Theorie und Numerik von Differentialgleichungen
mit
MATLAB und SIMULINK

K. Taubert
Universität Hamburg
SS08

Simulink

1 SIMULINK UND DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Es wird zunächst die Laplace-Transformation eingeführt und an einfachen Beispielen erläutert.
Im Zusammenhang mit linearen Differentialgleichungen führt die Laplace-Transformation auf Übertragungsglieder und damit auf unverzichtbare Bestandteile der SIMULINK-Bibliothek. Schließlich werden noch einige einführende Bemerkungen zum Programm SIMULINK gemacht.

§1.1 Die Laplace-Transformation

Die Laplace-Transformation ist eine Integraltransformation und unerlässlich für das Verständnis vieler SIMULINK-Modelle. Obwohl die Laplace-Transformation einen mathematisch durchaus anspruchsvollen Hintergrund hat, ist das Arbeiten mit dieser Transformation überwiegend simpel, bequem und liefert nebenbei auch viele nützliche Informationen.
Gegeben sei die Menge der auf jedem endlichen Intervall (Lebesgue-) summierbaren Funktionen [2]

$$y : \mathbf{R} \;\to\; \mathbf{R} \text{ oder } \mathbf{C}.$$

Dann heißt

$$L(y)(s) \;=\; \int_0^\infty y(t)e^{-st}dt \;\;.=\;\; \lim_{a\to\infty} \int_0^a y(t)e^{-st}dt$$

das Laplace-Integral zu y mit dem Parameter $s \in \mathbf{C}$.

Beispiel (Sprung- oder Heavisidefunktion)
Es sei

$$y(t) = H(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t = 0 \\ 1 & \text{für} \quad t > 0. \end{cases}$$

Dann ist

$$\int_0^a y(t)e^{-st}dt \;=\; \int_0^a e^{-st}dt \;=\; (1/s)(1\text{-}e^{-sa})$$

Dieser Ausdruck hat für $a \to \infty$ dann und nur dann einen Grenzwert, wenn der Realteil von größer als Null ist. Damit ist dann

$$L(y)(s) \;=\; 1/s, \quad \mathrm{Re}\, s > 0.$$

Beispiel (Exponentialfunktion)
Für die Funktion

$$y(t) = \exp(\alpha t) \quad \text{mit } \alpha \in \mathbf{R} \text{ und } t \geq 0$$

ergibt sich

$$L(y)(s) \;=\; \lim_{a\to\infty} \int_0^a e^{\alpha t} e^{-st} dt \;=\; 1/(s-\alpha), \quad \mathrm{Re}\, s > \alpha.$$

Die bisherigen Beispiele zeigten, dass das Laplace-Integral einer Funktion y, für alle s aus passenden Halbebenen von **C,** existiert. Allgemein gilt der

Satz
Es gibt eine bestimmte reelle Zahl β so, dass der Ausdruck

$$L(y)(s) = \lim_{a\to\infty} \int_0^a y(t) e^{-st} dt$$

existiert für $\mathrm{Re} s > \beta$ und nicht existiert für $\mathrm{Re} s < \beta$. Hierbei sind die Werte $\beta = +\infty$ und $-\infty$ zugelassen.

Existiert das Laplace-Integral für eine Funktion y in einer Halbebene, dann wird dadurch eine Funktion Y = L(y) auf dieser Halbebene definiert. Es liegt also eine Transformation vor, welche die (Original-) Funktion y in die (Bild-) Funktion Y überführt, nämlich:

$$L(y) = Y.$$

Beruhigend ist noch der folgende Eindeutigkeitssatz:

Satz (Eindeutigkeit)
Stimmen die zu zwei Originalfunktionen gehörigen Bildfunktionen überein (in einer rechten Halbebene), so unterscheiden sich die Originalfunktionen höchstens auf einer Menge vom (Lebesgue-) Maß Null.

Bemerkung
In den Anwendungen wird die Frage nach der Existenz des Laplace-Integrals meistens und zunächst unberücksichtigt gelassen und lediglich Tabellen und Rechenregeln benutzt. So erzielte Resultate müssten dann allerdings überprüft werden.

§1.2 Einige Rechenregeln

Die Laplace-Transformation ist zunächst einmal eine lineare Transformation, d.h. es gilt

$$L(ay_1 + by_2) = aL(y_1) + bL(y_2)$$

für alle a,b $\in$ **R** und zwar auf dem Durchschnitt der Konvergenzhalbebenen von y_1 und y_2.

