Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik
Dr. Matthias Voigt, Dr. Heiko Kröner

Sommersemester 2019

Optimierung – 7. Übungsblatt.

Bitte bearbeiten Sie die Übungsaufgaben in festen Zweiergruppen.
Abgabetermin: *Donnerstag, 06.06.2019 vor der Übung.*

Aufgabe 1 (5 Punkte): Sei K ein Kegel. Zeigen Sie:

a) Der Kegel $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann konvex, wenn $K + K \subseteq K$ gilt.

b) Sei K zusätzlich konvex. Dann ist der Dualkegel K^* abgeschlossen und konvex.

Aufgabe 2 (6 Punkte): Stellen Sie die konische Hülle $K(\mathcal{F}, x)$ folgender Mengen graphisch dar:

a) $\mathcal{F} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ mit $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$,

b) $\mathcal{F} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ -x^3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \geq 0 \right\}$ mit $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

c) $\mathcal{F} = \left\{ z \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \|z\|_2^2 = 1 \right\} \cup \left\{ z \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left\| z - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_2^2 = 1 \right\}$ mit $x = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix}$,

d) $\mathcal{F} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x \geq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ mit $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Welche der konischen Hüllen sind konvex? Stellen Sie in diesem Fall auch jeweils den Dualkegel $K(\mathcal{F}, x)^*$ graphisch dar.

Aufgabe 3 (4 Punkte): Betrachten Sie die Aufgabe

$$\min f(x) = -(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3)$$

unter der Nebenbedingung

$$x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0.$$

Zeigen sie, daß $\widetilde{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$ ein lokales Minimum ist ohne die Nebenbedingung aufzulösen.

Aufgabe 4 (5 Punkte): Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m < n$ und vollem Rang m und $x \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Zeigen Sie, daß die Lösung des Problems

$$\min_{u \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|x - u\|^2, \quad Au = 0$$

durch $u = Px$ mit $P := \left(I_n - A^\mathsf{T}\left(AA^\mathsf{T}\right)^{-1} A\right)$ gegeben ist.
Zeigen Sie weiter, daß P ein Projektor ist (d. h. daß $P = P^2$ gilt) und bestimmen Sie das Bild und den Kern von P.