Theorie und Numerik von Differentialgleichungen
mit
MATLAB und SIMULINK

K. Taubert
Universität Hamburg
SS08

Differentialungleichungen

5 STABILITÄTS- UND DIFFERENTIALUNGLEICHUNGEN

§ 5.1 Einführung

Im zweiten Kapitel wurde gezeigt, dass durch eine Linearisierung Aussagen über das Verhalten von nichtlinearen Differentialgleichungen erzielt werden konnten. Differentialungleichungen sind eine weitere Methode zur Untersuchung nichtlinearer Differentialgleichungen. Differentialungleichungen führen u.a. auf Stabilitätsungleichungen mit denen in einfacher Weise das Verhalten von Lösungen von Differentialgleichungen beschrieben werden kann. Auch in der Numerik spielen die Stabilitätsungleichungen eine wichtige theoretische und praktische Rolle. Durch die Stabilitätsungleichungen werden numerische Verfahren mit besonderen Eigenschaften festgelegt bzw. charakterisiert.
Aus der Sicht der Praxis können mit Differentialungleichungen auch Einschließungen von Lösungen spezieller Typen von Differentialgleichungen erzielt werden. Ein eindrucksvolles Beispiel dafür sind die Zeitlaufanalysen bei der Simulation höchstintegrierter Schaltungen in der CMOS-Technologie.

In diesem Kapitel werden Anfangswertaufgaben

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0 ,$$

mit stetigen Funktionen $f : \mathbf{R}*\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ mit mindestens einer der folgenden Eigenschaften untersucht :

1. f ist Lipschitzstetig

2. f ist einseitig Lipschitzstetig (oder monoton im Sinne von Minty)

3. f ist quasimonoton.

Ein einfacher Satz über skalare Differentialungleichungen wird (normabhängige) Abschätzungen und weitergehende Aussagen (Stabilität, Eindeutigkeit usw.) für die Lösungen der ersten beiden Klassen von Aufgaben liefern. Die dritte Klasse wird zu Einschließungen in jeder Komponente der Differentialgleichung führen

§ 5.2 Hauptsätze

Definition:
Für eine reelle Funktion $u : D \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sei $(D^+u)(x)$ die rechtseitige Ableitung von u an der Stelle x. D.h.

$$D^+u(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}.$$

Beachte: Die Funktion $u(x) = |x|$ hat die rechtseitige Ableitung $D^+u(0) = 1$ ist aber bei Null nicht differenzierbar. Auch die Funktion $u(x) = |\sin(x)|$ ist an den Nullstellen von sin(x) nicht differenzierbar, besitzt aber dort eine rechtseitige Ableitung.

Der folgende Hilfssatz und die anschließenden Beispiele zeigen, welche „verblüffenden" Ergebnisse mit rechtseitigen Ableitungen erzielt werden können:

Hilfssatz
Ist y eine stetig differenzierbare Funktion

$$y : [x_0, x_0+a] \to \mathbf{R}^n,$$

dann existiert $D^+\| y(x) \|$ für jede Vektornorm $\| . \|$ und für alle $x \in [x_0, x_0+a)$. Außerdem gilt

$$D^+ \| y(x) \| \le \| \frac{d}{dx} y(x) \|.$$

Beweis:
Für je zwei Vektoren $y,u \in \mathbf{R}^n$ kann gezeigt werden, dass

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\| y + hu \| - \| y \|}{h}$$

existiert:
Für $0 < \mu \le 1$, $h > 0$, gilt

$$\| y + \mu hu \| - \| \mu y + \mu hu \| \le \| y - \mu y \| = (1-\mu)\| y \|$$

und damit

$$\frac{\| y + \mu hu \| - \| y \|}{\mu h} \le \frac{\| \mu y + \mu hu \| - \mu \| y \|}{\mu h} = \frac{\| y + hu \| - \| y \|}{h}.$$

Der Differenzenquotient

$$\frac{\| y + hu \| - \| y \|}{h}$$

ist mithin monoton fallend in h. Außerdem ist der Quotient durch $-\| u \|$ nach unten beschränkt und damit die erste Behauptung bewiesen.
Damit existiert aber für alle $x \in [x_0, x_0+a)$ auch

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\| y(x) + hy'(x) \| - \| y(x) \|}{h}$$

