

**Theorie und Numerik von Differentialgleichungen
mit
MATLAB und SIMULINK**

**K. Taubert
Universität Hamburg
SS08**

Parabolische Differentialgleichungen

11 PARABOLISCHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN. DIFFERENZENVERFAHREN

§ 11.1 Allgemeines

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$u_t = ku_{xx}, \quad k > 0,$$

zunächst auf dem Gebiet $Q = \{ (x,t) \in \mathbf{R}^2 \}$.

Eine (klassische) Lösung $u(x,t)$ dieser Differentialgleichung ist dann eine Funktion deren Ableitungen $u_{xx}(x,t)$ und $u_t(x,t)$ existieren, stetige Funktionen in (x,t) sind und die Differentialgleichung erfüllen

Einige Lösungen können schnell angegeben werden:

- $u(x,t) = kt + (1/2)x^2 + C$
- $v(x,t) = \exp(-\gamma^2 kt)(\sin(\gamma x) + \cos(\gamma x))$, mit beliebigem reellen γ
- $w(x,t) = \exp(kt \pm x)$




Es ist auffallend, dass in der Literatur drei Fälle mit der partiellen Differentialgleichung

$$u_t = ku_{xx} + f(x,t),$$

$f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ besonders häufig und mit unterschiedlicher Ausführlichkeit behandelt werden.

Weiterhin zeigt ein Blick in die vielen Texte über partielle Differentialgleichungen, dass die Frage nach der Existenz von klassischen Lösungen für diese Fälle eher selten oder nur exemplarisch behandelt wird. Sehr verbreitet in der modernen Literatur ist hingegen eine schwache Lösungstheorie. Dabei werden diese Aufgaben als Evolutionsgleichungen oder Differentialgleichungen in Hilberträumen betrachtet. Eine Ausnahme bildet [1].

Die erwähnten Fälle können aus der folgenden Tabelle entnommen werden:

| | | |
|--|---|---|
| $u_t = ku_{xx} + f(x,t), \quad k > 0$ | | |
|  |  |  |
| Gebiet | | |
| $Q_1 = \{(x,t): \begin{matrix} -\infty < x < \infty \\ 0 \leq t < \infty \end{matrix}\}$ | $Q_2 = \{(x,t): \begin{matrix} 0 \leq x < \infty \\ 0 \leq t < \infty \end{matrix}\}$ | $Q_3 = \{(x,t): \begin{matrix} a \leq x \leq b \\ 0 \leq t < \infty \end{matrix}\}$ |
| 1. Randwertaufgabe (Dirichlet) | | |
| $u(x,0) = g(x)$ | $u(x,0) = g(x)$ $u(0,t) = h(t)$ | $u(x,0) = g(x)$ $u(a,t) = h_1(t)$ $u(b,t) = h_2(t)$ |
| 2. Randwertaufgabe (Neumann) | | |
| | $u(x,0) = g(x)$ $u_x(0,t) = h(t)$ | $u(x,0) = g(x)$ $u_x(a,t) = h_1(t)$ $u_x(b,t) = h_2(t)$ |
| 3. Randwertaufgabe (Robin) | | |
| | $u(x,0) = g(x)$ $u(0,t) - pu_x(0,t) = h(t)$ | $u(x,0) = g(x)$ $u(a,t) - pu_x(a,t) = h_1(t)$ $u(b,t) + qu_x(b,t) = h_2(t)$ |

*) Die Anfangsbedingungen sollen für alle x gegeben sein. Die lateralen Bedingungen für $t > 0$.

*) Wir nehmen an, dass die Zahlen p, q positiv sind und der Einfachheit halber, dass die Funktionen g, h_i und f stetig sind.

Lösungen (klassische) dieser Aufgaben sollen solche Funktionen $u(x,t)$ sein, die im inneren der Gebiete Q_i bezüglich x zweimal stetig differenzierbar und bezüglich t einmal stetig differenzierbar sind. Die Übergänge in den Rändern als auch zu den Rändern sollen stetig sein. Treten in den Randbedingungen Ableitungen auf, dann sollen auch diese Übergänge stetig sein.

Ein Blick in [1] zeigt, dass die Existenz von klassischen Lösungen dann gegeben ist, wenn die Randbedingungen oder die Inhomogenität gewisse (Hölder-) Bedingungen erfüllen die auch ins innere der Gebiete fortsetzbar sein müssen.

