K. Taubert
Universität Hamburg
SS08

6 OPTIMALE STEUERUNGSPROBLEME UND NUMERIK FÜR UNSTETIGE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Bei Regelungsproblemen stellt sich in natürlicher Weise die Frage nach optimalen Reglern. Für lineare Systeme werden ein Existenzsatz und eine notwendige Bedingung für eine optimale Steuerung (Regelung) aufgestellt. Diese Bedingung führt zum so genannten Bang-Bang Prinzip oder zu Schwarz-Weiß-Reglern. Die Synthese von optimalen Steuerungsproblemen führt häufig und in natürlicher Weise auf Systeme von unstetigen Differentialgleichungen
Es werden einige Beispiele für Differentialgleichungen mit Unstetigkeiten angegeben. Ein allgemeiner Existenzsatz garantiert die Existenz von Lösungen von Differentialgleichungen mit Unstetigkeiten bzw. von entsprechenden mehrwertigen Differentialgleichungen. Eine sehr große Klasse von Differenzenverfahren liefert in völlig unproblematischer Weise, ausreichend gute Näherungen für die Lösungen.

§ 6.1 Ein zeitoptimales Steuerungsproblem

Gegeben sei das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$z' = A\,z + u \;, \qquad z(0) = z_0$$

mit einer reellen nxn Matrix A und einer reellwertigen, messbaren Funktion $u : R \to R^n$
$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ mit der Eigenschaft $|u_i| \le 1$.
Gesucht ist eine „optimale“ messbare Funktion $u^* = (u_1^*, u_2^*, \Lambda\ , u_n^*) : R \to R^n$ mit $|u_i^*| \le 1$ derart, dass z_0 in den Ursprung 0 überführt wird und zwar in minimaler Zeit.

Es gilt der folgende

Satz 6.1
Sind die Eigenwerte von A reell, paarweise verschieden und negativ, dann existiert eine optimale Steuerung u*. Die Komponenten der optimalen Steuerung u* haben die Eigenschaft

$$|u_i^*| = 1$$

und jedes u_i^* hat höchstens (n-1) Vorzeichenwechsel.

Beweis
Durch die Variablentransformation $z = Xy$, mit einer nichtsingulären reellen nxn Matrix X, geht die Anfangswertaufgabe

$$z' = A\,z + u\ , \qquad z(0) = z_0$$

über in

$$Xy' = AXy + u\ , \qquad y_0 = X^{-1}z_0$$

oder

$$y' = X^{-1}AXy + X^{-1}u\ , \quad y_0 = X^{-1}z_0$$

(Man beachte $z(t) = 0 \Leftrightarrow y(t) = 0$).
Nach Voraussetzung kann die Matrix X so gewählt werden, dass

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & O & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

mit den paarweise verschiedenen Eigenwerten λ_i von A.
Mit der Darstellung $X^{-1} = (\alpha_{ij})$ ergibt sich

$$y_i(t) = e^{\lambda_i t} y_i(0) + e^{\lambda_i t}\int_0^t e^{-\lambda_i s}\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} u_j(s)ds\ , \qquad i=1,2, \ldots ,n.$$

Wir zeigen nun, dass es mindestens ein $\hat{t}$ und eine Funktion $\hat{u} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \Lambda\ , \hat{u}_n)$ gibt mit

$$0 = \ y_i(\hat{t})\ = \ e^{\lambda_i \hat{t}} y_i(0) + e^{\lambda_i \hat{t}}\int_0^{\hat{t}} e^{-\lambda_i s}\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}\hat{u}_j(s)ds\ , \qquad i=1,2, \ldots ,n.$$

Diese Behauptung ist gleichbedeutend zur Existenz eines $\hat{t}$ und eines $\hat{u}$ mit der Eigenschaft

$$-y_i(0) = \int_0^{\hat{t}} e^{-\lambda_i s}\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}\hat{u}_j(s)ds\ , \qquad i=1,2, \ldots ,n. \quad (*)$$

Die Wahl $\hat{u}(s) = k = (k_1,k_2, \ldots ,k_n)$, $k_i = \text{const} \neq 0$ liefert