Ist die Laplace-Transformation einer Funktion y bekannt, oder kann diese als bekannt vorausgesetzt werden, dann kann auch die Laplace-Tranformierte einiger mit y zusammenhängender Funktionen leicht ermittelt werden. Beispiele hierfür liefern z.B. der Differentiation- und der Integrationsatz

Satz (Differentiationsatz)
Es sei $y : [0,\infty) \to \mathbf{R}$ eine für $t > 0$ differenzierbare Funktion mit $y(t) = o(\exp(\beta t))$ für $t \to \infty$ und $\beta > 0$.
Die Laplace-Transformierte $L(y')$ von y' existiere für $\operatorname{Re} s > \beta > 0$. Dann existiert der Grenzwert

$$\lim_{t\to 0^+} y(t) = y(0^+)$$

und es ist

$$L(y') = sL(y) - y(0^+), \quad \operatorname{Re} s > \beta > 0.$$

Beweis
Da die Laplace- Transformation von y' existiert, muss z.B. auch Integral von 0 bis 1 von y' existieren. Es ist aber

$$\int_0^1 y(t)'dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 y(t)'dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+} (y(1) - y(\varepsilon)) = y(1) - \lim_{\varepsilon\to 0^+} y(\varepsilon)$$

womit auch $y(0^+)$ existiert.
Partielle Integration liefert dann

$$\int_0^\infty y(t)'e^{-st}dt = -y(0^+) + s\int_0^\infty y(t)e^{-st}dt$$

oder

$$L(y') = s\,L(y) - y(0^+), \quad \operatorname{Re} s > \beta > 0.$$

Bemerkung
Wichtig (nicht nur für die Anwendungen) ist noch die folgende Verallgemeinerung des Differentiationsatzes
Ist y nicht differenzierbar für $t > 0$, aber von der Form

$$y(t) = y(0^+) + \int_0^t y(t)^{[1]}dt \ ,$$

dann gilt (unter ähnlichen Voraussetzungen wie oben)

$$L(y(t)^{[1]}) = s\,L(y) - y(0^+)$$

Bemerkung
Eine sukzessive Anwendung des Differentiationssatzes ergibt übrigens

$$L(y^{(n)}) = s^n L(y) - \sum_{\nu=0}^{n-1} s^{n-1-\nu} y^{(\nu)}(0^+)$$

Satz (Integrationssatz)
Es sei $y : [0,\infty) \to \mathbf{R}$ eine auf jedem endlichen Intervall summierbare Funktion mit $y(t) = o(\exp(\beta t))$ für $t \to \infty$ und $\beta > 0$. Die Laplace-Transfomation von y sei L(y) für Re $s > \beta$.
Es sei

$$u(t) = \int_0^t y(\tau)d\tau$$

Dann existiert auch L(u) für Re $s > \beta$ und es ist

$$L(u) = (1/s)L(y).$$

Beweis
Wir benutzen die obige Bemerkung und erhalten damit

$$L(y) = sL(u) \quad \Leftrightarrow \quad L(u) = (1/s)L(y).$$

Bemerkung (Faltung)
Es seien y_1 und y_2 zwei auf endlichen Intervallen summierbare Funktionen $y_i : [0,\infty) \to \mathbf{R}$ und

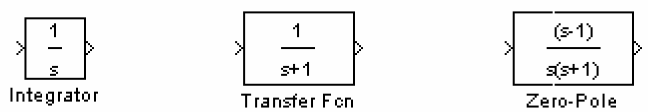
$$(y_1 * y_2)(t) = \Psi(t) = \int_0^t y_1(t-\tau)y_2(\tau)d\tau$$

dann heißt $\Psi(t)$ die Faltung von y_1 mit y_2.
Unter sehr allgemeinen Voraussetzungen [1] gilt die - auf den ersten Blick - erstaunliche Beziehung

$$L(y_1)L(y_2) = L(y_1 * y_2).$$

§1.3 Einige SIMULINK-Bibliothekselemente

Die Laplace-Transformation führt unmittelbar zum Verständnis der Funktionalität einiger Elemente oder Übertragungsglieder aus der SIMULINK-Bibliothek, wie z.B.:



<u>Der Integrator</u>

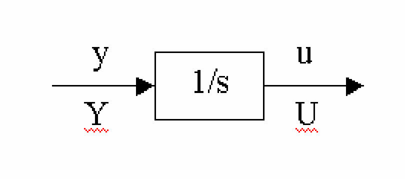
Bei einer Relation zwischen u und y der Form

$$u(t) = \int_0^t y(\tau)d\tau$$

führte die Laplace-Transformation auf

$$L(u) = (1/s)L(y).$$

Symbolisch kann also die Integration von y durch



ausgedrückt werden.
Ein Kontextmenü zum Integrator (Doppellinksklick) gestattet in SIMULINK übrigens auch die Berücksichtigung von nichttrivialen Anfangswerten u(0).