Es soll jetzt etwas näher auf die Dirichlet-Aufgaben eingegangen werden:

1. Die erste Randwertaufgabe

$$u_t = ku_{xx} \quad (\text{ohne Quelle } f, k > 0) \quad \text{auf } -\infty < x < \infty \text{ und } 0 < t < \infty,$$

mit der Anfangsbedingung $u(x,0) = g(x)$ und einer stetigen und beschränkten Funktion g , hat für $t > 0$ die Lösung

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4kt}\right) g(y) dy$$

Mit einer Quelle $f(x,t)$ ergibt sich (Duhamel Prinzip) für $t > 0$ die Lösung

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4kt}\right) g(y) dy + \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4k(t-s)}\right) f(y,s) dy ds .$$

In beiden Fällen ist auch (die geforderte Stetigkeitsbedingung)

$$\lim_{(x_0,t) \rightarrow (x,0)} u(x_0,t) = g(x).$$

gegeben.

2. Gegeben sei die 1. Randwertaufgabe ($k > 0$)

$$u_t = ku_{xx} \quad \text{für } 0 < x < 1 \text{ und } t > 0$$

mit den Anfangs-Randbedingungen

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad \text{für } t > 0, \quad u(x,0) = g(x) \quad \text{für } 0 \leq x \leq 1 \quad \text{und} \quad g(0) = g(1) = 0.$$

Die folgenden Schritte (eine sogenannte Hilbertraummethode) zeigen, wie „Lösungen“ dieser Aufgabe leicht ermittelt werden können. Die Methode ist nicht auf diese Aufgabe beschränkt und führt z.B. auch bei schwächeren Eigenschaften von $g(\cdot)$ zu „Lösungen“.

Für eine (klassische) Lösung wird zunächst ein Ansatz der Form (Trennung der Variablen)

$$u(x,t) = \varphi(x) \psi(t) .$$

gemacht.

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert für alle (x,t) die Gleichung

$$\frac{\psi'(t)}{k\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}.$$

Damit muss für die Funktionen φ und ψ die Gleichung

$$\frac{\psi'(t)}{k\psi(t)} = -\lambda = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}.$$

mit einer Konstanten λ gelten.

Dieses führt auf die Eigenwertaufgabe

$$\varphi''(x) = \lambda\varphi(x) \quad \text{mit} \quad \varphi(0) = \varphi(L) = 0$$

und die Differentialgleichung

$$\psi'(t) + \lambda k\psi(t) = 0.$$

Die Eigenwertaufgabe hat die Eigenwerte und die Eigenfunktionen

$$\lambda_n = (n\pi)^2 \quad \text{und} \quad \varphi_n(x) = \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

und ergibt insbesondere

$$\psi_n(t) = \exp(-\lambda_n kt).$$

Für die gesuchte Lösung kann dann der Ansatz

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_n(x) \psi_n(t)$$

gemacht werden.

Die Koeffizienten A_n ergeben sich aus (der Fourierreiheentwicklung)

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_n(x) = g(x)$$

Bemerkung

Die Fourierreiheentwicklung einer Funktion ist verbunden mit unitären Räumen und insbesondere mit Hilberträumen. Obige Methode führt z.B. auch dann zu „Lösungen“, wenn g nicht stetig ist. Es ist lediglich die quadratische Integrierbarkeit von g zu fordern. Die entstehenden Funktionen werden häufig als verallgemeinerte Lösungen bezeichnet.

Bemerkung

Ist g z.B. stetig differenzierbar, dann liegt sogar eine gleichmäßige Konvergenz der Reihe $u(x,t)$ für alle zulässigen (x,t) vor. Die entstehende Funktion u ist sogar aus $C^\infty((0,1) \times (0, \infty))$.

§ 11.2 Eigenschaften von Lösungen von parabolischen Anfangsrandwertaufgaben. Eindeutigkeitsätze

Drei Prinzipien oder Eigenschaften spielen bei der Behandlung von parabolischen Gleichungen $u_t = ku_{xx} + f(x,t)$ eine wichtige Rolle

- Das Maximum-Prinzip
- Die Monotone Art
- Die Energieintegralmethode

Daraus ergeben sich in einfacher Weise Stabilitätsungleichungen und Eindeutigkeitsätze

a. Das Maximum Prinzip

Satz 11.1

Es sei

$$Q = \{ (x,t) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, t > 0 \}$$

und u eine stetige Funktion auf \bar{Q} und (klassische) Lösung von $u_t = ku_{xx}$.