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} k_j \ = \ \frac{-y_i(0)}{\int_0^{\hat{t}} e^{-\lambda_i s}ds} \ = \ \frac{y_i(0)\lambda_i}{e^{-\lambda_i \hat{t}} - 1}, \qquad i=1,2, \ldots ,n.$$

oder mit $X = (x_{ij})$

$$k_j \ = \ \sum_{i=1}^n x_{ji}\frac{\lambda_i y_i(0)}{e^{-\lambda_i \hat{t}} - 1}\,.$$

Da die λ_i negativ sind, können die Ausdrücke $e^{-\lambda_i \hat{t}} - 1$ beliebig groß gemacht werden und damit auch $| k_j | \leq 1$ gewährleistet werden. D.h. die Bedingung (*) kann erfüllt werden.

Man betrachte jetzt die Vektoren

$$\rho_t u = (\cdots, \int_0^t e^{-\lambda_i s} \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} u_j(s) ds, \cdots).$$

Die Menge $C(t) = \{ \rho_t u \}_u$ ist für jedes $t \geq 0$ eine nichtleere und konvexe Menge. Außerdem gilt

$$C(t') \subseteq C(t) \quad \text{für } t' \leq t$$

Nach den oben bewiesenen existiert ein $\hat{t}$ mit $-y(0) \in C(\hat{t})$ und damit ein minimales t_0 mit

$$- y(0) \in C(t') \qquad \text{für alle } t' > t_0$$

$$- y(0) \notin C(t') \qquad \text{für alle } t' < t_0.$$

Wir zeigen nun, dass $-y(0) \in C(t_0)$ ist und damit die Existenz einer optimalen Steuerung u.
Betrachte eine Folge $t_m \to t_0$, $t_m \neq t_0$ und zugehörige u^m mit der Eigenschaft

$$- y_i(0) = \int_0^{t_m} e^{-\lambda_i s} \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} u_j^m(s) ds, \qquad i = 1,2, \ldots ,n.$$

Nach einem bekannten Satz (Funktionalanalysis) gibt es eine Teilfolge von (t_n,u^n) mit der Eigenschaft

$$- y_i(0) = \lim_{n_0 \to \infty} - y_i(0) = \lim_{n_0 \to \infty} \int_0^{t_{n_0}} e^{-\lambda_i s} \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} u_j^{n_0}(s) ds = \int_0^{t_0} e^{-\lambda i s} \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} u_j^*(s) ds$$

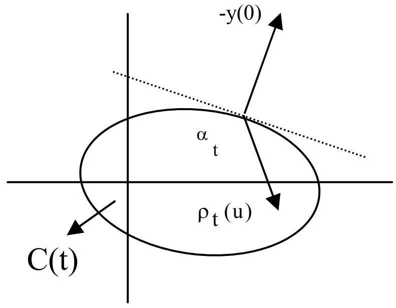
mit einer messbaren Funktion u*(.) und $| u_j^*(.) | \leq 1$.
D.h. es ist $- y(0) \in C(t_0)$ und damit existiert ein „optimales“ t_0 mit zugehörigem u*(.) und $y(t_0) = 0$.

Die notwendigen Bedingungen für das optimale u*(.) ergeben sich aus den folgenden Überlegungen:

Es sei $t<t_0$ und damit

$$- y(0) \notin C(t_0).$$

Wegen der Konvexität und Kompaktheit von C(t) gibt es ein α_t mit



$$(\rho_t u - \alpha_t, \frac{-y(0)-\alpha_t}{\| -y(0)-\alpha_t \|_\infty}) \quad \le \quad (-y(0)-\alpha_t, \frac{-y(0)-\alpha_t}{\| -y(0)-\alpha_t \|_\infty})$$

für jedes u, d.h. es ist

$$(\rho_t u - \alpha_t, \Theta_t) \quad \le \quad (-y(0)-\alpha_t, \Theta_t)$$

für alle zulässigen u und einem Vektor Θ_t der Länge 1 in der Maximum-Norm.
Die letzte Ungleichung ist gleichbedeutend zu

$$(\rho_t u, \Theta_t) \quad \le \quad (-y(0), \Theta_t)$$

für alle zulässigen u.
Für $t \to t_0$ existieren dann Teilfolgen

$$t_n \to t_0, \quad \Theta_{t_n} \to \Theta_{t_0}, \quad \rho_{t_n} u \to \rho_{t_0} u$$

mit der Eigenschaft

$$\lim_{t_n \to t_0} (\rho_{t_n} u, \Theta_{t_n}) = (\rho_{t_0} u, \Theta_{t_0}) \quad \le \quad (-y(0), \Theta_{t_0}).$$

