Theorie und Numerik von Differentialgleichungen
mit
MATLAB und SIMULINK

K. Taubert
Universität Hamburg
SS08

Erhaltungsgleichungen

14 ERHALTUNGSGLEICHUNGEN THEORIE UND NUMERIK

§ 14.1 Einführung

Gegenstand des vorliegenden Kapitels sind Aufgaben der Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0$$
$$u(x,0) = u_0(x)$$

Typisch für die theoretische Behandlung dieser Aufgabe ist eine gewisse Uneinheitlichkeit. Verschiedene Zugänge sichern die Existenz von Lösungen und unterschiedliche Entropiebedingungen legen die Eindeutigkeit der Lösungen fest. Die Gleichwertigkeit und die Grenzen der einzelnen Zugänge sind für den Nicht-Spezialisten schwer erkennbar. Weit verbreitet ist der Zugang von Kruzkov [1970] über den Umweg einer (singulär gestörten) parabolischen Aufgabe

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

In diesem Zusammenhang wird häufig auch behauptet, dass die erste Aufgabe erst durch eine nicht sachgemäße Vereinfachung der zweiten Aufgabe entsteht. In letzter Zeit erscheinen aber auch stark funktionalanalytisch geprägte Texte (Serre [1999]) über diese Aufgaben. Damit werden auch diese Aufgaben in den üblichen Rahmen der modernen Behandlung von parabolischen und elliptischen Aufgaben eingeordnet.
Die numerischen Behandlung der Aufgaben ist i.a. stark heuristisch geprägt und häufig von einem ungewöhnlich leichtfertigen Umgang mit den mathematischen Voraussetzungen gekennzeichnet. Auch hier hat die Arbeit von Kruzkov wohl zu einer Umbesinnung geführt.
Die Praxis hat zur CFL-Bedingung, dem Upwind-Schemata, dem Godunov-Verfahren und seine Varianten geführt. Allgemein wird behauptet, dass gute Verfahren für die skalare Gleichung auch gut für Systeme von Erhaltungsgleichungen sind.

§ 14.2 Theorie. Beispiele und Schwierigkeiten

Wir betrachten zunächst die **lineare** Aufgabe

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad t,c>0, \; x \in R$$

$$u(x,0) = u_0(x).$$

Als klassische Lösung einer solchen Aufgabe wird man zunächst eine Funktion u(x,t) bezeichnen, welche für $t>0$ und $x \in R$ stetig differenzierbar, für $t \geq 0$ und für $x \in R$ stetig ist und außerdem die Anfangsbedingung erfüllt.
Es sei u(.,.) eine (klassische) Lösung der Aufgabe und

$$v(t) .= u(ct+x_0,t).$$

Dann gilt

$$\frac{d}{dt}v(t) = \frac{d}{dt}u(ct + x_0, t) = c\frac{\partial u}{\partial x}(ct + x_0, t) + \frac{\partial u}{\partial t}(ct + x_0, t) = 0.$$

Somit ist v(t) konstant für t>0 und

$$\lim_{t \to 0} v(t) = v(0)$$

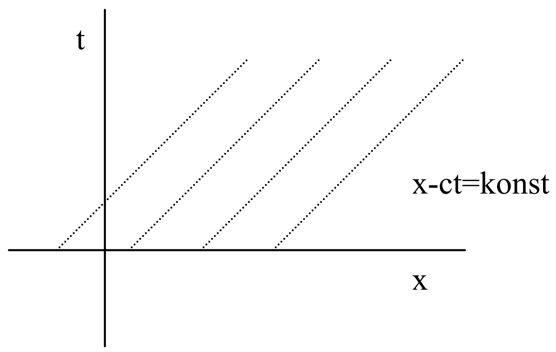
und mithin

$$u(ct+x_0,t) = v(t) = v(0) = u(x_0,0) = u_0(x_0)$$

oder

$$u(x,t) = u(x-ct,0) = u_0(x-ct).$$

Die Geraden x-ct = konst heißen Charakteristiken und entlang dieser Geraden ist die Lösung konstant.



Später nützlich sind noch die folgenden Beobachtungen:

- $\underset{x \in R}{\mathrm{Min}}\, u_0(x) \leq u(x,t) \leq \underset{x \in R}{\mathrm{Max}}\, u_0(x).$
- Auch für beliebige (nichtstetige) u_0 ist es naheliegend $u(x,t) = u_0(x-ct)$ als „Lösung“ der Anfangswertaufgabe zu bezeichnen.