<u>Das PT1-Glied</u> (Transfer Fcn)
Gegeben sei die Differentialgleichung (T,k > 0)

$$Ty' + y = ku, \quad y(0) = 0,$$

für $t \geq 0$ mit einer geeigneten Funktion $u : [0,\infty) \rightarrow \mathbf{R}$.
Eine formale Anwendung der Laplace-Transformation und deren Rechenregeln liefern

$$TL(y') + L(y) = kL(u)$$

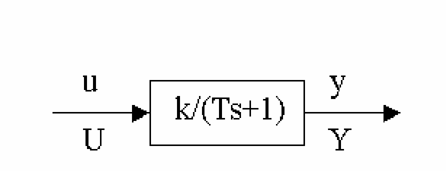
bzw.

$$T(sL(y) - y(0^+)) + L(y) = kL(u)$$

oder

$$L(y) = (1/(Ts + 1))kL(u).$$

Dieser Zusammenhang zwischen der Eingabe u und der Lösung y wird symbolisch durch



ausgedrückt.
Ein zugehöriges Kontextmenü in SIMULINK erlaubt auch hier die Festlegung der Koeffizienten k und T und außerdem noch die Eingabe von anderen Anfangsbedingungen.

Bemerkung
Mit der Sprung- oder Heaviside-Funktion u(t) = H(t) ergibt sich übrigens

$$L(y) = (1/(Ts+1))(k/s) =. L(y_1)L(y_2) = L(\frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}) L(kH(t))$$

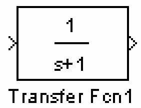
und der Faltungssatz liefert die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$Ty' + y = kH(t), \quad y(0) = 0,$$

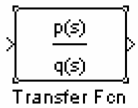
$$y(t) = \int_0^t \frac{1}{T} e^{-\frac{t-\tau}{T}} kH(\tau)d\tau$$

Allgemeinere Übertragungsglieder

Es wurde bereits oben erwähnt, dass zum Übertragungsglied

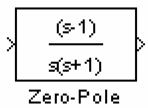


ein Kontextmenü gehört. Dieses Menü gestattet es auch, das Übertragungsglied in die Form



mit Polynomen p, q (Grad p < Grad q) zu überführen.
Die Eingabe p : [a b c d] führt dann z.B. zum Polynom $p = as^3+bs^2+cs+d$

Beim Übertragungsglied (Zero-Pole)



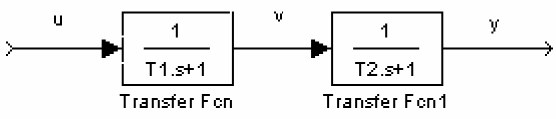
können dann entsprechend die Nullstellen von p oder die Pole von 1/q vorgegeben werden.

§1.4 Beispiele

Mit den vorangegangenen Blöcken können nun schon lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten in SIMULINK-Modelle überführt werden. Aber auch entsprechende SIMULINK-Modelle können schnell in die zugehörigen Gleichungen im Zeitraum umgeschrieben werden.

Beispiel 1

Das Modell



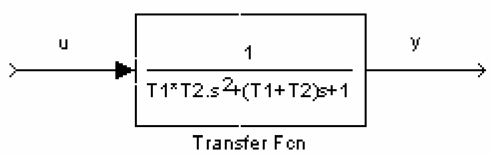
(mit den kanonischen Anfangsbedingungen) führt zum System von Differentialgleichungen

$$T_1v' + v = u, \quad v(0) = 0$$
$$T_2y' + y = v, \quad y(0) = 0.$$

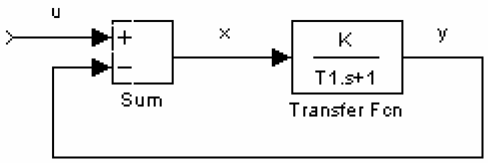
Eine Differentiation der zweiten Gleichung, eine anschließende Multiplikation mit T_1 und die Addition zur ersten Gleichung liefert dann

