultiplikatoren:

$$\begin{cases} \min f(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2, \\ x_1 + 2x_2 = 8, \\ 4x_2 - 4x_3 = -12. \end{cases}$$

b) Gegeben sei die Minimierungsaufgabe

$$\begin{cases} \min f(x) = x_1^2 + (x_2 - x_3)^2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$$

Berechnen Sie eine Nullraummatrix der Gleichungsnebenbedingungen. Überführen Sie die Aufgabe in eine unrestringierte Aufgabe und berechnen Sie die stationären Punkte. Untersuchen Sie, ob lokale Minima vorliegen.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Wir betrachten die Optimierungsaufgabe

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} x^\mathsf{T} H x - b^\mathsf{T} x, \quad Ax = y$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m < n$, $\operatorname{rank} A = m$ und symmetrisch und positiv definitem $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

a) Geben Sie die Lagrangefunktion und die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung der restringierten Aufgabe an. Ist jeder stationäre Punkt auch ein lokales Minimum?

b) Zeigen Sie, daß die Matrix

$$\begin{bmatrix} H & A^\mathsf{T} \\ A & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$$

invertierbar ist. Kann man die Voraussetzungen an H abschwächen?

Aufgabe 4 (4 Punkte): Untersuchen Sie folgende Optimierungsaufgabe mit Ungleichungsnebenbedingungen:

$$\begin{cases} \min f(x) = 10(x_1 - 3.5)^2 + 20(x_2 - 4)^2, \\ x_1 + x_2 \le 6, \quad x_1 - x_2 \ge 1, \\ 2x_1 + x_2 \ge 6, \quad 0.5x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 1, \quad x_2 \ge 1. \end{cases}$$

Stellen Sie mittels geometrischer Überlegungen eine Hypothese über die Lösung der Aufgabe auf und überprüfen Sie diese mit Hilfe analytischer Mittel.