Als nächstes betrachten wir jetzt die (Burgers-) Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad t>0, \quad x \in R \quad (*)$$

$$u(x,t) = u_0(x).$$

Klasssische Lösungen dieser Aufgaben wird man wie oben definieren. Auch in diesem Fall gibt es Kurven (Charakteristiken) $(x(t),t)$ auf denen die Lösung konstant ist.
Es sei $u(x,t)$ eine klassische Lösung von (*) und $x(t;x_0)$ die Lösung von

$$\frac{dx}{dt} = u(x,t), \qquad x(0) = x_0.$$

Es sei jetzt

$$v(t) = u(x(t;x_0),t)$$

dann gilt

$$\frac{d}{dt}v(t) = \frac{d}{dt}u(x(t;x_0),t) = \frac{\partial}{\partial x}(x(t;x_0),t)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial t}(x(t;x_0),t) = (\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x})(x(t;x_0)t) \overset{!}{=} 0$$

und damit

$$u(x(t,x_0),t) = u(x(0;x_0),0) = u_0(x_0).$$

Auch in diesen Fall sind die Charakteristiken also Geraden

$$x(t) = x_0 + u_0(x_0)t$$

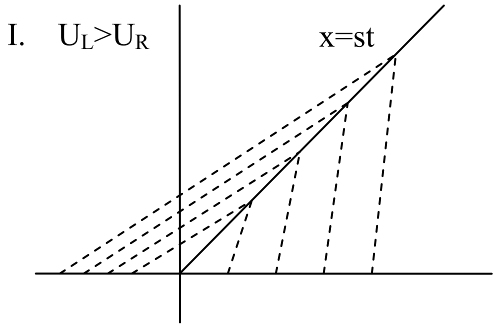
deren Steigungen jedoch von den Anfangswerten $u_0(x_0)$ abhängen.

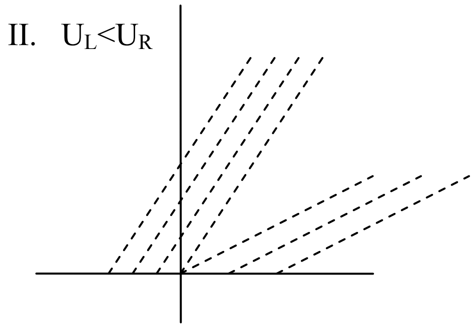
Wir betrachten jetzt noch das Riemann-Problem

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad t>0, \quad x \in R$$

$$u_0(x) = \begin{cases} U_L & x < 0 \\ U_R & x > 0 \end{cases}$$

mit Konstanten U_L und U_R.
Der Fall $U_L = U_R$ ist uninteressant. Die beiden anderen Fälle führen jedoch zu Problemen:





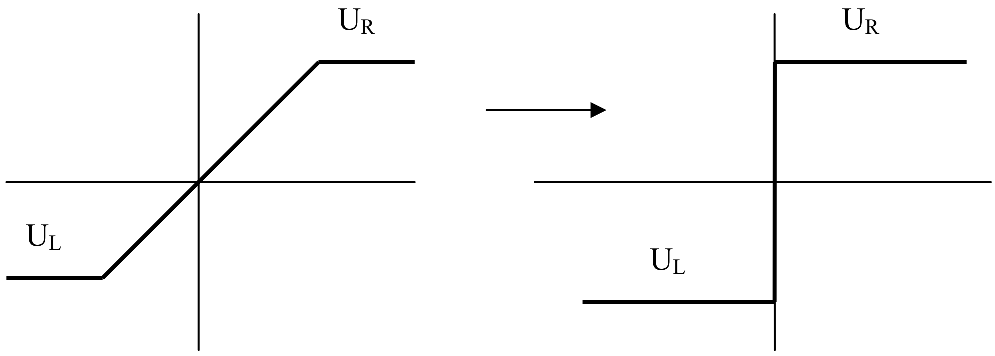
Im ersten Fall schneiden sich die Charakteristiken. Charakteristiken die links von Null starten haben eine „kleinere“ Steigung $\frac{dt}{dx} = 1/U_L$ als die Charakteristiken welche rechts von Null mit der Steigung $\frac{dt}{dx} = 1/U_R$ starten.
Es ist sicherlich vernünftig die Funktion

$$u(x,t) = \begin{cases} U_L & x < st \\ U_R & x > st \end{cases}$$

$$s = (1/2)(U_L+U_R) \qquad \text{(Schock-Geschwindigkeit)}$$

als Lösung der Aufgabe zu bezeichnen.