$$T_1T_2y'' + (T_1+T_2)y' + y = u, \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

oder



Beispiel 2
Zum einfach rückgekoppelten System



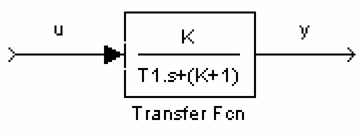
gehört die Algebro-Differentialgleichung

$$T_1\, y' + y = Kx, \qquad y(0) = 0,$$
$$x = u - y$$

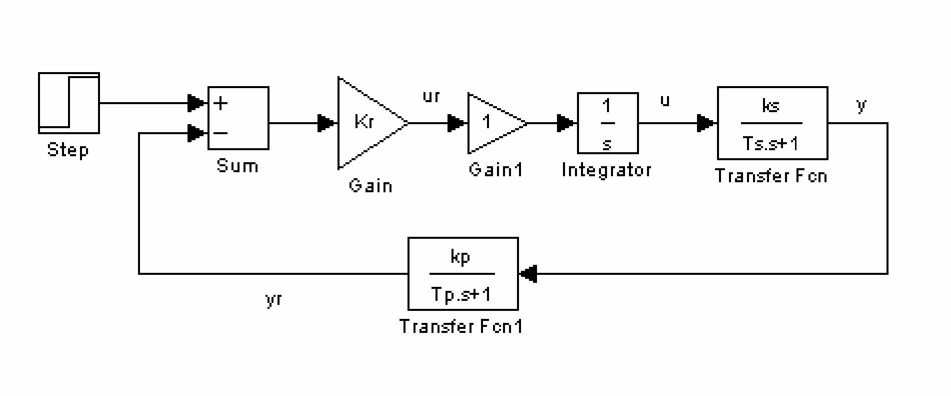
oder die Differentialgleichung

$$T_1y' + (K+1)y = Ku, \qquad y(0) = 0.$$

Diese Differentialgleichung kann dann wieder durch ein TP1-Glied dargestellt werden:



Beispiel 3
Für eine Temperaturregelung ist in [1] ein Modell aufgeführt deren Hauptteil die folgende Form hat:



Dieses Modell führt zunächst auf das System von Integro-Differentialgleichungen

$$
\begin{aligned}
u(t) &= \int_0^t u_r(s)ds \\
T_s y' + y &= k_s u, \qquad & y(0) = 0 \\
T_p y_r' + y_r &= k_p y, \qquad & y_r(0) = 0
\end{aligned}
$$

und durch Differentiation (sofern möglich) dann zu den System von Differentialgleichungen

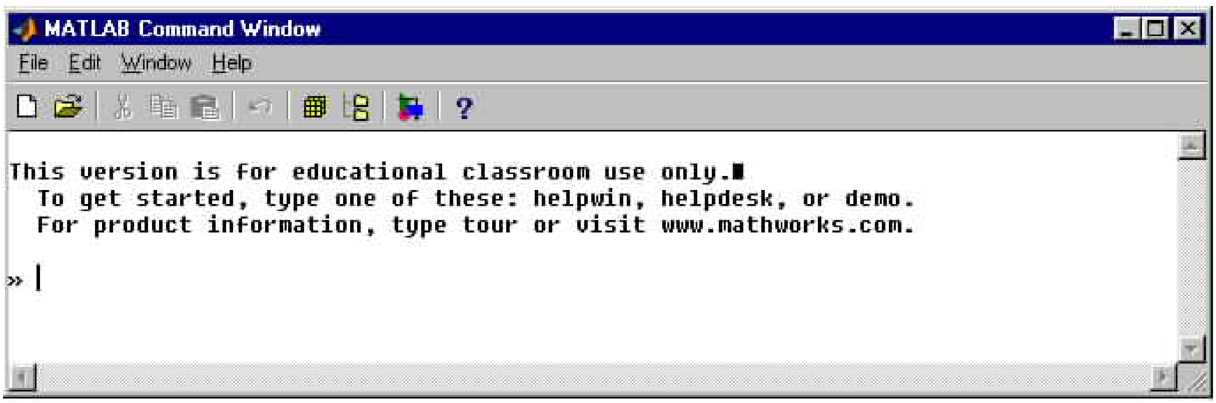
$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & T_S & 0 \\ 0 & 0 & T_P \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} u' \\ y' \\ y_r' \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k_s & -1 & 0 \\ 0 & k_p & -1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} u \\ y \\ y_r \end{pmatrix}
+
\begin{pmatrix} u_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},
\qquad
\begin{pmatrix} u(0) \\ y(0) \\ y_r(0) \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Für y_r kann schließlich auch eine lineare Differentialgleichung dritter Ordnung aufgestellt werden, nämlich:

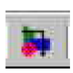
$$T_P T_s y_r''' + (T_P + T_s) y'' + y_r' = k_s k_P u' = k_P k_s u_r = k_P k_s K_r (H(t) - y_r)$$

§1.5 SIMULINK

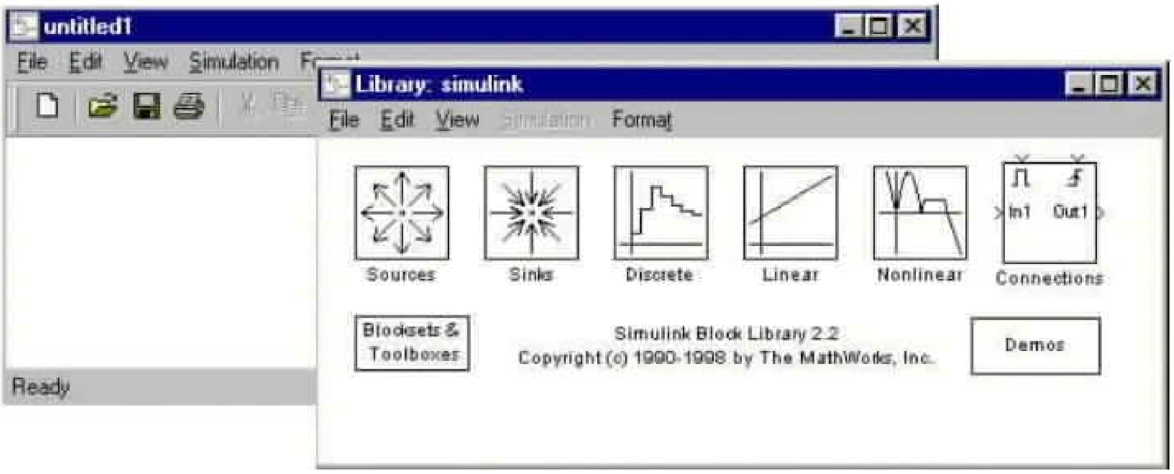
SIMULINK ist ein Unterprogramm von MATLAB



und wird durch Linksklick des (Programm-) Symbols



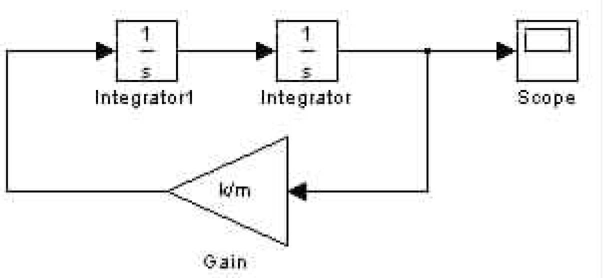
in der Symbolleiste des MATLAB-Kommando Fensters erreicht. SIMULINK stellt dann ein Modellfenster (untitled1) und eine Bibliothek (Library) zur Verfügung.



Ein Linksklick auf die Bibliothekselemente (Sources, Sinks,...) liefert ein Fenster mit Blöcken die durch "Drag-and-Drop" in das Modellfenster überführt werden können. Mit dem Menü "Format" des Modellfensters lassen sich die einzelnen Blöcke noch behandeln: z.B. drehen, färben, vergrößern und vieles mehr. Im Paragraph 1.6 sind weitere Kommandos aufgeführt. Insbesondere auch solche mit denen die Blöcke verbunden werden können.
Eine sicherlich nicht immer so gültige Fallanalyse [3] zeigt, dass neben der Anschaulichkeit auch noch erhebliche Arbeitseinsparungen gegenüber konventionellen Programmiermethoden möglich sind.
Für den Fall