Es sei

$$Q_T = \{ (x,t) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, 0 < t < T \}$$

Es sei Γ_T der durch dicke schwarze Striche gekennzeichnete Bereich aus \bar{Q}_T oder der Bereich in dem die Anfangsbedingung und die lateralen Bedingungen gegeben sind.



Dann ist für jedes $T > 0$,

$$\max_{\bar{Q}_T} (u) = \max_{\Gamma_T} (u).$$

Ein ähnliches Resultat gilt für Minima. (D.h. u kann niemals größer oder kleiner als am Rand Γ_T sein).

Beweis:

Es sei $\varepsilon > 0$ eine beliebig kleine Konstante und

$$v_\varepsilon(x,t) = u(x,t) - \varepsilon t.$$

Sowohl u als auch v_ε sind stetige Funktionen auf \bar{Q}_T und haben mithin wohldefinierte Maxima auf \bar{Q}_T und Γ_T .

Es gilt

$$(v_\varepsilon)_t - k(v_\varepsilon)_{xx} = (u - \varepsilon)_t - ku_{xx} = -\varepsilon.$$

Hat die Funktion v_ε ein Maximum an der Stelle (x_0, t_0) mit $a < x_0 < b$ und $0 < t_0 \leq T$, dann ist $(v_\varepsilon)_{xx}(x_0, t_0) \leq 0$ und damit auch $(v_\varepsilon)_t(x_0, t_0) = k(v_\varepsilon)_{xx}(x_0, t_0) - \varepsilon \leq -\varepsilon$.

Wird das Maximum an einer Stelle mit $t_0 < T$ angenommen, dann ergibt sich wegen $(v_\varepsilon)_t(x_0, t_0) = 0$ ein Widerspruch.

Liegt das Maximum auf der Linie $t = T$, dann ist $(v_\varepsilon)_t(x_0, t_0) \geq 0$ und es ergibt sich ebenfalls ein Widerspruch.

Damit kann das Maximum weder in Q_T noch auch der Linie $t = T$ auftreten. Es gilt also

$$\max_{\bar{Q}_T} (v_\varepsilon) = \max_{\bar{\Gamma}_T} (v_\varepsilon).$$

Mit dem Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ ist die Behauptung bewiesen.

b. Monotone Art

Es soll auch hier wieder nur der einfachste Fall angegeben werden. Weitgehende Verallgemeinerungen, insbesondere auch für nichtlineare Probleme, und der Beweis können aus dem Buch [2] entnommen werden.

Es sei

$$\begin{aligned} Q_T &= \{ (x, t) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, 0 < t < T \} \\ B_T &= \{ (x, t) \in \mathbb{R}^2 : t = 0, a < x < b \} \\ \Gamma_T &= \{ (x, t) \in \mathbb{R}^2 : x = a, x = b, 0 \leq t < T \} \\ \Omega &= B_T \cup \Gamma_T \cup Q_T \end{aligned}$$

Satz 11.2 (Strenge Monotonie)

Gegeben sei der Operator

$$Lu = u_t - ku_{xx} - f(x, t)$$

auf Q_T und der Dirichlet-Randoperator

$$Ru = \begin{cases} u(x, 0), & a \leq x \leq b \\ u(a, t), & 0 < t < T \\ u(b, t), & 0 < t < T. \end{cases}$$

Dann ist der Operator (Lu, Ru) von streng monotoner Art, d.h. für zwei Funktionen $u, v \in C(\Omega) \cap C^2(Q_T)$ folgt aus

$$Lv < Lu \text{ in } Q_T, \quad Rv < Ru \text{ auf } B_T \cup \Gamma_T,$$

dass $v < u$ in Ω ist.

Bemerkung

In der hier genannten Version gilt der Satz sogar mit dem Gleichheitszeichen.

c. Die Energieintegralmethode**Satz 11.3**

Es sei

$$Q = \{ (x,t) \in \mathbf{R}^2 : a < x < b, \quad t > 0 \}$$

und w eine stetige Funktion auf \bar{Q} und (klassische) Lösung von $u_t = ku_{xx}$.
Außerdem sei $w(a,t) = w(b,t) = 0$. Dann gilt

$$\int_a^b (w(x,t))^2 dx \leq \int_a^b (w(x,0))^2 dx$$

für alle $t \geq 0$.