Im zweiten Fall entsteht eine Lücke und es stellt sich die Frage, wie diese Lücke vernünftigerweise auszufüllen ist. Der Übergang



führt zur „Lösung“ (Verdünnungswelle)

$$u(x,t) = \begin{cases} U_L & x < U_L t \\ x/t & U_L t < x < U_R t \\ U_R & x > U_R t. \end{cases}$$

Das erste Beispiel lässt erkennen, dass klassische Lösungen der Burger-Gleichung nicht global existieren müssen. Wie bei den elliptischen und parabolischen Differentialgleichungen führt man auch bei den Erhaltungsgleichungen einen schwachen Lösungsbegriff ein.

Definition:
Eine (lokal) integrierbare Funktion u mit (lokal) integrierbaren f(u) heißt schwache Lösung von

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0$$

$$u(x,t) = u_0(x)$$

wenn für alle $\Phi \in C_0^1(R,(0,\infty))$ gilt

$$\int_x\int_t (u\Phi_t + f(u)\Phi_x)dtdx + \int_x u_0\Phi(x,0)dx = 0 .$$

Leider führt der schwache Lösungsbegriff nicht zu eindeutigen Lösungen: Dieses zeigt das Riemann-Problem

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 , \quad t>0, \quad x\in \mathbf{R}$$

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

mit den unendlich vielen „schwachen" Lösungen $(\alpha \in (0,1))$

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x/t < \alpha/2 \\ \alpha & \text{für} \quad \alpha/2 < x/t < (1+\alpha)/2 \\ 1 & \text{für} \quad (1+\alpha)/2 < x/t. \end{cases}$$

Es war wohl ein Verdienst von Kruzkov, hier eine weitergehende die Eindeutigkeit erzwingende Forderung zu stellen. Ausgehend von

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = \varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}0 , \quad \varepsilon \to 0$$

wurde gefordert:
Eine schwache Lösung von

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 , \quad u_0(x,0) = u_0(x)$$

heißt Entropie-Lösung, falls

$$\int_x\int_t (U(u)\Phi_t + F(u)\Phi_x)dtdx + \int_x U(u_0)\Phi(x,0)dx \geq 0$$

für alle Entropie-Paare (U,F) und nichtnegative $\Phi \in C_0^1(R,(0,\infty))$. Dabei sei U eine konvexe Funktion und F'=U'f'.

Satz 12.1 *

Die skalare Aufgabe

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 , \quad t>0, \quad x\in\mathbf{R}$$
$$u(x,0) = u_0(x)$$

besitzt für jede beschränkte und messbare Funktion u_0 genau eine Entropie-Lösung aus $L^\infty(\mathbf{R}x\mathbf{R}_+)$

Von Bedeutung für die Numerik sind weitergehende Eigenschaften der Entropielösungen.

* Ein Beweis findet man in Serre [1999] S. 47

Diese Eigenschaften ergeben sich aus dem Beweis des Satzes von Kruzkov. Die Lösungen haben noch die folgenden Eigenschaften:

1. **TV-Abnahme**. Ist u_0 von beschränkter Variation, dann ist auch u(.,t) von beschränkter Variation und es gilt
$$TV(u(.,t) \leq TV(u_0(x)).$$

2. **Maximum-Prinzip oder L^∞-Stabilität**. Es gilt
$$\|u(x,t)\|_{L^\infty} \leq \|u_0(x)\|_{L^\infty}.$$

3. **Konservativität**. Ist $u_0-v_0 \in L^1(R)$, dann ist auch $u(.,t)-v(.,t) \in L^1(R)$ und es gilt
$$\int_R |u(x,t) - v(x,t)|\, dt \leq \int_R |u_0(x) - v_0(x)|\, dx.$$

4. **Monotonie**. Ist $u_0(x) \leq v_0(x)$ für fast alle t, dann gilt $u(x,t) \leq v(x.t)$.

5. **Endlicher Abhängigkeitsbereich**. Für alle t>0 und jedes Intervall [a,b] gilt
$$\int_a^b |v(x,t) - u(x,t)|\, dx \leq \int_{a-Mt}^{b+Mt} |v_0(x) - u_0(x)|\, dx.$$

§ 14.2 Numerische Methoden

Der vorangegangene Paragraph lieferte einen Einblick in die Eigenschaften der Entropielösungen der Erhaltungsgleichung
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \qquad u(x,0) = u_0(x).$$