$$x'' + (k/m)*x = 0$$

mit dem SIMULINK-Modell



ergibt sich der folgende Vergleich

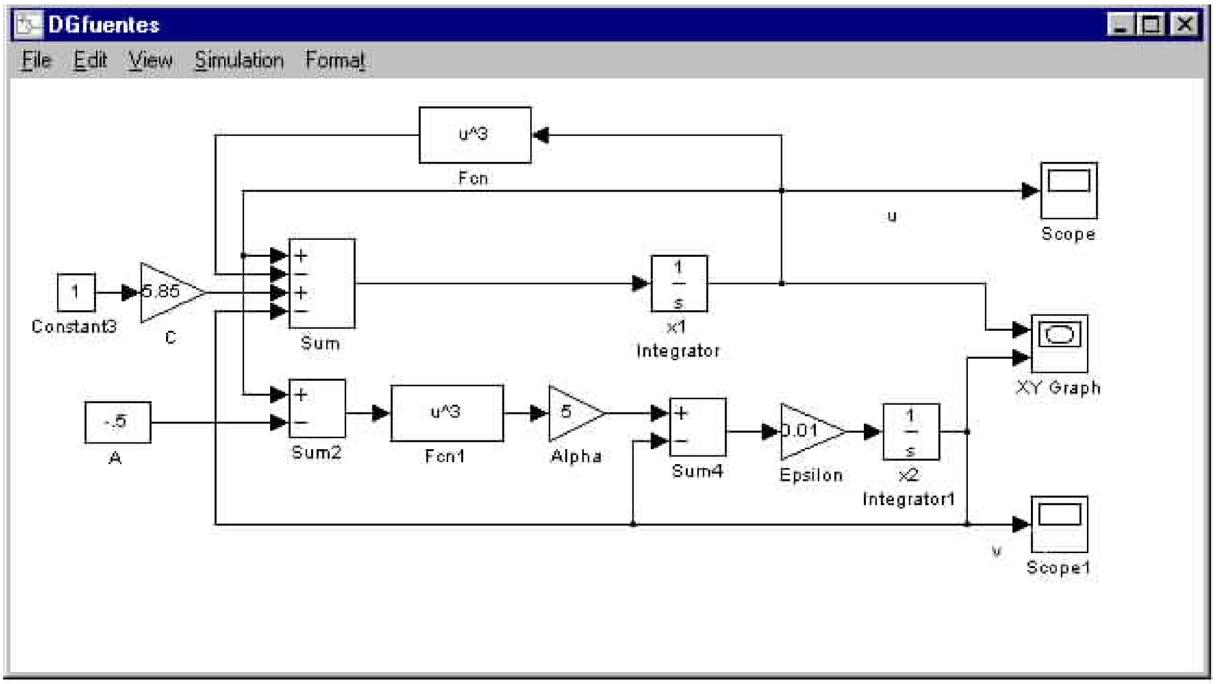
Programmiersprache	Codezeilen	Ungefähre Anzahl der Anschläge
8086 Assembler	92	1540
FORTRAN	14	24
MATLAB	3	90
Simulink	4	25

Wie schnell mit SIMULINK-Modellen Simulationsergebnisse erzielt werden können, zeigt z.B. die Differentialgleichung

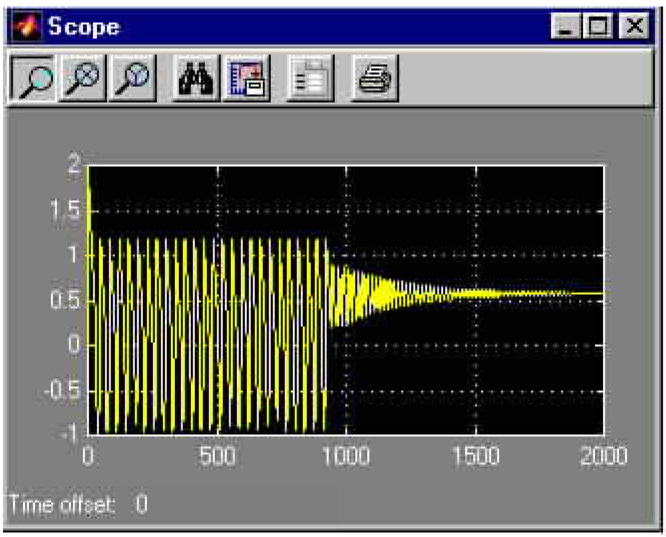
$$u' = u - u^3 - v + C, \qquad u(0) = 0$$
$$v' = \varepsilon*[\alpha*(u - A)^3 - v], \qquad v(0) = 0$$

