**Theorie und Numerik von Differentialgleichungen**
**mit**
**MATLAB und SIMULINK**

**K. Taubert**
**Universität Hamburg**
**SS08**

Monotone Art

# 7 DIFFERENZENVERFAHREN ZUR AUFLÖSUNG VON GEWÖHNLICHEN LINEAREN RANDWERTAUFGABEN von MONOTONER ART

Eine in vielen Anwendungen auftretende gewöhnliche Differentialgleichung hat die Form

$$L(y) = -(p(x)y')' + q(x)y = r(x)$$

Dabei sei (zunächst) $p(.) > 0$ eine stetig differenzierbare Funktion von $[a,b]$ in $\mathbf{R}$. Die Funktionen $r(.)$ und $q(.)$ seien stetige Funktionen von $[a,b]$ in R und $q(.) \geq 0$.

Um die gesuchte Lösungsfunktion dieser Differentialgleichungen eindeutig festzulegen, müssen noch Randbedingungen angegeben werden. Typische Randbedingungen sind:

1. $y(a) = d_1$, $\quad y(b) = d_2$ (Dirichlet-Bedingung)
2. $-y'(a) = d_1$, $\quad y'(b) = d_2$ (Neumann-Bedingung)
3. $-y'(a) + cy(a) = d_1$, $\quad y'(b) + dy(b) = d_2$ (Cauchy-Bedingung).

Dabei seien die $d_i$ reelle Zahlen und $c,d \geq 0$. Der Fall $q = 0$ mit $c = d = 0$ (Neumann-Bedingung mit $q=0$) sei ausgeschlossen.

Etwas allgemeiner werden hier die Randbedingungen

$$\begin{pmatrix} y(a) & \text{oder} & cy(a) - y'(a) \\ y(b) & \text{oder} & dy(b) + y'(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}.$$

betrachtet. Auch hier soll der Fall $q = 0$ mit $c = d = 0$ ausgeschlossen sein.

Es ist zweckmäßig zu den Aufgaben, angepasste Operatoren der folgenden Form zu betrachten:

$$(L,R) : C^2[a,b] \rightarrow (C[a,b], \mathbf{R}^2)$$

mit

$$(Ly)(x) = - (p(x)y')' + q(x)y$$

$$Ry = \begin{pmatrix} y(a) & \text{oder} & cy(a) - y'(a) \\ y(b) & \text{oder} & dy(b) + y'(b) \end{pmatrix}.$$

Diese Operatoren (L,R) haben eine bemerkenswerte Eigenschaft (Monotone Art):

$$\begin{matrix} Lu \geq 0 \\ Ru \geq 0 \end{matrix} \;\Rightarrow\; u \geq 0.$$

Es ist sicherlich nicht unvernünftig (zumal diese Qualität auch durch physikalische Hintergründe der entsprechenden Modelle gegeben ist) diese Eigenschaft bei einer Diskretisierung der Aufgabe zu erhalten bzw. zu erzwingen.

Exemplarisch behandeln wir dazu eine Diskretisierung der Aufgabe

$$- (p(x)y')' + q(x)y = r(x)$$

mit den Randbedingungen

$$cy(a) - y'(a) = d_1, \quad y(b) = d_2, \quad c \geq 0.$$

Es sei h eine vorgegebene Schrittweite $h = (b-a)/N$, $N \in \mathbf{N}$, und $x_i = a + ih$ die zugehörigen Gitterpunkte aus $[a,b]$ mit $i = 0,1,2, \dots ,N$.