Wegen

$$\left|\frac{\| y(x+h)\| - \| y(x)\|}{h} - \frac{\| y(x)+hy'(x)\| - \| y(x)\|}{h}\right| =$$

$$= \frac{|\| y(x+h)\| - \| y(x)+hy'(x)\||}{h} \le \frac{\| y(x+h)-y(x)+hy'(x)\|}{h} = o(1)$$

folgt

$$D^+ \| y(x) \| = \lim_{h\to 0^+} \frac{\| y(x)+hy'(x)\| - \| y(x)\|}{h}.$$

Aus dieser Darstellung folgt mit der Dreiecksungleichung, dann auch die gewünschte Ungleichung

$$D^+ \| y(x) \| \le \| \frac{d}{dx} y(x) \|.$$

Beispiele

Es sei $y(.)$ eine differenzierbare Funktion

$$y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$$

und (.,.) das gewöhnliche Skalarprodukt im R^n. Es sei $\| . \|$ eine beliebige Norm, dann ist durch

$$x \to (1/2)\| y(x) \|^2$$

eine Abbildung von **R** in **R** gegeben und wir können danach fragen, ob die rechtseitige Ableitung dieser Funktion existiert. Dieses ist allgemein richtig. Für drei wichtige Fälle soll noch eine Darstellung der rechtseitigen Ableitung angegeben werden:

1. Es sei $\| x \|_2$ die euklidische Norm, d.h. $\| x \|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \Lambda + x_n^2}$, dann gilt

$$D^+(1/2)\| y(x) \|_2^2 = \frac{d}{dx}(1/2)\| y(x) \|_2^2 = (y'(x),y(x)).$$

   Um eine einheitliche Schreibweise zu erhalten, schreiben wir das Skalarprodukt $(y'(x),y(x))$ in der Form $(y'(x), l_2\, y(x))$.

2. Es sei $\| x \|_\infty$ die Maximum Norm, d.h. $\| x \|_\infty = \operatorname{Max}_i | x_i |$, dann gilt

$$D^+(1/2)\| y(x) \|_\infty^2 = (y'(x), l_\infty^+ y(x))$$

   Dabei ist $l_\infty : \mathbf{R}^n \to P(\mathbf{R}^n)$ eine so genannte Dualitätsabbildung:
   Ist x_i die einzige Komponente von x mit $\| x \|_\infty = | x_i |$, dann ist

$$l_\infty(x) = (0,0,\ldots,\mathrm{sign}(x_i),0,\ldots,0)\, \| x \|_\infty .$$

   Hat x mehrere Komponenten x_j mit $\| x \|_\infty = | x_i |$, dann ist $l_\infty(x)$ die Menge aller Konvexkombinationen der Vektoren $(0,0,\ldots,\mathrm{sign}(x_j),0,\ldots,0)\ \| x \|_\infty$. Die obige Schreibweise $(y'(x), l_\infty^+(y(x))$ heißt dann, dass im mehrwertigen Fall eine geeignete Auswahl getroffen werden muss.

3. Es sei $\| x \|_1$ die 1-Norm, d.h. $\| x \|_1 = \sum_{i=1}^{n} | x_i |$ dann gilt

$$D^+(1/2)\| y(x) \|_1^2 = (y'(x), l_1(y(x))$$

Dabei ist l_1: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ von der Form

$$l_1(x) = (\mathrm{sign}(x_1),\mathrm{sign}(x_2), \ldots ,\mathrm{sign}(x_n))\| x \|_1.$$

Hauptsatz 5.1
Es sei $\omega(x,u)$ eine stetige und reellwertige Funktion auf einer offenen und zusammenhängenden Menge $\Omega \subset \mathbf{R}^2$.
Die Anfangswertaufgabe

$$u' = \omega(x,u), \qquad u(x_0) = u_0$$

habe eine eindeutige Lösung u(.) auf dem Intervall $I = [x_0,x_0+a]$.
Erfüllt die stetige Funktion $v : I \to \mathbf{R}$ für alle $x \in [x_0,x_0+a)$ die Beziehung

$$D^+v(x) \le \omega(x,v(x)) \quad \text{und} \quad v(x_0) \le u_0,$$

dann gilt

$$v(x) \le u(x) \quad \text{für alle} \quad x \in [x_0,x_0+a].$$

Beweis:
Wir führen den Beweis unter der stärkeren Annahme, dass

$$D^+v(x) < \omega(x,v(x))$$

für alle $x \in [x_0,x_0+a)$ erfüllt ist.
Angenommen die Behauptung des Satzes ist nicht richtig, dann existieren $x_1,x_2 \in I$ mit

