Übungen zu Numerische Mathematik II
WS06/07
J. Sternberg, K. Taubert

Abgabe: 12.12.06 vor den Übungen

Aufgabe 21
Es sei N =2n mit $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie die Koeffizienten der besten Approximationen

$$g_m(x) = \frac{a_0'}{2} + \sum_{j=1}^{m} (a_j' \cos(jx) + b_j' \sin(jx)) \quad m<n$$

für die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \le x \le \pi \\ 2\pi - x & \text{für } \pi < x \le 2\pi \end{cases}$$

für alle m<n =16 und zwar im Sinne der diskreten 2-Norm $\sum_{j=0}^{N-1} (g_m(x_j) - f(x_j))^2$.

Dabei sei wieder $x_j = \frac{2\pi}{N} j$, j=0,1,2,.. ,N-1.

Aufgabe 22
Es sei (X, (. , .)) der unitäre Raum der stetigen und reellwertigen Funktionen auf dem Intervall [0,1] mit dem inneren Produkt

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx .$$

und $V \subset X$ mit $V = \text{span}(1, x, x^2, \ldots, x^n)$.
Bestimme die Gramsche Matrix

$$((x^i, x^j))_{0 \le i,j \le n}$$

und mit dem Projektionssatz ein Gleichungssystem für die beste Approximation $v^* \in V$ für ein $f \in X$ und $f \notin V$.
Geben Sie die Kondition der Gramschen Matrizen für n = 0,1,2, … ,10 an.
Bekanntlich überführt das Orthogonalisierungsverfahren von Erhard Schmidt die Basis $\{1,x,x^2, \ldots, x^n\} = \{h_1,h_2, \ldots, h_{n+1}\}$ zu einer orthonormierten Basis $\{v_1,v_2, \ldots, v_{n+1}\}$ vermöge

$$v_j = \frac{u_j}{\| u_j \|}, \qquad u_j = h_j - \sum_{i=1}^{j-1} (h_j, v_i) v_i , \qquad j = 1,2, \ldots ,n+1$$

Interpretieren Sie das Orthogonaliesierungsverfahren als sukzessive Bestimmung bester Approximationen und erläutern Sie den Vorteil orthogonaler Systeme bei der Bestimmung bester Approximationen in unitären Räumen.

Aufgabe 23
Es sei (X, (. , .)) der unitäre Raum der stetigen und reellwertigen Funktionen auf dem Intervall [-1,1] mit dem inneren Produkt

$$(f,g) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)g(x)dx \,.$$

und $V \subset X$ mit $V = \mathrm{span}(T_0, T_1, T_2, \dots, T_n)$ mit den aus der Polynominterpolation bekannten T-Polynomen.
Zeige:

1. Die T-Polynome bilden bezüglich dem inneren Produkt (. , .) ein orthogonales System.

2. Es sei $f \in X$ und $f \notin V$, dann haben die Koeffizienten der besten Approximation $v^* \in V$. von f

$$v^*(x) = \frac{1}{2} c_0 T_0(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k T_k(x)$$

die Gestalt

$$c_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} f(x) T_k(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \,.$$

3. Die Transformation $F(\varphi) = f(\cos(\varphi))$ führt zu

$$c_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\cos(\varphi)) \cos(k\varphi) d\varphi$$

Für die Ermittlung einer besten Approximation im Sinne der durch das innere Produkt induzierten Norm kann dann die FFT benutzt werden, oder?

Aufgabe 24
Finden Sie ein Element v* aus $V = \mathrm{span}(1, x)$ mit

$$\| e^{\sqrt{y}} - v^*(y) \|_\infty \le \| e^{\sqrt{y}} - v(y) \|_\infty \quad \text{für alle } v \in V$$

und $y \in [0,1]$.