Eine kanonische Diskretisierung der Differentialgleichung führt zu

$$-\frac{p(x_{i+(1/2)})\dfrac{y_{i+1}-y_i}{h} - p(x_{i-(1/2)})\dfrac{y_i - y_{i-1}}{h}}{h} + q(x_i)y_i = r(x_i), \quad i= 1,2,\dots\ N-1.$$

Eine (mögliche) Diskretisierung der ersten Randbedingung ergibt sich aus den folgenden Überlegungen:

1. Wir denken uns p(.) über den Randpunkt a hinaus fortgesetzt und schreiben die obige Diskretisierung für $i = 0$ hin

$$-\frac{p(x_{1/2})(y_1 - y_0) - p(x_{-1/2})(y_0 - y_{-1})}{h^2} + q(x_0)y_0 = r(x_0),$$

2. Eine nahe liegende Diskretisierung für die erste Randbedingung ist außerdem

$$cy_0 - \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} = d_1 \;\Leftrightarrow\; y_{-1} = 2hd_1 - 2hcy_0 + y_1.$$

3. Einsetzen von $y_{-1}$ in die erste Gleichung liefert dann als Diskretisierung für die erste Randbedingung

$$\frac{(p(x_{1/2})+p(x_{-1/2})+2hcp(x_{-1/2}))y_0-(p(x_{1/2})+p(x_{-1/2}))y_1}{h^2}=-q(x_0)y_0+2h^{-1}d_1p(x_{-1/2}).$$

Für die zweite Randbedingung schreiben wir einfach

$$y_N = d_2.$$

Damit entsteht insgesamt ein Gleichungssystem der Form $A_h y_h = f_h$ mit

$$A_h=\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} s(x_0)+2hcp(x_{-1/2})+h^2q(x_0) & -s(x_0) & 0 & . & . & 0 & 0 \\ -p(x_{1-(1/2)}) & s(x_1)+h^2q(x_1) & -p(x_{1+(1/2)}) & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & -p(x_{N-(1/2)}) \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & h^2 \end{pmatrix}$$

und

$$f_h=\begin{pmatrix} 2h^{-1}d_1p(x_{-1/2}) \\ r(x_1) \\ . \\ . \\ . \\ r(x_{N-1}) \\ d_2 \end{pmatrix}$$

mit $s(x_i) = p(x_{i-1/2})+p(x_{i+1/2})$ für $i = 0,1,2, \ldots..,N-1$.

**Aufgabe**
Überlegen Sie sich eine Diskretisierung, die zu einer symmetrischen Matrix führt.

Da die ursprüngliche Aufgabe von Monotoner Art ist, d.h.

$$\begin{matrix} Lu \geq 0 \\ Ru \geq 0 \end{matrix} \Rightarrow u \geq 0.$$

ist es sicherlich nun nicht unvernünftig zu fordern, dass die entstehenden quadratischen linearen Gleichungssysteme die entsprechende Eigenschaft

$$A_h u_h \geq 0 \quad \Rightarrow \quad u_h \geq 0$$

für alle Schrittweiten h haben. Dabei sind die Ungleichungen komponentenweise zu verstehen.

**Bemerkung:**
Ein unübersehbarer Vorteil dieser Qualität wäre auch, dass $A_h^{-1}$ existiert und die entstehenden linearen Gleichungssysteme für alle zulässigen Schrittweiten ($h \leq b-a$) eindeutig lösbar sind

**Bemerkung:**
Eine notwendige Bedingung dafür, dass eine invertierbare Matrix A die Eigenschaft ($Au \geq 0 \Rightarrow u \geq 0$) besitzt, liefert die folgende Überlegung:
Das lineare Gleichungssystem $Ay = b$ sei eindeutig lösbar. Zu beliebigem b, mit $b \geq 0$, gibt es dann ein eindeutiges y mit $Ay = b$. Multiplikation der Gleichung mit $A^{-1}$ liefert

$$A^{-1}Ay = A^{-1}b \quad \Leftrightarrow \quad y = A^{-1}b.$$

Da die Lösung y die Eigenschaft $y \geq 0$, für beliebige b mit $b \geq 0$, haben soll, muss $A^{-1}$ nichtnegative Einträge haben.

**Definition:**
Eine reelle n*n Matrix A heißt inversmonoton oder von Monotoner Art, falls $A^{-1}$ existiert und nichtnegative Einträge hat.