$$v(x) > u(x) \text{ für } x_1 < x \le x_2 \text{ und } v(x_1) = u(x_1).$$

Dann folgt aus $v(x) – v_1(x_1) > u(x) – u(x_1)$ der Widerspruch

$$D^+v(x_1) \ge u'(x_1) = \omega(x_1,v(x_1)).$$

Bemerkung
Es lohnt sich vielleicht noch einmal den Inhalt des Satzes zu betonen. Findet man zu einer gegebenen Anfangwertaufgabe eine Funktion, welche die zugehörige Differentialungleichung erfüllt, dann ist diese Funktion eine untere Schranke für die Lösung der Anfangswertaufgabe. Leider gilt dieser schöne und folgenschwere Satz i.a. nicht für Systeme von Differentialgleichungen.

Wird die Klasse der Differentialgleichungen auf die Klasse der quasimonotonen Aufgaben eingeschränkt, kann ein entsprechender Satz bewiesen werden.

Definition
Es sei f eine stetige Abbildung

$$f : \mathbf{R}^*\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n.$$

Die Funktion $f(x,y)$ heißt quasimonoton in y, wenn für $k = 1,\dots, n$

$$f_k(x,u) \le f_k(x,v) \quad \text{für alle} \quad u \le v \quad u_k = v_k$$

ist.

Hauptsatz 5.2
Das System von Anfangswertaufgaben

$$y' = f(x,y)$$
$$y(x_0) = y_0$$

mit quasimonotonen f habe eine eindeutige Lösung $y(.)$ auf dem Intervall $I = [x_0,x_0+a]$.
Erfüllt die stetig differenzierbare Funktion $v : I \to \mathbf{R}^n$ mit $v(x_0) \le y_0$ [$v(x_0) \ge y_0$] für alle $x \in [x_0,x_0+a)$ die Beziehung

$$v'(x) \le f(x,v(x)) \qquad [v'(x) \ge f(x,v(x))],$$

dann gilt

$$v(x) \le u(x) \qquad [v(x) \ge u(x)] \qquad \text{für alle} \quad x \in [x_0,x_0+a].$$

Dieser auf Kamke (1932) zurückgehende Satz ist vielfach verallgemeinert und abgeschwächt worden. Hier soll nicht darauf eingegangen werden.

§ 5.3 Abschätzungen

Mit den Sätzen und Definitionen aus dem vorangegangenen Abschnitt können sehr einfach Abschätzungen für Lösungen von Differentialgleichungen gewonnen werden. Veränderungen der Lösungen bei Veränderung der Eingangsdaten können abgeschätzt, Aussagen zur asymptotischen Stabilität ohne Linearisierung ermittelt und in einfacher Art Eindeutigkeitsaussagen erzielt werden.
Nicht behandeln werden wir, dass auch globale Existenzsätze mit den obigen Hauptsätzen erzielt werden können.

1. Fall (Lipschitz)

Gegeben seien die beiden Anfangswertaufgaben

$$u' = f(x,u) + a_1, \quad u(x_0) = u_0$$
$$v' = f(x,v) + a_2, \quad v(x_0) = v_0.$$

Dabei seien a_1, a_2 beliebige konstante Vektoren aus $\mathbf{R}^n$, u_0, v_0 beliebige vorgegebene Anfangsbedingungen aus $\mathbf{R}^n$ und

$$f : [x_0,x_0+a] * \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n \text{ eine (Lipschitz-) stetige Funktion, d.h.}$$

$$\| f(x,z) - f(x,w) \| \le K \| z-w \| \quad \text{für alle} \quad x,z,w \quad \text{und einem } K>0.$$

Sind $u(.)$ und $v(.)$ Lösungen der jeweiligen Differentialgleichungen, dann gilt für alle $x \in [x_0,x_0+a)$

$$D^{+}\| u(x)-v(x) \| \leq \| u'(x)- v'(x) \| \leq K\| u(x)-v(x) \| + \| a_1-a_2 \|$$

$$\| u(x_0)-v(x_0) \| = \| u_0-v_0 \|.$$

Aus dem Hauptsatz 5.1 folgt dann, dass die Differenz der Lösungen durch die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = Ky + \| a_1-a_2 \|, \qquad y(x_0) = \| u_0-v_0 \|$$

majorisiert wird. Es gilt also

$$\| u(x)-v(x) \| \leq y(x_0)\, e^{K(x-x_0)} + (\| a_1-a_2 \|/K)(e^{K(x-x_0)} -1)$$

für alle $x \in [x_0,x_0+a)$.