$$\varepsilon = 0.01, \ \alpha = 5, \quad A = -0.5$$

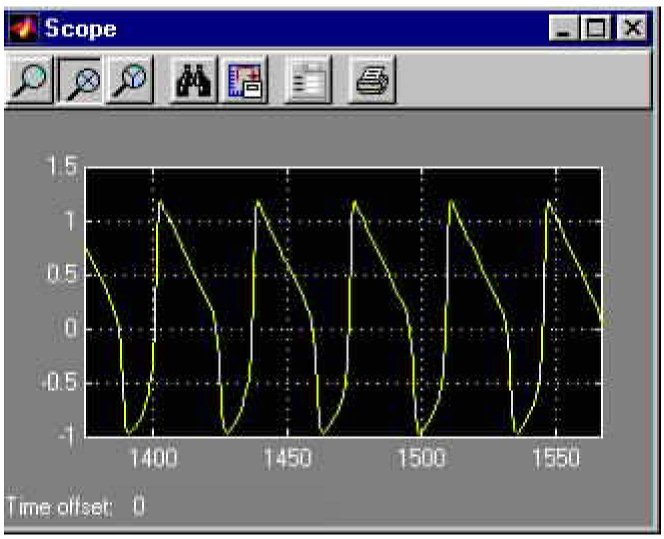
Dieses System führt auf das SIMULINK- Modell (Beachten Sie auch das Auftreten der nichtlinearen Funktionen die in den Kästen mit Fcn realisiert wurden)



Für den Parameter C=5.85 liegt augenscheinlich eine periodische Lösung vor. Für C=5.856 liegt eine asymptotisch stabile Lösung vor. Die Lösungsanteile u(t) können aus den folgenden Bildern entnommen werden.



C = 5.856



C = 5.85

Nun handelt es sich hier um ein sehr empfindliches Problem. Mit den Analysis Tools von SIMULINK kann dennoch später ohne Schwierigkeiten gezeigt werden, dass sowohl eine asymptotisch stabile Lösung als auch eine Hopf-Verzweigung (periodische Lösung) vorliegen. Die Näherungslösungen wurden mit dem ODE113(Adams)(!) Verfahren und einem Pentium II Rechner erzielt.

§ 1.6 Maus und Tastatur Aktionen in SIMULINK

Die folgenden Tabellen wurden aus [3] entnommen. Sie geben einen Auszug über die Möglichkeiten wie Blöcke, Signale und Untertitel behandelt werden können. Dabei bedeutet

LMB = Linksklick
RMB = Rechtsklick

Maus und Tastatur-Aktionen für Blöcke und Verbindungslinien

Task	Microsoft Windows
Select one block	LMB
Select multiple blocks	**Shift** + LMB
Copy block from another window	Drag block
Move block	Drag block
Duplicate block	**Ctrl** + LMB and drag; or RMB and drag
Connect blocks	LMB
Disconnect block	**Shift** + drag block

Task	Microsoft Windows
Select one line	LMB
Select multiple lines	**Shift** + LMB
Draw branch line	**Ctrl** + drag line; or **RMB** and drag line
Route lines around blocks	**Shift** + draw line segments
Move line segment	Drag segment
Move vertex	Drag vertex
Create line segments	**Shift** + drag line

Maus und Tastatur Aktionen für Verknüpfungen und Untertitel

Task	Microsoft Windows
Select one block	LMB
Select multiple blocks	**Shift** + LMB
Copy block from another window	Drag block
Move block	Drag block
Duplicate block	**Ctrl** + LMB and drag; or RMB and drag
Connect blocks	LMB
Disconnect block	**Shift** + drag block

Task	Microsoft Windows
Select one line	LMB
Select multiple lines	**Shift** + LMB
Draw branch line	**Ctrl** + drag line; or **RMB** and drag line
Route lines around blocks	**Shift** + draw line segments
Move line segment	Drag segment
Move vertex	Drag vertex
Create line segments	**Shift** + drag line

Literatur

[1] Hofmann, J. MATLAB und SIMULINK. Addison-Wesley. S. 1-506. 1998
[2] Doetsch, G. Handbuch der Laplace-Tranformation. Birkhäuser Verlag. 1971-73
[3] Dabney, J.B., Harman, T.L. Mastering SIMULINK2. The Matlab Curriculum Series. Prentice Hall 1998. S. 1-345
[4] Föllinger, O. Regelungstechnik. Einführung in die Methoden und Ihre Anwendung. Hüttig Verlag 1994. S. 1-632