Beweis:

Multiplikation der Gleichung $0 = w_t - kw_{xx}$ mit w liefert in $a < x < b, \quad t \geq 0$

$$0 = (w_t - kw_{xx})w = ((1/2)w^2)_t + (-kw_x w)_x + kw_x^2.$$

Integration über das Intervall $a \leq x \leq b$ liefert

$$0 = \int_a^b (((1/2)w(x,t))^2)_t dx \leq -[kw_x(x,t)w(x,t)]_a^b + k \int_a^b (w_x(x,t))^2 dx.$$

Wegen der Randbedingungen wird daraus

$$\frac{d}{dt} \int_a^b ((1/2)w(x,t))^2 dx \leq -k \int_a^b (w_x(x,t))^2 dx \leq 0.$$

Daraus folgt, dass das Integral auf der linken Seite fällt und deshalb

$$\int_a^b (w(x,t))^2 dx \leq \int_a^b (w(x,0))^2 dx.$$

Bemerkung:

Alle drei Sätze führen natürlich sofort zu Eindeutigkeitsaussagen.

§ 11.3 Regularität und asymptotisches Verhalten

a. Regularität

Haben die Funktionen f (Quelle) und ψ (Anfangsrandbedingungen) noch höhere Regularitätseigenschaften, dann kann mit einer Übertragung dieser Eigenschaften auf die Lösung gerechnet werden. Einzelheiten können wieder aus dem Buch von Friedmann [S. 75] entnommen werden.

b. Asymptotisches Verhalten

Wir betrachten jetzt wieder die erste Randwertaufgabe ($k > 0$)

$$u_t = ku_{xx} \text{ für } 0 < x < L \text{ und } t > 0$$

mit den Anfangsrandbedingungen

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \text{ für } t > 0, \quad u(x,0) = g(x) \text{ für } 0 \leq x \leq 1 \text{ und } g(0) = g(1) = 0.$$

Ist g stetig differenzierbar, dann liefert der im Absatz 2 gemachte Ansatz die gleichmäßig konvergente Reihe

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x) \exp(-n^2 \pi^2 t)$$

und damit $u(x,t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$. Es gilt sogar

$$|u(x,t)| \leq \text{konst.} \exp(-\pi^2 t).$$

§ 11.4 Einfache Differenzenverfahren

Es sollen nun Aussagen zur numerischen Approximation von Lösungen von parabolischen Differentialgleichungen mit Differenzenverfahren gemacht werden. Als Maßstab für die Beurteilung der Differenzenverfahren werden wieder die Eigenschaften der Lösungen der ursprünglichen Differentialgleichungen oder der zugehörigen Operatoren herangezogen. Hier wird gefordert, dass die diskretisierten Aufgaben ein diskretes Maximum-Prinzip erfüllen oder dass ein diskretes Analogon zur Energieintegralmethode gültig ist. Die Erhaltung der Monotonen Art wird sogar in einer noch verfeinerten Art behandelt.

Exemplarisch betrachten wir die Differentialgleichung

$$u_t = u_{xx} + f(x,t)$$

auf $Q = (0,1) \times (0,T)$ mit den Anfangs-Randbedingungen

$$\begin{aligned} u(x,0) &= g(x) \\ u(0,t) &= h_1(t) \\ u(1,t) &= h_2(t). \end{aligned}$$

Wie bei Differenzenverfahren üblich, werden die Ableitungen durch Differenzenquotienten ersetzt.

In Analogie zum expliziten Euler Verfahren und zum impliziten Euler Verfahren ergeben sich die folgenden Verfahren:

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)(u(x - \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x + \Delta x, t)) + \Delta t f(x, t)$$

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)(u(x - \Delta x, t + \Delta t) - 2u(x, t + \Delta t) + u(x + \Delta x, t + \Delta t)) + \Delta t f(x, t + \Delta t)$$

Das zur Trapezregel analoge Verfahren ist

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \Delta t f(x, t + 0.5 \Delta t) + (1/2) \left(\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)(u(x - \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x + \Delta x, t)) + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)(u(x - \Delta x, t + \Delta t) + 2u(x, t + \Delta t) + u(x + \Delta x, t + \Delta t))$$

und wird nach **Crank-Nicholson** benannt.