2. Fall (Monotonie)

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = f(x,y) ,$$

Die Funktion f sei jetzt verallgemeinert Mintymonoton, d.h. es gelte

$$(f(x,z)-f(x,w), l_\alpha (z-w)) \leq K \|z-w\|_\alpha^2 \quad \text{für alle } x,z,w \text{ und ein } K\in \mathbf{R}$$

mit irgendeiner Dualitätsabbildung l_α mit $\alpha = 1,2$ oder ∞.

Beispiele

1. Ist $f: \mathbf{R}*\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ in y monoton fallend, dann gilt für jede Dualitätsabbildung

$$(f(x,z)-f(x,w), l_\alpha (z-w)) \leq 0.$$

2. Die folgenden 2*2 Matrizen oder $f(x,u) = A_i u$ führen auf Ungleichungen mit negativem K. Es seien

$$A_1 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad A_\infty = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

dann gilt

$$(A_1u, l_1 (u)) \leq -\|u\|_1^2 , \qquad (A_2u, l_2 (u)) \leq -\|u\|_2^2 , \qquad (A_\infty u, \lambda_\infty u) \leq - \|u\|_\infty^2 .$$

3. Es seien $g_i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, i=1,2,3 stetige monoton wachsende Funktionen mit $g_i(0) = 0$ und

$$f(y) = \begin{pmatrix} g_1(-y_1)-g_2(y_1-y_2) \\ g_2(y_1-y_2)-g_3(y_2-5) \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $(f(u)-f(v), l_\alpha (u-v)) \leq 0$ für $\alpha = 1,\infty$. Gilt noch $g_i(u) = -g_i(-u)$ dann gilt außerdem $(f(u)-f(v), l_\alpha (u-v)) \leq 0$ für $\alpha = 2$.

Gegeben seien jetzt die beiden Anfangswertaufgaben mit der Minty-Monotonen Funktion f

$$\begin{array}{ccc} u' = f(x,u) & \text{und} & v' = f(x,v) \\ u(x_0) = u_0 & & v(x_0) = v_0. \end{array}$$

Sind u(.) und v(.) Lösungen der oben angegebenen Differentialgleichungen, dann gelten für alle $x \in [x_0,x_0+a)$

$$D^+(1/2)\| u(x)-v(x) \|_\alpha^2 \le K\| u(x)-v(x) \|_\alpha^2$$
$$\| u(x_0)-v(x_0) \|_\alpha^2 = \| u_0-v_0 \|_\alpha^2 .$$

Mit dem Hauptsatz 5.1 kann das Quadrat der Differenz durch die Lösung der Anfangswert-aufgabe

$$y' = 2Ky \qquad y(x_0) = \| u_0-v_0 \|_\alpha^2$$

majorisiert werden. Es gilt also

$$\| u(x)-v(x) \|_\alpha \le y(x_0)\, e^{K(x-x_0)}$$

Man beachte jetzt, dass K negativ sein kann (!) und mithin die Differenz für zunehmendes x kleiner wird.
Der aufmerksame Leser mag sich gewundert haben, dass nicht gleich der Fall der beiden Anfangswertaufgaben

$$u' = f(x,u)+a_1 \quad \text{und} \quad v' = f(x,v)+a_2$$
$$u(x_0) = u_0 \qquad\qquad v(x_0) = v_0$$

behandelt wurde. Die obige Vorgehensweise würde durch das Auftreten der Quadrate zu einer unangemessene Abschätzung führen. Leicht lässt sich allerdings nachrechnen (Führen Sie es durch!), dass auch hier eine Abschätzung der Form

$$D^+\| u(x)-v(x) \|_\alpha \le K\| u(x)-v(x) \|_\alpha + \| a_1-a_2 \|_\alpha$$

$$\| u(x_0)-v(x_0) \|_\alpha = \| u_0-v_0 \|_\alpha .$$

möglich ist.
Der Hauptsatz 2.1 liefert das erwartete Ergebnis

$$\| u(x)-v(x) \|_\alpha \le y(x_0)\, e^{K(x-x_0)} + (\| a_1-a_2 \|_\alpha /K)(e^{K(x-x_0)} -1)$$

für alle $x \in [x_0,x_0+a)$.