Für u = u* ist aber $\rho_{t_0} u^* = -y(0)$ und somit

$$(\rho_{t_0} u, \Theta_{t_0}) \le (\rho_{t_0} u^*, \Theta_{t_0}) = (-y(0), \Theta_{t_0})$$

für alle u.
D.h. t_0 und u* erfüllen in notwendiger Weise die Bedingung

$$(\rho_{t_0} u^*, \Theta_{t_0}) = \operatorname*{Max}_u (\rho_{t_0} u, \Theta_{t_0}). \qquad (**)$$

Gesucht sind also ein Vektor Θ_{t_0}, ein t_0 und eine meßbare Funktion u* mit der Eigenschaft, das

$$(\rho_{t_0} u^*, \Theta_{t_0}) = \sum_{i=1}^{n} \Theta_{t_{0_i}} \int_0^{t_0} e^{-\lambda_i s} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} u_j^*(s) ds = \sum_{j=1}^{n} \int_0^{t_0} (\sum_{i=1}^{n} \Theta_{t_{0_i}} e^{-\lambda_i s} \alpha_{ij}) u_j^*(s) ds$$

maximal ist. Dieses ist sicherlich dann der Fall, wenn u* in der Form

$$u_j^*(s) = \mathrm{sign}\left(\sum_{i=1}^{n} \Theta_{t_{0i}} \alpha_{ij} e^{-\lambda_i s}\right)$$

gewählt wird.

Die maximale Anzahl der Vorzeichenwechsel ergibt sich daraus, dass die nichttrivialen Linearkombinationen von Exponetialfunktionen $e^{-\lambda_i s}$, mit paarweise verschiedenen λ_i, höchstens n-1 Nullstellen im Intervall $[o,t_0]$ haben.

Bemerkung
Die Bedingung (**) ist eine wichtige und stark verallgemeinerungsfähige Eigenschaft optimaler Steuerungen. Kurz: Eine einfache Version des Maximum-Prinzips von Pontjargin.

§ 6.2 Differentialgleichungen mit Unstetigkeiten. Beispiele

1. <u>Stabilisierung einer beschleunigten Masse</u>
Ein Körper mit der Masse m genüge dem Newton'schen Bewegungsgesetz

$$mx'' = u$$

mit der äußeren Kraft u.
Für den speziellen Fall einer Masse m = 1, der Kraft $u = \varepsilon b$ (mit $\varepsilon = +1$ oder $\varepsilon = -1$) und $b > 0$ ergeben sich die beiden Differentialgleichungen

$$x'' = \varepsilon b.$$

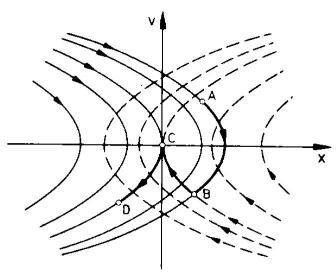
Für das Weitere ist es zweckmäßig die Geschwindigkeiten $x' = v$ in Abhängigkeit vom Ort x zu bestimmen:
Für jede Lösung der Differentialgleichung gilt

$$\frac{d}{dt}\left((1/2)\, x'^2 - \varepsilon bx) \right) = 0$$

und deshalb, mit geeigneten Konstanten C und C', notwendigerweise auch

$$x'^2 - 2\varepsilon bx = C \qquad \text{oder} \qquad v^2 = 2\varepsilon b(x - C')$$