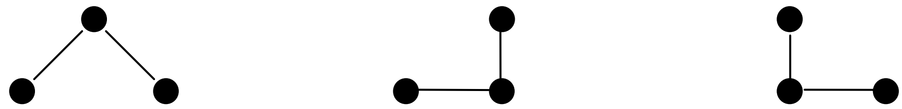
Einen ersten Einblick in praktikable numerische Verfahren für die Erhaltungsgleichung liefert wieder die lineare Aufgabe
$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad t,c>0, \ x \in \mathbf{R}$$
$$u(0,x) = u_0(x).$$

Zur numerischen Behandlung dieser Aufgabe wird $\mathbf{R}x\mathbf{R}_+$ mit einem regelmäßigen Gitter $x_j = jh$, $t_k = k\tau$ überdeckt. Nahe liegende (und von Vorkenntnissen völlig unbelastete) Differenzenverfahren sind dann

- $u_j^{k+1} = u_j^k + (1/2)\gamma(u_{j-1}^k - u_{j+1}^k)$
- $u_j^{k+1} = (1-\gamma)u_j^k + \gamma u_{j-1}^k$
- $u_j^{k+1} = (1+\gamma)u_j^k - \gamma u_{j+1}^k$

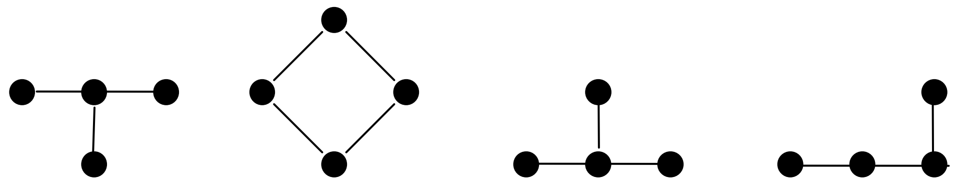
mit $\gamma = c(\tau/h)$.

Der Zusammenhang zwischen den Variablen (bis auf die Konstante γ) kann aus den folgenden „Stempeln“ erkannt werden:



Lax-Friedrichs (Einseitiger) Euler (Einseitiger) Euler

Aber auch andere Stempel sind denkbar (LeVeque 1992)



Impliziter Euler Leap-Frog Lax-Wendroff Beam-Warming

Sollen die angegebenen Verfahren das, für die kontinuierliche Aufgabe gültige, Maximum-Prinzip erfüllen, dann kommt nur das zweite Verfahren in Frage und zwar mit der zusätzlichen CFL-Bedingung

$$\gamma = c(\tau / h) \leq 1 .$$

Zur CFL-Bedingung kommt man auch dann, wenn das zweite Verfahren auf Konsistenz bezüglich klassischer Lösungen untersucht wird:

$$\frac{u(x,t+\tau)-u(x,t)}{\tau} + c\frac{u(x,t)-u(x-h,t)}{h} = \frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} + (\frac{c\tau - h}{2})\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h^2 + \tau^2)$$

Das Verfahren liefert also eine Approximation für die Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} .$$

Diese Aufgabe ist aber bekanntlich nur dann sachgemäß, wenn $\varepsilon > 0$ ist. Dieses bedeutet für $(c\tau - h)/2$ aber

$$\frac{c\tau - h}{2} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad c\frac{\tau}{h} - 1 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad c\frac{\tau}{h} \leq 1 .$$

Wie schwierig die Situation im nichtlinearen Fall ist, zeigt das Riemann-Problem

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad t>0, \quad x \in \mathbf{R}$$

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

Auf den ersten Blick spricht dann nichts gegen das Verfahren

$$u_j^{k+1} = u_j^k - \frac{\tau}{h} u_j^k (u_j^k - u_{j-1}^k)$$

Mit den Startwerten

$$u_j^0 = \begin{cases} 1 & j < 0 \\ 0 & j \geq 0 \end{cases}$$

liefert das Verfahren (bei Verfeinerung des Gitters) jedoch stets

$$u(x,t) = u_0(x)$$

und mithin nicht die Lösung der Aufgabe. Andere Anfangsbedingungen führen zu einer unangemessene Schocklage.
Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Aufgabe

$$u_t + (f(u))_x = 0$$

direkt zu behandeln:

$$u_j^{k+1} = u_j^k - \frac{\tau}{h} \begin{cases} (f(u_j^k) - f(u_{j-1}^k)) & \text{für} \quad f' \geq 0 \\ (f(u_{j+1}^k) - f(u_j^k)) & \text{für} \quad f' < 0. \end{cases}$$

