Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik
Dr. Matthias Voigt, Dr. Heiko Kröner

Sommersemester 2019

Optimierung – 10. Übungsblatt.

Bitte bearbeiten Sie die Übungsaufgaben in festen Zweiergruppen.
***Abgabetermin:** Donnerstag, 04.07.2019 vor der Übung.*

Aufgabe 1 (2 Punkte): Berechnen Sie zu

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1 \geq 0,\ 0 \leq x_2 \leq x_1^3 \right\}$$

und $x = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ den Tangentialkegel $T(S, x)$.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Betrachten Sie für $\alpha \geq 0$ die Menge

$$S_\alpha = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; |x_2| \leq x_1 \, |x_1|^\alpha \right\}.$$

a) Skizzieren Sie S_α für $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ und $\alpha = 2$.

b) Berechnen Sie die Kegel $T(S_\alpha, x)$ und $L(S_\alpha, x)$ für $x = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$. Für welche Werte von α ist x regulär?

Aufgabe 3 (5 Punkte): Betrachten Sie die Optimierungsaufgabe

$$\begin{cases} \min f(x) = (x_1 - 2) + (x_2 - 1)^2 \\ x_1^2 - x_2 \leq 0, \\ x_1 + x_2 - 2 \leq 0. \end{cases}$$

Berechnen Sie alle stationären Punkte dieser Aufgabe, d. h. alle Lösungen des KKT-Systems. Untersuchen Sie die berechneten stationären Punkte auf Regularität.

Aufgabe 4 (8 Punkte): Wie in der Vorlesung gesehen, hängt der Linearisierungskegel $L(\mathcal{F}, x)$ von der *funktionalen Beschreibung* der Menge $\mathcal{F}$ ab. Betrachten Sie nun die Optimierungsaufgabe

$$\min f(x) \quad \text{bei} \quad g(x) \leq 0,$$

wobei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ differenzierbar seien. Dann heißt die Menge

$$L_0(\mathcal{F}, x) := \{ d \in \mathbb{R}^n \mid \langle \nabla g_j(x), d \rangle < 0 \text{ für } j \in J(x) \}$$

innerer Linearisierungskegel an $\mathcal{F}$ in x. Zudem heißt die funktionale Beschreibung der Menge $\mathcal{F}$ in x *nichtdegeneriert*, wenn

$$\operatorname{cl} L_0(\mathcal{F}, x) = L(\mathcal{F}, x) \tag{1}$$

gilt, wobei $L(\mathcal{F}, x)$ der aus der Vorlesung bekannte (äußere) Linearisierungskegel ist. Die Bedingung (1) wird hierbei auch als Cottle-Bedingung (Cottle constraint qualification) bezeichnet.

a) Zeigen Sie, daß die funktionale Beschreibung von $\mathcal{F}$ in x genau dann nichtdegeneriert ist, wenn $L_0(\mathcal{F}, x) \neq \emptyset$ gilt.

b) Berechnen Sie jeweils den inneren und äußeren Linearisierungskegel $L_0(\mathcal{F}, x)$ und $L(\mathcal{F}, x)$ für folgende Mengen $\mathcal{F}$ und Punkte x. Untersuchen Sie jeweils $\mathcal{F}$ auf Degeneriertheit in x:

1) $\mathcal{F} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0,\ -x_2 \leq 0 \right\}$, $x = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$;

2) $\mathcal{F} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0,\ -x_2 \leq 0 \right\}$, $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$;

3) $\mathcal{F} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0,\ -x_2^3 \leq 0 \right\}$, $x = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$.