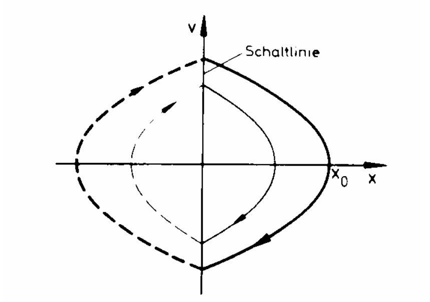
Eine Auswahl dieser Parabeln zeigen die folgenden Bilder (Phasenportraits). Die Richtung der Bewegungsabläufe (x(t), x'(t)) wird durch die Pfeile angezeigt:



Die Frage nach einer Stabilisierung dieses Systems führt sofort zu unstetigen Differentialgleichungen:
Beschränkte Bewegungsabläufe ergeben sich z.B. mit u = - sgn(x)*b. Die Differentialgleichung

$$x'' = -\mathrm{sgn}(x)*b$$

führt zum Phasenportrait



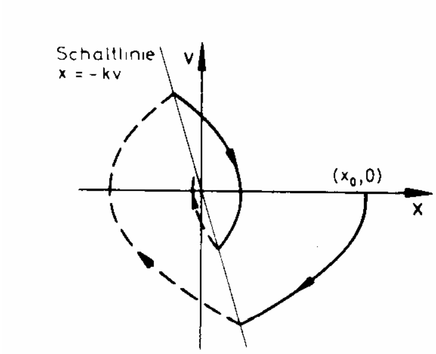
Die oben gewählte Ortsabhängige äußere Kraft u = - sgn(x)*b führt zwar zu beschränkten Bewegungsabläufen aber noch nicht zu solchen Bewegungen die das System stets in die Ruhelage bringen. Letzteres kann z.B. mit der Orts- und Geschwindigkeitsabhängigen Kraft

$$u = -\mathrm{sgn}(x + k^* x')*b, \qquad k > 0$$

erreicht werden. Diese Wahl ergibt dann die Differentialgleichung

$$x'' = -\mathrm{sgn}(x + k^* x')*b$$

mit dem Phasenportrait



Außerhalb der Geraden x +k*x' bewegt sich das System auf den oben angegebenen Parabeln und (klar!) mit zunehmender Zeit gegen den Nullpunkt.
Ist die Gerade x + k*x' sehr „flach“, dann muss der zu erwartender Bewegungsablauf etwas genauer untersucht werden.
Es kann dann passieren, dass sich das System ab einem gewissen Zeitpunkt t_0 entlang der Geraden x + kx' = 0 bewegen muss. Dann muss

$$x(t) = x(t_0)e^{-(t-t_0)/k}.$$

sein.
Soll schließlich das System nicht nur gegen Null streben, sondern den Nullpunkt auch noch möglichst schnell (zeitoptimal) erreichen, dann bietet sich der Übergang von einer Parabel zu einer durch Null gehenden Parabel an. Auch dann entsteht ein System

$$x' = y$$
$$y' = \Psi(x,y)$$

mit einer unstetigen Funktion $\Psi(x,y)$ oder eine unstetige Differentialgleichung.

2. Erzwungene Schwingungen mit trockener Reibung.
Erzwungene Schwingungen mit trockener Reibung führen auf die Differentialgleichung $(D, \omega_0, \mu > 0)$

$$x'' + 2D\,\omega_0\, x' + \mu\, \mathrm{sgn}(x') + \omega_0^2 x = \alpha \cos(\Omega t).$$

Wenn die äußeren Kräfte und die Rückstellkraft die trockene Reibung nicht überwinden können, kann das System zeitweilig ruhen. Orte möglicher Ruhezustände x sind dann

$$-\mu + \alpha\cos(\Omega t) \le \omega_0^2 x \le +\mu + \alpha\cos(\Omega t).$$

Auch hier liegt eine unstetige Differentialgleichung $z' = F(t,z)$ vor:

$$x' = y$$
$$y' = -2D\,\omega_0\, y - \mu\,\mathrm{sgn}(y) - \omega_0^2 x + \alpha\cos(\Omega t).$$

Die unstetige Funktion $F : \mathbf{R}*\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ erfüllt übrigens die Monotoniebedingung

$$(F(t,u) - F(t,v) , \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\omega_0^2 \end{pmatrix} (u - v)) \le 0$$

für alle $t,u,v \in \mathbf{R}$.