**Satz 5.1**
Es sei entweder $q(a) \neq 0$ oder $c \neq 0$. Dann ist die Matrix $A_h$ inversmonoton.

**Beweis:**
Angenommen es existiert ein $u_h = (u_0^h, u_1^h, \ldots\ldots, u_{N-1}^h, u_N^h)$ mit

$$A_h u_h \geq 0 \quad \text{jedoch nicht } u_h \geq 0.$$

Es sei $u_j^h$ eine betragsgrößte negative Komponente von $u_h$. Wäre $j = 0$ oder $j = N-1$ ergibt sich sofort ein Widerspruch. Für die übrigen j ergibt sich eine Folge negativer Komponenten für $u_h$ mit

$$|u_0^h| > |u_1^h| \geq \ldots\ldots \geq |u_{j-1}^h| \geq |u_j^h|$$

oder

$$|u_{N-1}^h| > |u_{N-2}^h| \geq \ldots\ldots \geq |u_{j+1}^h| \geq |u_j^h|$$

und damit ebenfalls ein Widerspruch zur Annahme.
Aus der Bedingung

$$A_h u_h \geq 0 \quad \Rightarrow \quad u_h \geq 0$$

folgt, dass das Gleichungssystem

$$A_h y_h = f_h$$

für jedes $f_h$ eindeutig lösbar ist. Hat die Aufgabe nämlich zwei Lösungen $u_{h1}$ und $u_{h2}$, dann gilt

$$A_h(u_{h1} - u_{h2}) = 0 \text{ und } u_{h2} - u_{h1} \geq 0$$

und deshalb $u_{h2} = u_{h1}$. Wird insbesondere $f_h = 0$ gewählt, dann hat das Gleichungssystem nur die triviale Lösung.
Dass die Inverse Matrix $A_h^{-1}$ nur nichtnegative Einträge haben kann, zeigt das folgende Argument:
Es sei $f_h$ ein Vektor mit nicht negativen Einträgen und

$$A_h y_h = f_h.$$

Multiplikation mit $A_h^{-1}$ liefert $y_h = A_h^{-1} f_h \geq 0$. Hätte nun $A_h^{-1}$ ein negativen Eintrag, dann würde eine geeignete Wahl von $f_h$ sofort zu einen Widerspruch führen.

Hinreichende Bedingungen dafür, dass Matrizen inversmonoton sind, wurden in der Literatur umfangreich untersucht und angegeben. Eine hinreichende Bedingung ist:

**Satz 5.2**
Die Matrix $A = (a_{ij})$ habe die Eigenschaften $a_{ii} > 0$ und $a_{ij} \leq 0$ für $i \neq j$. Ist A außerdem strikt diagonal dominant oder irreduzibel diagonal dominant, so ist A inversmonoton.

Der folgende Satz zeigt, dass die inversen Matrizen von $(A_h)_h$ alle gleichmäßig beschränkt sind.

**Satz 5.3 (Gleichmäßige Beschränktheit der Inversen)**
Es sei entweder $q(a) \neq 0$ oder $c \neq 0$. Dann sind die Matrizen $A_h^{-1}$ in der zur Maximum Norm zugeordneten Matrixnorm gleichmäßig beschränkt. D.h. es ist

$$\| A_h^{-1} \|_\infty \leq K \quad \text{für alle zulässigen h.}$$

**Beweis:**
Wir beweisen den Satz unter der Annahme, dass $q(x) > 0$ ist und überlassen es dem Leser, den etwas umständlichen Fall $q(x) \geq 0$ zu bearbeiten.
Es sei (.,.) das gewöhnliche innere Produkt im $R^{N+1}$ und für $u \in R^{N+1}$ sei $l : R^{N+1} \rightarrow R^{N+1}$ eine der möglichen Abbildungen

$$l(u) = (0,0,\ldots 0,u_i,0,\ldots,0) \quad \text{mit} \quad |u_i| = \|u\|.$$

Dann gilt für alle u

$$(A_h u, l(u)) \geq (1/h^2) \operatorname{Min}\big( 2hcp(x_{-1/2}) + h^2 q(x_0),\ h^2 \operatorname*{Min}_{x \in [a,b]} q(x),\ h^2 \big)\ (u, l(u)) \geq L(u, l(u)) = L\|u\|^2$$

mit einer von h unabhängigen Konstanten $L > 0$.
Das Skalarprodukt kann auch nach oben abgeschätzt werden und es gilt für alle u

$$\| A_h u \|_\infty \|u\| = \| A_h u \|_\infty \|l(u)\| = \| A_h u \|_\infty \|l(u)\|_1 \geq (A_h u, l(u)) \geq L\|u\|^2.$$

