Theorie und Numerik von Differentialgleichungen
mit
MATLAB und SIMULINK

K. Taubert
Universität Hamburg
SS08

Die Wellengleichung

13 DIE WELLENGLEICHUNG. ELEMENTARES

Gegenstand des vorliegenden Kapitels sind Aufgaben der Form

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(t,x,u).$$

Diese Aufgaben stehen u.a. in einem engen Zusammenhang mit Schwingungsproblemen, Aufgaben aus der Gasdynamik und der Akustik und sogar mit der Quantenmechanik.

§ 13.1 Die lineare Gleichung $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$.

Die Beschreibung von eindimensionalen (ebenen) Wellen führt auf die Differentialgleichung

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \qquad t, x \in \mathbf{R}$$

Die formale Faktorisierung

$$(\partial_t + c\partial_x)(\partial_t - c\partial_x)(u) = 0$$

legt einen Zusammenhang mit der einfachen Erhaltungsgleichung

$$u_t + c u_x = 0 \quad c>0, \quad t \geq 0,\ x \in \mathbf{R}$$

nahe. Zu einer vorgegebenen (Anfangs-) Funktion $u(0,x) = u_0(x)$ hat diese Differential gleichung eine „Lösung“ der Form

$$u(x,t) = u_0(x-ct)$$

In der Tat hat die Wellengleichung auch Lösungen der Form

$$u(x,t) = \Phi(x-ct) \qquad \text{und} \qquad u(x,t) = \Psi(x+ct).$$

Um die Eindeutigkeit von Lösungen zu gewährleisten, müssen Nebenbedingungen gestellt werden. Hier werden als Nebenbedingungen die beiden Anfangsbedingungen

$$u(x.0) = f(x) \quad \text{und} \quad u_t(x,0) = g(x)$$

gestellt. Es gilt der

Satz 13.1
Sei $f \in C^2(\mathbf{R})$ und $g \in C^1(\mathbf{R})$. Dann existiert genau eine 2-mal stetig differenzierbare Lösung von

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}\,, \qquad u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x).$$

Die Lösung kann dargestellt werden in der Form

$$u(x,t) = (1/2)(f(x-ct)+f(x+ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)dy\,.$$

Beweis
Es sei

$$u(x,t) = w(x-ct,x+ct).$$

Mit $\xi = x\text{-}ct$ und $\eta = x+ct$ ergibt sich

$$u_t = -c\,w_\xi + c\,w_\eta$$
$$u_{tt} = c^2\,w_{\xi\xi} - 2c^2\,w_{\xi\eta} + c^2\,w_{\eta\eta}$$

und entsprechend $\qquad c^2\,u_{xx} = c^2\,w_{\xi\xi} + 2c^2\,w_{\xi\eta} + c^2\,w_{\eta\eta}\,.$

Damit ist

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = -4c^2\,w_{\xi\eta}$$

und u(x,t) genau dann eine Lösung der Wellengleichung, wenn

$$w_{\xi\eta} = 0.$$

D.h.

$$w_\xi(\xi,\eta) = h(\xi) \qquad \text{und} \qquad w(\xi,\eta) = \int h(\xi)d\xi + G(\eta) \;=\; H(\xi) + G(\eta)$$

Die Anpassung an die Anfangsbedingungen führt zu

$$H(x) + G(x) = f(x)$$
$$-H'(x)+G'(x) = (1/c)g(x).$$

Differentiation der ersten Gleichung führt zu

$$H'(x) = (1/2)(f'(x) - (1/c)g(x))$$
$$G'(x) = (1/2)(f'(x) + (1/c)g(x))$$

oder

$$H(x) = (1/2)f(x) - (1/2c)\int_0^x g(y)dy + C_1$$

$$G(x) = (1/2)f(x) + (1/2c)\int_0^x g(y)dy + C_2.$$

Die Gleichung

$$f(x) = u(x,0) = w(x,x) = H(x) + G(x)$$

ist für $C_1+C_2= 0$ erfüllt.
Damit ist aber

$$u(x,t) = (1/2)(f(x-ct)+f(x+ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)dy .$$

Bemerkung
Die angegebene Lösung wird als d'Alambertsche Formel bezeichnet.

Aus der d'Alambert'schen Formeln können einige wichtige Eigenschaften der Lösungen von Welllengleichungen entnommen werden:

1. **Stabilitätsungleichung**
   Existiert $\operatorname{Max}_{x\in R} |f(x)|$ und $\operatorname{Max}_{x\in R} |g(x)|$, dann gilt für $t > 0$

$$|u(x,t)| \leq \operatorname{Max}_{x\in R} |f(x)| + t\operatorname{Max}_{x\in R} |g(x)|.$$

2. **Abhängigkeitsbereiche**
   Die Lösung im Punkt (x_0,t_0) hängt nur von den vorgegebenen Werten aus $[x_0-ct,x_0+ct]$ auf der x-Achse ab. Die Werte aus [a,b] auf der x-Achse beeinflussen die Lösung in t_0 auf den Intervall [a-ct,a+ct].