Es war eine Idee von A.F. Filippov (1960) unstetige Differentialgleichungen als mehrwertige Differentialgleichungen zu interpretieren. Gegeben sei also jetzt eine (mehrwertige) Differentialgleichung der Form

$$y' \in F(t,y), \qquad y(t_0) = y_0.$$

Dabei sei F eine Abbildung

$$F : \mathbf{R}*\mathbf{R}^n \rightarrow P(\mathbf{R}^n)$$

und $P(\mathbf{R}^n)$ die Menge aller nichtleeren, konvexen und abgeschlossenen Teilmengen aus $\mathbf{R}^n$.

Definition
Eine Funktion $y : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}^n$ heißt Lösung der mehrwertigen Anfangswertaufgabe

$$y' \in F(t,y), \qquad y(t_0) = y_0,$$

sofern

1. $y(t_0) = y_0$
2. $y(.)$ absolut stetig ist und
3. für fast alle t gilt $y'(t) \in F(t,y(t))$.

Definition
Eine Funktion $y : [t_0, \infty) \to \mathbf{R}^n$ heißt absolut stetig, wenn die folgenden Eigenschaften gegeben sind:

1. $y(.)$ ist fast überall differenzierbar,
2. $y'(.)$ ist summierbar und
3. $y(t) = y(t_0) + \int_0^t y'(s)ds$.

Beispiel
Jede stetig differenzierbare Funktion $y(t)$ ist absolut stetig. Aber auch jede Funktion $y : [t_0, \infty) \to \mathbf{R}^n$ mit

$$\| y(t) - y(t') \| \leq K \| t - t' \|$$

hat diese Eigenschaft.

Beispiel
Gegeben sei die (unstetige) Differentialgleichung

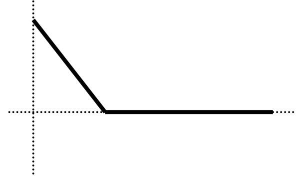
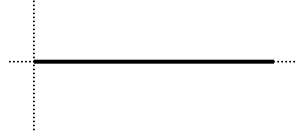
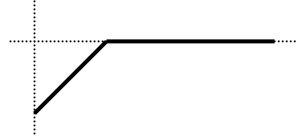
$$y' = -\mathrm{sgn}(y) + \alpha, \quad -1 < \alpha < 1$$

Viele Gründe sprechen dafür, anstatt dieser Aufgabe die folgende mehrwertige Differentialgleichung

$$y' \in F(y) = \begin{cases} \{1+\alpha\} & \text{für} \quad y < 0 \\ [-1+\alpha, 1+\alpha] & \text{für} \quad y = 0 \\ \{-1+\alpha\} & \text{für} \quad y > 0 \end{cases}$$

zu betrachten.

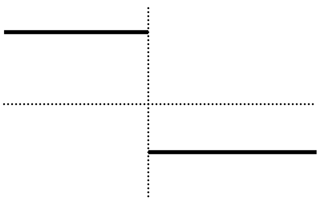
Die folgende Tabelle zeigt die Lösungen der mehrwertigen Differentialgleichung zu verschiedenen Anfangsbedingungen

$y' \in F(t,y), \qquad y(0) = y_0.$		
$y_0 = 1$	$y_0 = 0$	$y_0 = -1$
$1+(-1+\alpha)t$ für $0 \leq t \leq 1/(1-\alpha)$ 0 für $t \geq 1/(1-\alpha)$	$y(t) = 0$ für alle $t \geq 0$	$-1+(1+\alpha)t$ für $0 \leq t \leq 1/(1+\alpha)$ 0 für $t \geq 1/(1+\alpha)$
		

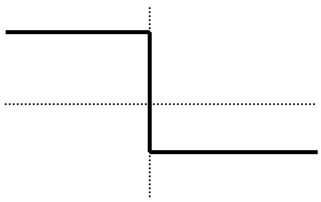
Das die angegebenen Funktionen auch wirklich Lösungen der Anfangswertaufgaben sind, kann schnell eingesehen werden:
Lediglich die Abschnitte mit $y(t) = 0$ sind etwas ungewöhnlich. Für diese gilt aber ($-1 < \alpha < 1$) die Relation

$$y'(t) = y'(0) = 0 \in F(0) = [-1+\alpha, 1+\alpha].$$

Bemerkung
Im Beispiel ist die mehrwertige Differentialgleichung offenbar dadurch entstanden, dass der „Graph" von $-\mathrm{sgn}(y) + \alpha$ „abgeschlossen" wurde.