Auf einem Gitter $x_i = i \Delta x$ und $t_k = k \Delta t$, $i = 0, 1, 2, \dots, N$ und $k = 0, 1, 2, \dots, M$ ergeben sich die gesuchten Näherungen u_i^k an der Stelle (x_i, t_k) aus den Gleichungen:

$$u_i^{k+1} = (1 - 2\gamma)u_i^k + \gamma(u_{i-1}^k + u_{i+1}^k) + \Delta t f_i^k,$$

$$(1 + 2\gamma)u_i^{k+1} - \gamma(u_{i+1}^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}) = u_i^k + \Delta t f_i^k$$

$$\text{bzw. } 2(\gamma + 1)u_i^{k+1} - \gamma(u_{i+1}^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}) = 2(1 - \gamma)u_i^k + \gamma(u_{i+1}^k + u_{i-1}^k) + 2\Delta t f(x_i, t_k + 0.5\Delta t).$$

Dabei ist $\gamma = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$.

Bei den beiden letzten Verfahren handelt es sich um implizite Verfahren und pro Zeitschritt ist ein Gleichungssystem in tridiagonalgestalt zu lösen.

Satz 11.4

Ist u eine auf \bar{Q} in x viermal und in t zweimal stetig differenzierbare Lösung der Anfangsrandwertaufgabe, dann haben alle drei Verfahren den Konsistenzfehler $O((\Delta x)^2 + \Delta t)$.

Ist u sogar dreimal stetig differenzierbar bezüglich t , dann ist der Konsistenzfehler bei dem Crank-Nicholson-Verfahren von der Ordnung $O((\Delta x)^2 + (\Delta t)^2)$.

§ 11.5 Diskrete Stabilitätsungleichungen. Konvergenz

Die drei eingeführten Differenzenverfahren können in die Form

$$-\gamma\sigma u_{i-1}^{k+1} + (2\gamma\sigma + 1)u_i^{k+1} - \gamma\sigma u_{i+1}^{k+1} = F_i^k$$

mit

$$F_i^k = (1 - \sigma)\gamma u_{i-1}^k + (1 - 2(1 - \sigma)\gamma)u_i^k + (1 - \sigma)\gamma u_{i+1}^k + \Delta t \tilde{f}_i^k$$

zusammengefasst werden. Dabei ist $\sigma = 0$ oder 1 oder $1/2$ zu wählen.

Mit homogenen Randbedingungen, führt die erste Gleichung für jedes k zu einem Gleichungssystem von Monotoner Art welches mithin eindeutig lösbar ist. Die Gleichung zeigt aber auch, dass für die Lösung gilt

$$\text{Max}_i |u_i^{k+1}| \leq \text{Max}_i |F_i^k|.$$

Nach Voraussetzung ist $0 \leq \sigma \leq 1$. Wird jetzt zusätzlich vorausgesetzt, dass

$$(1 - 2(1 - \sigma)\gamma) \geq 0$$

ist, dann gilt sogar

$$\text{Max}_i |u_i^{k+1}| \leq \text{Max}_i |F_i^k| \leq \text{Max}_i |u_i^k| + \Delta t \text{Max}_i |\tilde{f}_i^k|.$$

Damit gilt die (diskrete) Stabilitätsungleichung

$$\text{Max}_k \text{Max}_i |u_i^{k+1}| \leq \text{Max}_i |u_i^0(x)| + \Delta t \sum_{j=0}^k \text{Max}_i |\tilde{f}_i^j|.$$

Bemerkung

Die Forderung $(1 - 2(1 - \sigma)\gamma) \geq 0$ kann zu einer Einschränkung für das Verhältnis von Zeit- und Ortschaftweite führen und zwar:

| | |
|---------------------------------------|------------------------------------|
| Explizites Verfahren ($\sigma = 0$) | $\Delta t / (\Delta x)^2 \leq 1/2$ |
| Implizites Verfahren ($\sigma = 1$) | Keine Einschränkungen |
| Crank-Nicholson ($\sigma = 1/2$) | $\Delta t / (\Delta x)^2 \leq 1$ |

Mit den Voraussetzungen aus Satz 11.4 und der angegebenen Stabilitätsungleichung kann der folgende Satz schnell bewiesen werden:

Satz 11.5

Unter den Voraussetzungen von Satz 11.4 gelten für alle drei Verfahren

$$\text{Max}_{i,k} |u(x_i, t_k) - u_i^k| \leq C |(\Delta x)^2 + \Delta t|.$$

Für das Crank-Nicholson Verfahren ($\Delta t / (\Delta x)^2 \leq 1$) gilt sogar

$$\text{Max}_{i,k} |u(x_i, t_k) - u_i^k| \leq C |(\Delta x)^2 + (\Delta t)^2|.$$

Wir hatten gesehen, dass die Lösungen der Wärmeleitungsgleichung mit homogenen Randbedingungen eine Stabilitätsungleichung (Energieintegralmethode) der Form

$$\int_a^b (w(x, t))^2 dx \leq \int_a^b (w(x, 0))^2 dx$$

erfüllen.

