Theorie und Numerik von Differentialgleichungen
mit
MATLAB und SIMULINK

Abgabe nach Vereinbarung

Aufgabe 2.1
Geben Sie das Gradientenfeld für das System

$$y' = -z$$
$$z' = y+z^3 -3z$$

im Bereich $-2.5 < y < 2.5$, $-2.5 < z < 2.5$ an.
Eine „leichte Abwandlung" des Programms im Anhang liefert das gewünschte Ergebnis.
Welches sind die stationären Lösungen? Welche dieser Lösungen ist asymptotisch stabil?

Aufgabe 2.2
Wir haben gesehen, dass unter geeigneten Voraussetzungen das Verhalten der Lösungen von Systemen von Differentialgleichungen

$$y' = f(y),$$

in einer Umgebung von Gleichgewichtspunkten y_0, über das linearisierte System oder die erste Variation

$$y' = f_y(y_0)(y-y_0)$$

untersucht werden kann.
Gegeben sei das Lorenz-System (chaotisch)

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(y_1,y_2,y_3) = \sigma(y_2 - y_1) & \qquad \beta &= 8/3 \\ y_2' &= f_2(y_1,y_2,y_3) = \rho y_1 - y_1 y_3 - y_2 & \qquad \sigma &= 10 \\ y_3' &= f_3(y_1,y_2,y_3) = y_1 y_2 - \beta y_3 & \qquad \rho &= 28 \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen $y_1(0) = 5$, $y_2(0) = 10$ und $y_3(0) = 19$.
Verifizieren Sie, dass das nichtlineare System die drei stationären Lösungen $(0,0,0)$, $(6*\sqrt{2}, 6*\sqrt{2}, 27)$ und $(-6*\sqrt{2}, -6*\sqrt{2}, 27)$ hat.
Bestimmen Sie (selber Rechnen) die Funktionalmatrix oder Jacobimatrix

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)$$

an den stationären Lösungen und bestimmen Sie mit MATLAB die zugehörigen Eigenwerte.
Führen Sie mit MATLAB eine Integration mit ODE45 von t gleich 0 bis 40 durch und zeichnen Sie das Ergebnis von $y_1(.)$ über $y_2(.)$ auf.
Interpretieren Sie das Ergebnis mit Hilfe der berechneten Eigenwerte. Dennoch tritt hier ein zusätzliches völlig neues Phänomen auf!
(Haben Sie mit dieser Aufgabe Schwierigkeiten? Wenn ja, wenden Sie sich an uns und wir werden Ihnen helfen und ein kommentiertes Programm zur Verfügung stellen)

Aufgabe 2.3
Zeichnen Sie ein Phasenporträt für den nichtlinearen Schwinger

$$y'' = -y + y^2$$

im Bereich $-1.5 < y < 2.5$ und $-1.5 < y' < 1.5$.
(Bei Schwierigkeiten gilt ähnliches wie bei Aufgabe 2.2)

Aufgabe 2.4
Mit dem Brusselator liegt eine Aufgabe mit einer Hopf-Verzweigung vor!
Gegeben sei das System von Differentialgleichung

$$\begin{aligned} y_1' &= 1 + y_1^2 y_2 - (y_3+1)y_1 \\ y_2' &= y_1 y_3 - y_1^2 y_2 \\ y_3' &= -y_1 y_3 + \alpha \end{aligned}$$

Stationäre Lösungen sind $(1, \alpha, \alpha)$.
Berechnen Sie für einige α zwischen 1 und 1.21922 die Funktionalmatrix an den stationären Lösungen und mit MATLAB die zugehörigen Eigenwerte. Was beobachten Sie dabei?
Bestimmen Sie nun eine periodische Lösung für $\alpha = 1.21922$ und geben Sie die ungefähre Periode T der periodischen Lösung an!
(Natürlich gilt auch hier die Bemerkung von Aufgabe 2.2!)