$$-\mathrm{sgn}(y) + \alpha \rightarrow F(y)$$



Das dieses sehr vernünftig ist zeigt sich daran, das $y(t) = 0$ die Beziehung

$$y' = -\mathrm{sgn}(y) + \alpha$$

nur dann erfüllt, wenn $\mathrm{sgn}(0) = \alpha$ ist. D.h. $\mathrm{sgn}(0)$ muss dem Wert von α angepasst werden. Die Mehrwertigkeit von $\mathrm{sgn}(0)$ erledigt diese Aufgabe von selber.

Satz 6.1 (Existenz- und Eindeutigkeit)
Gegeben sei eine (mehrwertige) Differentialgleichung der Form

$$y' \in F(t,y), \qquad y(t_0) = y_0.$$

Dabei sei

$$F : [t_0, \infty)*\mathbf{R}^n \rightarrow P(\mathbf{R}^n)$$

eine nach oben halbstetige mengenwertige Abbildung in die Menge der nichtleeren, konvexen und abgeschlossenen Teilmengen aus R^n.
Genügt die Abbildung F außerdem noch der Monotonieeigenschaft ($K \in \mathbf{R}$)

$$(\xi - \eta, u - v) \le K(u - v, u - v)$$

für alle $u,v \in \mathbf{R}^n$ und alle $\xi \in F(t,u)$ und $\eta \in F(t,v)$, dann besitzt die Aufgabe eine eindeutig bestimmte Lösung für alle $t \ge t_0$.

Gegeben sei nun die unstetige Differentialgleichung

$$y' = f(t,y)$$

mit einer unstetigen Funktion

$$f: [t_0, \infty)*R^n \rightarrow R^n.$$

Es war ein Vorschlag von A.F. Filippov, durch die Konstruktion

$$F(t,y) = \bigcap_{\delta>0} \bigcap_{\sigma(N)=0} \overline{\text{Konf}(t, U_\delta(y) - N)}$$

diese Aufgabe in eine mehrwertige zu überführen.

Von großer praktischer Bedeutung ist, dass i.a. die Ermittlung von Lösungen von unstetigen Differentialgleichungen ohne eine Überführung in die entsprechende mehrwertige Differentialgleichung möglich sein wird. Differenzenverfahren liefern regelhaft eine Lösung des entsprechenden mehrwertigen Problems.

Satz 6.2 (Taubert/1975)
Die mehrwertige (unstetige) Anfangswertaufgabe genüge den Bedingungen des Existenzsatzes. F sei außerdem lokal beschränkt, d.h. es existiert eine Konstante K, so dass für alle $(t,u) \in [t_0,t_0+T]*\mathbf{R}$ und alle $s \in F(t,u)$ gilt $|s| \leq K$.
Gegeben sei das explizite Euler Verfahren

$$y_{n+1} = y_n + hg_n, \qquad g_{n+i} \in F(t_{n+i}, y_{n+i}).$$

Dann gilt auf jedem kompakten Intervall $[t_0,t_0+T]$

$$\lim_{\substack{h\to 0 \\ n\to\infty \\ t0+nh\to t}} y^h = y(t),$$

d.h., es liegt Konvergenz vor.

Abschließende Bemerkungen
Im Allgemeinen können für die Integration von unstetigen Aufgaben die folgenden Verfahren gewählt werden (ebenfalls Taubert/1975):

1. Explizite RKV.
2. Explizite und stark stabile MSV.

Bei den folgenden Methoden ist Vorsicht geboten:

1. Implizite RKV und stark stabile implizite MSV können verwendet werden, allerdings können die Verfahren bei der Auflösung der impliziten Gleichungen versagen.
2. Extrapolationsverfahren auf der Basis der Mittelpunktformel (nicht stark stabil) sind ungeeignet.
3. Schrittweitensteuerungen können die Integration behindern oder sogar ausschließen.