Außerdem soll noch einmal daran erinnert werden, dass in diesem Fall auch eine Lösung konstruiert wurde und zwar durch Trennung der Variablen und einer Hilbertraummethode. Diese Ergebnisse und Methoden wiederholen sich bei einer Diskretisierung mit den bisherigen Verfahren und führen zu folgenden Satz

Satz 11.6

In der diskreten L_2 -Norm gilt für das implizite Verfahren und das Crank-Nicholson Verfahren

$$\| \mathbf{u}^k \| \leq \| \mathbf{u}^0 \|$$

und zwar unabhängig von dem Schrittweitenverhältnis. Die Ungleichung gilt auch für das explizite Verfahren sofern

$$\Delta t / (\Delta x)^2 \leq 1/2$$

ist.

Beweis:

Der Einfachheit halber betrachten wir nur das Crank-Nicholson Verfahren:

$$\frac{\mathbf{u}_i^{k+1} - \mathbf{u}_i^k}{\Delta t} = (1/2) \left(\frac{\mathbf{u}_{i+1}^{k+1} - 2\mathbf{u}_i^{k+1} + \mathbf{u}_{i-1}^k}{(\Delta x)^2} + \frac{\mathbf{u}_{i+1}^k - 2\mathbf{u}_i^k + \mathbf{u}_{i-1}^k}{(\Delta x)^2} \right).$$

Wie beim kontinuierlichen Problem wird nun ein Separationsansatz gemacht:

$$\mathbf{u}_i^k = v_i w^k.$$

Einsetzen liefert

$$\frac{w^{k+1} - w^k}{(0.5)\Delta t(w^{k+1} + w^k)} = \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{v_i}.$$

Die rechte Seite führt zu einer Eigenwertaufgabe. Sind λ_k deren Eigenwerte, dann ergibt sich

$$w^{k+1} = q_k w^k \quad \text{mit} \quad q_k = \frac{1 - (1/2)\Delta t \lambda_k}{1 + (1/2)\Delta t \lambda_k}.$$

D.h. jeder Eigenvektor (Komponenten x_i) wird von Zeitschicht zu Zeitschicht verstärkt durch den Faktor q_k . Soll nun eine diskrete Version der Stabilitätsungleichung gelten, dann muss q_k dem Betrage nach kleiner oder gleich 1 sein. D.h. $|q_k| \leq 1$ für alle Eigenwerte λ_k .

Wegen der Orthogonalität der Eigenfunktionen folgt dann in der diskreten L_2 - Norm

$$\|y\|^2 = h \sum_i y_i^2$$

die gewünschte Ungleichung.

Gegeben sei nun die Wärmeleitungsgleichung mit Dirichlet-Anfangsrandbedingungen. Dabei seien die lateralen Randbedingungen homogen.

Es ist einleuchtend, dass bei dieser Aufgabe die Anzahl der Vorzeichenwechsel der Temperatur von Zeitschicht zu Zeitschicht nicht zunehmen wird. Es stellt sich die Frage, ob diese Eigenschaft bei den angegebenen Verfahren erhalten bleibt. Leider ist die Antwort nein! Wird aber z.B. beim expliziten Verfahren das für die Stabilität geforderte Schrittweiten-Verhältnis halbiert, dann bleibt auch diese Eigenschaft erhalten. Der Beweis hierfür ist als aufwendig zu bezeichnen. Die Aufgabe 11.3 veranschaulicht numerisch das unterschiedliche Verhalten.

Literatur

- [1] Friedmann, A.: Partial Differential Equations of Parabolic Type. Holt, Reinhard and Winston Inc. 1969.
- [2] Collatz, L.: Funktionalanalysis und numerische Mathematik. Springer Verlag. 1968.
- [3] Großmann, Ch., Roos, H.-G. Numerik Partieller Differentialgleichungen. Teubner Studienbücher. 1994.
- [4] Rjabenki, V.S., Filippow, A.F. Über die Stabilität von Differenzgleichungen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1960.