3. Fall (Quasimonoton)

Dieser Fall ist bereits durch den Satz 2.2 erledigt und soll nicht noch mal wiederholt werden.

4. Fall (Ein weiterer Fall)

Eine sehr bekannte und alte Methode zur globalen Untersuchung von Differentialgleichungen ist die Methode von Ljapunov. Bei dieser Methode wird für eine Differentialgleichung

$$y' = f(x,y)$$

eine Funktion $V : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ gesucht und für Lösungen y(.) der Differentialgleichung der Ausdruck

$$\frac{d}{dx}(V(y(x)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_i} y_i'(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_i} f_i(x, y_i(x))$$

betrachtet. Dann wird verlangt

$$\frac{d}{dx}(V(y(x)) \le 0.$$

Der Hauptsatz 5.1 liefert dann

$$V(y(x)) \le V(y(x_0)) \quad \text{für alle zulässigen } x > x_0.$$

Mit weiteren Forderungen an V kann mithin die Beschränktheit von y(x), deren Existenz und sogar die asymptotische Stabilität nachgewiesen werden. Im konkreten Fall kann es einfach sein (Physik), eine solche Funktion V zu finden. Es gibt allerdings keine Regeln zur Konstruktion von V.

§ 5.4 Stabilitätsungleichungen

Gegeben sei erneut die Anfangswertaufgabe

$$y' = f(x,y)$$
$$y(x_0) = y_0$$

mit einer stetigen Funktion $f : \mathbf{R}*\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ und einer vorgegebenen Anfangsbedingung y_0 an der Stelle x_0.
Anstatt der Differentialgleichung mit seiner Anfangsbedingung werden jetzt der Operator $(L,R) : C^1[x_0,x_0+a] \to (C\,[x_0,x_0+a],R^n)$

$$L(y)(x) = y'(x) - f(x,y(x))$$
$$R(y) = y(x_0)$$

betrachtet.
Jede Funktion y erfüllt dann die Anfangswertaufgabe

$$L(y)(x) = y'(x) - f(x,y(x)) = r(x)$$
$$R(y) = y(x_0)$$

mit einer von y abhängigen stetigen Funktion r. Ist f eine Lipschitzstetige Funktion, d.h.

$$\| f(x,u) - f(x,v) \| \le K \| u-v \| \quad \text{für alle } x,u,v \text{ und einem } K>0$$

dann gilt für die Differenz zweier Funktionen z und w aus $C^1[x_0,x_0+a]$ offensichtlich (§5.2) die Abschätzung

$$||| z-w ||| \le M(||| Lz - Lw ||| + \| Rz - Rw \|)$$

mit $||| u ||| = \max_{x \in [x_0, x_0+a]} \| u(x) \|$ und einem geeigneten $M \ge 0$.

D.h. „die Ursache z-w kann über die Auswirkungen Lz- Lw und Rz –Rw abgeschätzt werden". Ein wichtiges und praktisches Konzept (!). Man spricht von einer Stabilitätsungleichung.

Aus der Stabilitätsungleichung folgt sofort die eindeutige Lösbarkeit der Anfangswertaufgabe

$$y' = f(x,y)$$
$$y(x_0) = y_0$$

und es wird auch die Frage beantwortet, wie sich die Lösung bei Änderungen von f und y_0 verhält. Es ist bemerkenswert, dass aus einer Stabilitätsungleichung gelegentlich auch die Existenz einer Lösung folgen kann.

Ist f eine einseitig Lipschitzstetige Funktion, d.h.

$$(f(x,z)-f(x,w), l_\alpha (z-w)) \;\leq\; K \,\|z-w\|_\alpha^2 \quad \text{für alle} \;\; x,z,w \;\; \text{und ein} \;\; K \in R,$$

dann kann wie oben eine Stabilitätsungleichung

$$\| u(x)-v(x) \|_\alpha \;\leq\; \| Ru-Rv \| \, e^{K(x-x_0)} + (\||\, Lu-Lv \,|\|_\alpha)((1 - e^{K(x-x_0)})/K)$$