Daraus ergibt sich, mit K = 1/L, das gewünschte Ergebnis

$$\| A_h^{-1} \|_\infty \le K \quad \text{für alle zulässigen h.}$$

Die gleichmäßige Beschränkheit der Inversen von $A_h$ liefert nun auch die Konvergenz der Näherungslösungen $y_h$ gegen die Lösung der ursprünglichen Aufgabe.

**Korollar (Konvergenz)**
Es sei $y_h = ( y_0^h, y_1^h, \ldots.. , y_N^h )$ die Lösung des Differenzenverfahrens zur Schrittweite h.
Dann gilt

$$\underset{i=0,1,2,\ldots,N}{\mathrm{Max}} | y_i^h - y(x_i) | \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

**Beweis:**
Einsetzen der Lösung y(.) der Randwertaufgabe in den Ausdruck

$$\frac{(p(x_{1/2}) + p(x_{-1/2}) + 2hcp(x_{-1/2}))y_0 - (p(x_{1/2}) + p(x_{-1/2}))y_1}{h^2} + q(x_0)y_0 - 2h^{-1}d_1p(x_{-1/2})$$

und

$$-\frac{p(x_{i+1/2})(y_{i+1} - y_i) - p(x_{i-1/2})(y_i - y_{i-1})}{h^2} + q(x_i)y_i - r(x_i), \quad i = 1,2,\ldots\ N-1$$

liefert nach einer etwas mühsamen Rechnung (Taylorentwicklung) Ausdrücke der Form

$$\varepsilon_i(y(.)\ ;h) \qquad i = 0,1,2,\ldots N-1,N$$

mit

$$\underset{i=0,1,2,\ldots,N-1}{\mathrm{Max}} |\varepsilon_i(y(.)\ ;h)| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

Ist $y^h$ die Restriktion der Lösung der Randwertaufgabe auf die Gitterpunkte zu h und $y_h$ die zugehörige Lösung des Differenzenverfahrens, dann gilt

$$A_h(y^h - y_h) = \varepsilon(y(.);h) \quad \Leftrightarrow \quad (y^h - y_h) = A_h^{-1}\,\varepsilon(y(.);h).$$

Die gleichmäßige Beschränktheit der Inversen zu $A_h$ liefert dann

$$\| (y^h - y_h) \| = \| A_h^{-1} \|_\infty \| \varepsilon(y(.);h) \|$$

und damit in eleganter Weise die gewünschte Behauptung.

**Abschließende Bemerkungen:**
Mit anderen Differenzenverfahren und bei ausreichender Regularität der auftretenden Funktionen kann erreicht werden, dass die Konvergenz der Verfahren von höherer Ordnung (als 2) ist.
Auch bei nichtlinearen Aufgaben kann das Konzept „Monotoner Art“ erfolgreich eingesetzt werden.
Bisher unerwähnt ist, dass bei den Aufgaben von Monotoner Art Fehlerabschätzungen durch Einschließungen erreicht werden können:
Ist $u_h$ eine Lösung von $A_h u_h = f_h$ dann gilt natürlich

$$A_h u_{h1} \geq A_h u_h \geq A_h u_{h2} \quad \Rightarrow \quad u_{h1} \geq u_h \geq u_{h2}.$$

Randwertaufgaben können auch in einer schwächeren Form formuliert werden und führen manchmal sogar zu äquivalenten Minimierungsaufgaben. Diese Formulierungen verallgemeinern dann nicht nur die klassischen Formulierung der Randwertaufgaben, sondern führen auch zu ganz anderen und sehr verallgemeinerungsfähigen numerischen Methoden
Andere Verfahren, wie z.B. die Shooting-Methoden, können zum Teil mit großem Erfolg bei der Integration von gewöhnlichen Randwertaufgaben eingesetzt werden.