Übungen zu Numerische Mathematik
SS06
K. Taubert

Abgabe: 9.5.06 vor den Übungen

Aufgabe 17 (Numerische Differentiation**)**
Das Newton-Interpolation-Polynom p_n für eine Funktion $f \in C^{n+1}[a,b]$, mit den Stützstellen x_i, $i = 0,1,2, \ldots ,n$, und $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$, genügt der Beziehung

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1).......(x-x_n)$$

mit einem geeignetem ξ_x aus dem kleinsten Intervall welches $\{x,x_0,x_1, \ldots ,x_n\}$ enthält.

Für ein festes gegebenes $x \in [a,b]$, kann die Differenz $f(x) - p_n(x)$ aber auch in der Form

$$f(x) - p_n(x) = c_{n+1}(x-x_0)(x-x_1).......(x-x_n)$$

mit einer geeigneten n+1-ten dividierten Differenz c_{n+1} dargestellt werden (Beweis?).

Liegen die verschiedenen Stützstellen $(x,x_0,x_1,x_2, \ldots ,x_n)$ „hinreichend nahe beieinander", dann eröffnen die obigen Gleichungen die Möglichkeit eine „gute" Näherung für die n+1-te Ableitung von f zu bestimmen:

Durch die angenommene Lage der Stützstellen ($\xi_x \approx x$) muss dann gelten

$$\frac{f^{n+1}(x)}{(n+1)!} \cong c_{n+1}$$

Dabei ergibt sich c_{n+1} aus dem Schema der dividierten Differenzen mit den Stützstellen $(x,x_0,x_1, \ldots,x_n)$.

Berechne nach der oben angegebenen Methode Näherungen für die 1-5 Ableitungen der Funktion $f(x) = 1 + \sin(3x)$ an der Stelle 0. Wählen Sie als Stützstellen z.B. {0, 0.00004, 0.00008, 0.00012, .. , 0.00016, 0.00020}. Was nun?

Aufgabe 17 (Numerische Differentiation)
Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \sinh(x).$$

Es soll eine Näherung für die zweite Ableitung an der Stelle 0.6 berechnet werden.
Es sei $h^2 = 0.09, 0.04, 0.0225$ und 0.01 und h die positive Wurzel von h^2. Außerdem sei

$$T(h^2,f) = \frac{f(0.6+h) - 2f(0.6) + f(0.6-h)}{h^2}$$

Bestimme mit dem Schema der dividierten Differenzen ein zugehöriges Interpolations-polynom vom Grade 3 und anschließend den Wert dieses Polynoms an der Stelle $h^2 = 0$.
Bestimme nun mit dem Schema nach Neville den Wert des Interpolationspolynoms an der Stelle $h^2 = 0$

Aufgabe 18
Plotten Sie die Polynome

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x$$

$$T_{n+1}(x) = 2T_n(x)*x - T_{n-1}(x), \quad n= 1,2, \ldots , 9$$

auf dem Intervall [-1,1].
In welchen Zusammenhang stehen diese Polynome mit den Tschebyscheff-Knoten?
Bestimmen Sie ein Polynom ersten Grades $y = a^* + b^* x$ mit der folgenden Eigenschaft:

$$\operatorname*{Max}_{x\in[-1,1]} | x^2-a^*-b^*x | \le \operatorname*{Max}_{x\in[-1,1]} | x^2-a-bx |$$

für alle $a,b \in R$.
Bestimmen Sie nun ein Polynom zweiten Grades $y = a^*+b^*x+c^*x^2$ mit der Eigenschaft

$$\operatorname*{Max}_{x\in[-1,1]} | x^3-a^*-b^*x-c^*x^2 | \le \operatorname*{Max}_{x\in[-1,1]} | x^3-a-bx-cx^2 |$$

für alle $a,b,c \in R$.

(Preis-) Aufgabe 19
Die n-te dividierte Differenz $f[x_0,x_1,x_2, \ldots ,x_n]$ eines Polynoms n-1-ten Grades hat der Theorie nach den Wert Null. Numerisch muss es natürlich nicht so sein!
Gesucht ist ein „schönes Polynom“ und „moderate Stützstellen“ die zu einem spektakulären numerischen Fehlergebnis führen.