Die Ableitung f' zu bestimmen wird nicht immer möglich sein. Dieses führt zu der folgenden upwind-Variante

$$u_j^{k+1} = u_j^k - \frac{\tau}{h} (H(u_{j-1}^k, u_j^k) - H(u_j^k, u_{j+1}^k))$$

mit

$$H(u,v) = \begin{cases} f(u), & \text{wenn} \quad \dfrac{f(u) - f(v)}{u - v} \geq 0 \\ f(v), & \text{wenn} \quad \dfrac{f(u) - f(v)}{u - v} \leq 0. \end{cases}$$

Die folgende (in LeVeque) angegebene Aufgabe zeigt, das auch hiermit nicht immer gute Resultate folgen:

Aufgabe
Gegeben sei das Riemann-Problem

$$u_t + uu_x = 0$$

$$u(0,x) = \begin{cases} -1 & \text{für} \quad x < 1 \\ 1 & \quad\quad x > 1. \end{cases}$$

Betrachte das angegebene Verfahren mit $\tau/h = 1/2$.

- Für $\tau = 1/2l$ und $h = 1/l$ liefert das Verfahren die schwache Entropie-Lösung
- Für $\tau = 1/(2l+1)$ und $h = 2/(2l+1)$ liefert das Verfahren eine schwache Lösung
- Für $\tau = 1/l$ und $h = (1/2)l$ divergiert das Verfahren

Wir kommen nun zu den Gudonov-Verfahren. Dieses nimmt in besonderer Weise Rücksicht auf die Richtung der Ausbreitung des Signals:

$$u_j^{k+1} = u_j^k - \frac{\tau}{h}(f(u_{j+(1/2)}^k) - f(u_{j-(1/2)}^k))$$

mit folgenden Regeln für die Bestimmung der Größen $u_{j+(1/2)}^k$:
Es sei

$$f(u_{j+1}^k) - f(u_j^k) = f'(\xi_{j+(1/2)}^k)(u_{j+1}^k - u_j^k).$$

Dann ergibt sich $u_{j+(1/2)}^k$ aus:

$u_{j+(1/2)}^k = \quad u_j^k \quad$ falls $f'(u_j^k) > 0$ und $f'(\xi_{j+(1/2)}^k) > 0$

$u_{j+(1/2)}^k = \quad u_{j+1}^k \quad$ falls $f'(u_j^k) < 0$ und $f'(\xi_{j+(1/2)}^k) < 0$

$u_{j+(1/2)}^k \quad$ ist Nullstelle von $f'(u) = 0$ sonst.

Bevor das Gudonov-Verfahren weiter untersucht wird, soll noch das Verfahren von Lax-Friedrichs angegeben werden. Dieses Verfahren entsteht aus dem unbrauchbaren Verfahren

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} + \frac{f(u_{j+1}^k) - f(u_{j-1}^k)}{2h} = 0$$

durch die Einführung einer künstlichen Viskosität $(\tau / h = 1)$

$$u_j^{k+1} = u_j^k - \left(\frac{\tau}{2h}\right)(f(u_{j+1}^k) - f(u_{j-1}^k)) + \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{2}$$

mit dem lokalen Fehler $O(\tau)$ für $\tau / h = 1$.
Sowohl das Gudonov- als auch das Lax-Friedrichs-Verfahren lassen sich in der Form

$$u_j^{k+1} = H(u_{j-1}^k, u_j^k, u_{j+1}^k) = u_j^k - q(g(u_{j+1}^k, u_j^k) - g(u_j^k, u_{j-1}^k))$$

darstellen.

Die klassische Konsistenzforderung ergibt dann $f(u) = g(u,u)$.

Wir kommen nun wieder zu dem entscheidenden Begriff, der wieder Monotonie heißen wird:

Definition
Das Schema $u_j^{k+1} = H(u_{j-1}^k, u_j^k, u_{j+1}^k)$ heißt Monoton, wenn H in allen Argumenten eine nicht fallende Funktion ist.

Der entscheidende Vorteil von monotonen Schemata ist:

- Für monotone Schemata kann die Konvergenz der Näherungen gegen die Entropie-Lösung nachgewiesen werden.
- Monotone Verfahren haben die Eigenschaften 1, 2, und 3.

Wir schließen dieses Kapitel mit der folgenden schönen Bemerkung ab:
Das Lax-Friedrichs und das Gudonov-Verfahren sind monoton unter einer Zusatzbedingung.
Beim Lax-Friedrichs Verfahren ist diese

$$\frac{\tau}{h} \operatorname*{Max}_u |f'(u)| \le 1.$$

Literatur

Evans, L.C., Partial Differential Equations. Graduate Studies in Mathematics. Vol 19. American Mathematical Society. 1-661. 1998.