Laplace-Transformierte und Rechenregeln

	Urbild	Bild	Konvergenzabszisse
1.	$y(t) = 1$	$Y(s) = \frac{1}{s}$	0
2.	$y(t) = e^{at}$	$Y(s) = \frac{1}{s-a}$	Re a
3.	$y(t) = \frac{1}{\Gamma(k)} t^{k-1}$	$Y(s) = s^{-k}$	0
	(k komplex, Re $k > 0$)	(k komplex, Re $k > 0$)	
4.	$y(t) = \sin(at)$	$Y(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}$	$\lvert$Jm $a\rvert$
5.	$y(t) = \cos(at)$	$Y(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}$	$\lvert$Jm $a\rvert$
6.	$y(t) = \sinh(at)$	$Y(s) = \frac{a}{s^2 - a^2}$	$\lvert$Re $a\rvert$
7.	$y(t) = \cosh(at)$	$Y(s) = \frac{s}{s^2 - a^2}$	$\lvert$Re $a\rvert$
8.	$y(t) = \frac{t}{2a} \cdot \sin(at)$	$Y(s) = \frac{s}{(s^2 + a^2)^2}$	$\lvert$Jm $a\rvert$
9.	$y(t) = e^{-\alpha t} \sin(\beta t)$	$Y(s) = \frac{\beta}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}$	Re $\alpha + \lvert$Jm $\beta\rvert$
10.	$y(t) = \frac{1}{t} \cdot (1 - e^{-t})$	$Y(s) = \ln\left(1 + \frac{1}{s}\right)$	0
11.	$y(t) = J_0(t)$	$Y(s) = 1/\sqrt{1+s^2}$	0
12.	$y(t) = \begin{cases} b & 0 \le t \le a \\ 0 & t > a \end{cases}$	$Y(s) = \frac{b}{s}(1 - e^{-as})$	0
13.	$y(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t \le a \\ b & t > a \end{cases}$	$Y(s) = \frac{b}{s} \cdot e^{-as}$	0

Bemerkung: Setzt man für die durch 12 gegebenen Funktionen $a = b^{-1}$ und läßt $b \to \infty$ gehen, so strebt die Bildfunktion gegen die Funktion $Y \equiv 1$. Andererseits ist wegen $a = b^{-1}$ das Integral $\int_0^\infty y(t)\,dt = 1$; im Grenzfall ist y die δ-Funktion.

Wir bringen noch zusammenfassend eine Tabelle, die einige Rechenregeln enthält.

1.	$z(t) = y^{(n)}(t)$	$Z(s) = s^n Y(s) - \sum\limits_{\mu=0}^{n-1} s^{n-1-\mu} \cdot y^{(\mu)}(0)$
2.	$z(t) = \int\limits_0^t y(t)\,dt$	$Z(s) = \frac{1}{s} \cdot Y(s)$
3.	$z(t) = y_1 * y_2(t)$	$Z(s) = Y_1(s) \cdot Y_2(s)$
4.	$z(t) = \begin{cases} y(at-b) & \text{für } at-b \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$Z(s) = \frac{1}{a} \cdot e^{-\frac{b}{a}s} \cdot Y\left(\frac{s}{a}\right)$
	$(a > 0, b \geq 0)$	$(a > 0, b \geq 0)$
5.	$z(t) = y(at) \quad (a > 0)$	$Z(s) = \frac{1}{a} \cdot Y\left(\frac{s}{a}\right) \quad (a > 0)$
6.	$z(t) = \frac{1}{a} \cdot e^{-\frac{b}{a}} \cdot y\left(\frac{t}{a}\right)$	$Z(s) = Y(as + b)$
	$(a > 0, b\,\text{komplex})$	$(a > 0, b\,\text{komplex})$
7.	$z(t) = t^n\, y(t)$	$Z(s) = (-1)^n \cdot \frac{d^n Y}{ds^n}(s)$
	$(n$ ganz, $n \geq 0)$	$(n$ ganz, $n \geq 0)$
8.	$z(t) = \frac{1}{t} \cdot y(t)$	$Z(s) = \int\limits_s^\infty Y(s)\,ds$