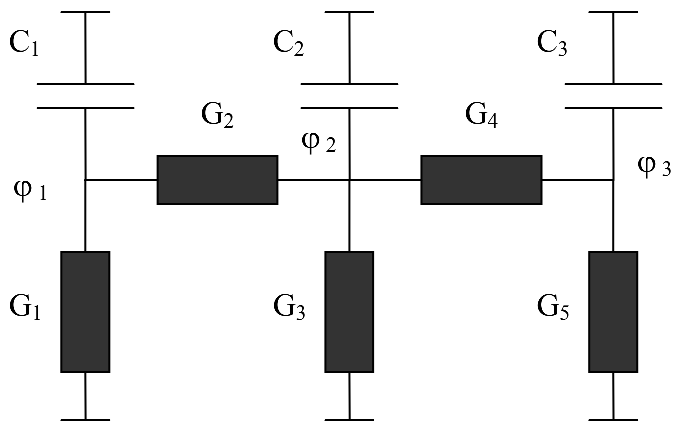
nachgewiesen werden.
Wird (L,R) nur auf der Klasse $V \subset C^1[x_0,x_0+a]$ der Lösungen von $y'=f(x,y)$ definiert, dann gilt sogar

$$\| u(x)-v(x) \|_\alpha \;\leq\; \| Ru-Rw \| \, e^{K(x-x_0)}.$$

Eine nicht unwesentliche Bedeutung haben die Stabilitätsungleichungen auch bei der Auswahl, Untersuchung und Klassifikation von numerischen Verfahren. Im Allgemeinen werden nur solche Verfahren für eine Klasse von Aufgaben vernünftig sein, wenn diese eine - der kontinuierlichen Stabilitätsungleichung - entsprechende Stabilitätsungleichung erfüllen (!)

§ 5.5 Ein Beispiel

Das passive elektrische Netzwerk



mit den linearen (positiven) Leitwerten G_i und den linearen (positiven) Kapazitäten C_i führt auf das folgende System von Differentialgleichungen für die Potentiale φ_i

$$\begin{pmatrix} C_1\varphi_1' \\ C_2\varphi_2' \\ C_3\varphi_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -G_1 - G_2 & G_2 & 0 \\ G_2 & -G_3 - G_2 - G_4 & G_4 \\ 0 & G_4 & -G_4 - G_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}$$

oder kurz

$$\frac{d\Phi}{dt} = A\Phi, \qquad \Phi(t_0) = \Phi_0 .$$

Mit der Maximum-Norm gilt

$$(Au, l_\infty(u)) \leq \text{ Max } (-G_1/C_1,-G_3/C_3,-G_5/C_5) \, \| u \|_\infty^2 = K \, \| u \|_\infty^2$$

mit einem negativen K und damit

$$\| \Phi(t) \|_\infty \leq \| \Phi(t_0) \|_\infty \, e^{K(t-t_0)}$$

d.h. die triviale Lösung ist asymptotisch stabil.

Laufzeitanalysen

Laufzeitanalysen gehören zum Standart der Simulationsaufgaben beim Entwurf von VLSI-Schaltungen. Verbindungen, Gatter und sonstige Module eines Chips führen zu Signalverzögerungen die vor einem Fertigungsprozess verifiziert werden müssen. In der CMOS-Technologie werden diese Laufzeiten mit RC-Gliedern modelliert.
Es entstehen große (10-10.000) Systeme von Anfangswertaufgaben, welche möglichst schnell in ausreichender Genauigkeit und ohne Überfluss an Information gelöst werden müssen. Bewährt haben sich Methoden auf der Basis von Differentialungleichungen.

Bei den Zeitlaufanalysen wird die Sprungantwort eines RC-Netzes mit Baumstruktur gesucht.

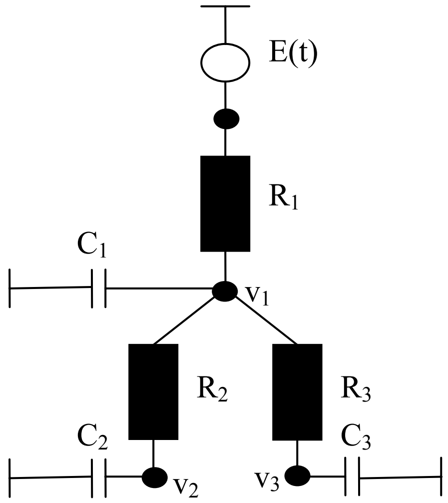
Die Sprungantwort ergibt sich durch die Knotenspannungsanalyse, als Lösung eines Systems von linearen Anfangswertaufgaben der Form

