Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik
Dr. Matthias Voigt, Dr. Heiko Kröner

Sommersemester 2019

Optimierung – 4. Übungsblatt.

Bitte bearbeiten Sie die Übungsaufgaben in festen Zweiergruppen.
Abgabetermin: *Donnerstag, 09.05.2019 vor der Übung. Bitte senden Sie die Lösung der Programmieraufgabe bis zum 08.05.2019, 18:00 Uhr an* `heiko.kroener@uni-hamburg.de`*. Alle zur Ausführung nötigen Dateien sollten in einem Archiv mit dem Namen* `opt_blattnr_aufgabennr_name1_name2.zip` *enthalten sein.*

Aufgabe 1 (4 Punkte): Es seien $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv definit und $b \in \mathbb{R}^n$. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2} x^{\mathsf{T}} H x + b^{\mathsf{T}} x.$$

Bestimmen Sie für diese Funktion die exakte Schrittweite σ_E für beliebige x, $d \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 2 (6 Punkte): Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, deren Gradient Lipschitz-stetig in $\mathbb{R}^n$ mit einer Lipschitz-Konstante $L > 0$ ist. Betrachten Sie das Verfahren mit der Iterationsvorschrift

$$x^{k+1} = x^k + \sigma_k d^k,$$

wobei $d^k := -\nabla f\left(x^k\right)$ und σ_k eine zugehörige Schrittweite ist. Wählen Sie nun $\sigma_k = \alpha_k$ mit

$$\varepsilon \leq \alpha_k \leq \frac{1 - \varepsilon}{L}.$$

Dabei ist $0 < \varepsilon < 1/(1 + L)$ eine über den gesamten Algorithmus feste Konstante.

a) Zeigen Sie, daß für die durch den Algorithmus erzeugte Folge $\left\{x^k\right\}$ gilt, daß

$$f\left(x^k\right) - f\left(x^{k+1}\right) \geq \varepsilon^2 \left\|\nabla f\left(x^k\right)\right\|^2.$$

b) Beweisen Sie, daß der Algorithmus entweder mit einem stationären Punkt abbricht oder eine unendliche Folge $\left\{x^k\right\}$ erzeugt, deren Häufungspunkte stationäre Punkte von f sind.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Implementieren Sie die Schrittweitenregel von Armijo. Schreiben Sie dazu eine `MATLAB`-Funktion mit dem Interface

```
sigmaA = armijo( x, fun, grad, d, sigma0, beta1, beta2, delta ),
```

und den folgenden Argumenten:

- `x`: Startpunkt x der Iteration,
- `fun, grad`: zwei Function Handles zur Auswertung der Funktionen f und ∇f,
- `d`: die Suchrichtung,
- `sigma0`: die Startschrittweite (wird anstelle des Parameters γ aus der Vorlesung gewählt);

- `beta1, beta2, delta`: die Parameter β_1, β_2, δ, die das Armijo-Verfahren beschreiben (siehe Vorlesung).
- `sigmaA`: eine Schrittweite, die die Armijo-Bedingungen erfüllt.

Testen Sie Ihre Implementierung an der Rosenbrock-Funktion von Übungsblatt 1 mit den Daten

a) `x = [ 1.7; 1.5 ], d = [ -1; 0 ], sigma0 = 4, beta1 = 0.5, beta2 = 0.5, delta = 0.1`;

b) `x = [ 0; 0 ], d = [ 1; 0 ], sigma0 = 1, beta1 = 0.5, beta2 = 0.5, delta = 0.1`.

Veranschaulichen Sie Ihre Ergebnisse graphisch und diskutieren Sie diese.

Aufgabe 4 (5 Punkte): Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben. Implementieren Sie ein einfaches Abstiegsverfahren mit der Iterationsvorschrift

$$x^{k+1} = x^k + \sigma_k d^k,$$

wobei $d^k := -\nabla f\big(x^k\big)$ und σ_k eine zugehörige Schrittweite ist. Schreiben Sie eine `MATLAB`-Funktion mit dem Interface

```
[ xmin, fmin ] = abstieg( x0, fun, grad, strat ),
```

und den folgenden Argumenten:

- `x0`: Startpunkt x^0 der Iteration,
- `fun, grad`: zwei Function Handles zur Auswertung der Funktionen f und ∇f,
- `xmin, fmin`: der Minimierer und der minimale Funktionswert,
- `strat`: eine Variable (z. B. mit den Werten `0` oder `1`), um die Schrittweitenregel auszuwählen (siehe unten).

Testen Sie Ihre Implementierung wieder an der Rosenbrock-Funktion von Übungsblatt 1. Wählen Sie zuächst eine feste Schrittweite $\sigma_k = 0.00125$ für $k = 0, 1, 2, \dots$ und verwenden Sie danach eine Armijo-Schrittweite mit den Parametern $\beta_1 = \beta_2 = 0.5, \gamma = 0.001$ und $\delta = 0.1$ (Hier können Sie eine Modifikation Ihrer Lösung aus Aufgabe 1 benutzen.). Brechen Sie das Verfahren ab, sobald $\big\|\nabla f\big(x^k\big)\big\| \leq 10^{-5}$ gilt bzw. falls 10^5 Iterationen ausgeführt wurden. Veranschaulichen und diskutieren Sie Ihre Ergebnisse.