3. **Energieerhaltung**
   Es sei

$$E(t) = (1/2)\int_R (u_t^2(x,t)+c^2u_x^2(x,t))dx.$$

   Sofern $u_t, u_x \to 0$ für $x \to \pm\infty$ und die Integrale existieren gilt

$$E(t) = E(0) = (1/2)\int_R (g(x)^2 + c^2(f')^2(x))dx.$$

   Es ist

$$\frac{d}{dt}E(t) = \int_R (u_{tt}(x,t)u_t(x,t)+c^2u_x(x,t)u_{xt}(x,t))dx.$$

   Partielle Integration des zweiten Summanden führt zu

$$\int_R u_x u_{xt}dx = u_x u_t\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_R u_{xx}u_t dx = -\int_R u_{xx}u_t dx$$

   und mithin zu

$$\frac{d}{dt}E(t) = \int_R (u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t))u_t(x,t)dx \ = \ 0.$$

Auch andere Gebiete und Nebenbedingungen sind möglich:

Der Fall

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < L\ , \quad t \in \mathbf{R}$$

$$\begin{aligned} u(0,t) &= u(L,t) = 0 \\ u(x,0) &= f(x), \\ u_t(x,0) &= g(x). \end{aligned}$$

führt über den Trennungssatz

$$u(x,t) = \varphi(x)\psi(t)$$

zum Ziel. Ähnlich zum parabolischen Fall ergibt sich

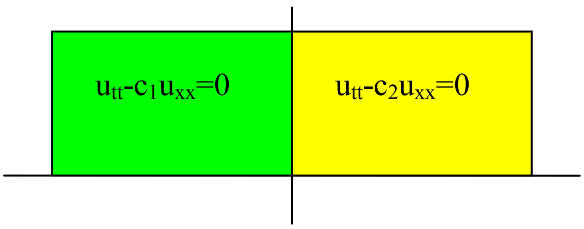
$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = -\lambda\,.$$

Für n= 1,2,3,...... ergeben sich als mögliche Lösungen

$$\lambda_n = (\frac{n\pi}{L})^2 \qquad \text{und} \qquad \varphi_n(x) = \sin(\frac{n\pi x}{L})$$

$$\omega_n = c(\frac{n\pi}{L}) \qquad \text{und} \qquad \psi_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)\,.$$

Linearkombinationen der Produkte sind dann ebenfalls Lösungen und die fehlenden Koeffizienten A_n und B_n ergeben sich aus f(x) und g(x).
Von praktischem Interesse sind auch gemischte Aufgaben



mit verschiedenen Ausbreitungskoeffizienten c_1 und c_2 . Dabei fragt man sich z.B. welche Verstärkungen die jeweiligen Lösungsanteile beim Übergang in die „fremden" Bereiche bekommen bzw. ob Reflexionen auftreten.

§ 13.2 Ein Differenzenverfahren

Das Gitter $x_j = j\,\Delta x$ und $t_n = n\,\Delta t$ führt auf das Differenzenverfahren (mit den lokalen Fehler $O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)$)

$$\frac{u_{j,n+1} - 2u_{j,n} + u_{j,n-1}}{(\Delta t)^2} = c^2 \frac{u_{j+1,n} - 2u_{j,n} + u_{j,n-1}}{(\Delta x)^2}$$

oder zu

$$u_{j,n+1} = 2(1-s)u_{j,n} + s(u_{j+1,n}+u_{j-1,n}) - u_{j,n-1}$$

mit $s = c^2(\frac{\Delta t}{\Delta x})^2$.

Dieses Schema ist exakt bei der Wahl s=1 0der $c = (\frac{\Delta x}{\Delta t})$.

Die benötigten Startwerte ergeben sich z.B. aus

$$u_{j,1} = f(x_j) + g(x_j)\Delta t + (s/2)(f(x_{j+1})-2f(x_j)+f(x_{j-1})).$$

Für die Stabilität des Verfahrens muss auch hier wieder eine CFL-Bedingung erfüllt sein. Sie ergibt sich in einfacher Weise aus der Berücksichtigung der Abhängigkeitsbereiche:
Zur Berechnung von $u_{j,n+1}$ wird $u_{j-1,n}$ und $u_{j+1,n}$ benötigt, d. h. Werte aus dem Intervall $[x_j-\Delta x, x_j+\Delta x]$. Dieses Intervall muss aber $[x_j-c\Delta t, x_j+c\Delta t]$ enthalten. Daraus ergibt sich die Forderung

$$\Delta x \geq c\Delta t$$

oder $s = c^2(\frac{\Delta t}{\Delta x})^2 \leq 1$.

§ 13.3 Ein nichtlineares Problem

Wir betrachten die Gleichung (Quantenfeldtheorie)

$$u_{tt} - u_{xx} + u^3 = 0$$

und suchen eine Lösung der Form

$$u(x,t) = \varphi(x - \Theta t).$$

Dieser Ansatz führt zur gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\varphi'' + \frac{1}{\Theta^2 - 1}\varphi^3 = 0.$$

Diese Differentialgleichung führt (wie üblich) auf das System

$$\varphi' = \psi$$
$$\psi' = -\frac{1}{(\Theta^2 - 1)}\varphi^3$$

mit der Erhaltungsgröße

$$(1/2)\varphi'^2 + \frac{\varphi^4}{4(\Theta^2 - 1)} = E.$$

Für jedes $\Theta > 1$ sind die Lösungen dieser Differentialgleichung periodisch und stellen mithin einen Ausbreitungsvorgang dar der schneller ist, als der des ungestörten Systems.