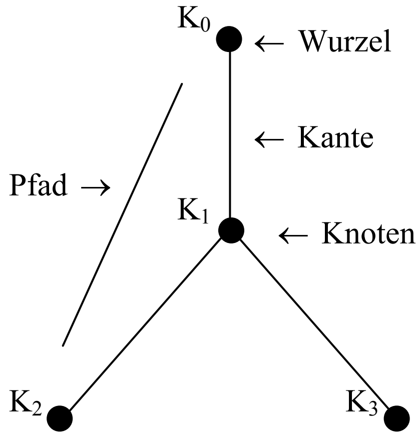
$$C\,y' + Mu = (G_1,0,\ldots,0)^T$$
$$u(0) = 0$$

mit den gesuchten Potentialen $u = (u_1,u_2,\ldots,u_n)$, einer Diagonalen Kapazitätsmatrix C, der Leitwertmatrix M und einem hier als Eins angenommenen Leitwert G_1.

Das folgende einfache Beispiel macht die Methode zur Laufzeitanalyse klar:

Ein Leitungsnetz werde durch einen RC-Baum mit den Knoten K_0, K_1, K_2, K_3 modelliert. Dabei sei K_0 der Eingangsknoten des Baumes mit der Spannungsquelle $u_0(.)$





Gesucht sind die Potentiale $u = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$ an den Knoten K_1, K_2, K_3 unter den Annahmen

$$u_1(0) = u_2(0) = u_3(0) = 0$$

und $u_0(t) = 1$, $t \geq 0$, $R_1 = 1$.
Die Knotenspannungsanalyse führt zu den Gleichungen

$$\begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_1 + G_2 + G_3 & -G_2 & -G_3 \\ -G_2 & G_2 & 0 \\ -G_3 & 0 & G_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_2 \end{pmatrix} = G_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

oder mit $G = 1/R$

$$\begin{pmatrix} R_1 & R_1 & R_1 \\ R_1 & R_1 + R_2 & R_1 \\ R_1 & R_1 & R_1 + R_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_2 \end{pmatrix} = G_1\begin{pmatrix} R_1 \\ R_1 \\ R_1 \end{pmatrix}$$

Die Einträge der Leitwertmatrix M können durch einfache Inspektion ermittelt werden. Dasselbe gilt (allerdings weniger bekannt) auch für die Widerstandsmatrix M^{-1}: Ist $M^{-1} = (b_{ij})$ dann ergibt sich b_{ij} durch:

„b_{ij} ist die Summe der Widerstände auf dem gemeinsamen Pfad der Pfade vom Knoten i und j zur Wurzel“. Damit ist z.B. $b_{12} = R_1$ und $b_{33} = R_1 + R_3$.

Zu beachten ist, dass $u(t) = -1|$ eine spezielle Lösung der Differentialgleichung ist. Dabei ist $-1|$ der Vektor mit den Komponenten -1.
Um Näherungslösungen für die gesuchte Sprungantwort zu ermitteln, ist es zweckmäßig, die beiden transformierten Anfangswertaufgaben ($u \to u-1|$)

$$y' = -C^{-1}Mu$$
$$u(0) = -1|$$

$$M^{-1}C\, y' + u = 0$$
$$u(0) = -1|$$

zu untersuchen.
Wichtig ist nun, dass $-C^{-1}M$ eine quasimonotone Funktion und $M^{-1}C$ eine positive Matrix ist.

Die Matrix $-C^{-1}M$ hat nur negative Eigenwerte. Der größte Eigenwert μ von $-C^{-1}M$ wird zweckmäßig über den größten Eigenwert $|1/\mu|$ von $M^{-1}C$ ermittelt. Da $M^{-1}C$ nur positive Einträge hat, gehört zu $|1/\mu|$ ein positiver Eigenvektor E_μ. Damit ist

$$\varphi_\mu^\alpha(t) = \alpha E_\mu e^{\mu t}$$

für jedes α aus R eine Lösung der Differentialgleichung.
Der Koeffizient α wird dann so gewählt, dass

$$\varphi_\mu^\alpha(0) \le -1| \qquad \text{bzw.} \qquad \varphi_\mu^\alpha(0) \ge -1|\,.$$

Der Hauptsatz.5.2 liefert also mit geeignetem α eine untere bzw. obere Schranke der Lösung der Anfangswertaufgabe. Die Praxis zeigt, dass diese Schranken (mit realistischen Daten) i.a. zu ausgezeichneten Resultaten führen.