Dr. Felix Schwenninger
WS 2018/2019

Bergische Universität Wuppertal

Probeklausur Analysis II – Lösungsvorschlag[1]

Name:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studiengang:

Wichtige Hinweise:

- Sofern nicht anders angegeben, müssen alle Rechnungen, Ergebnisse, Folgerungen etc. **begründet** werden. Was den Umfang und die Form der Begründung angeht orientieren Sie sich an den vorgeführten Lösungen der Übungsblätter.
- In der Klausur ist **kein** Hilfsmittel (Taschenrechner, Spickzettel, usw...) zugelassen.
- Mobiltelefone und ähnliche Geräte sind während der gesamten Klausur **verboten**. Ein Mobiltelefon auf Ihrem Tisch oder in Ihrer Hand bedeutet das sofortige Ende Ihrer Klausur.
- Die Klausurzeit beträgt 120 Minuten.
- Die Klausur auf die "Maximalpunktezahl" 100 ausgelegt: Somit haben Sie eine gewisse Freiheit in der Auswahl der Aufgaben.

Wir wünschen viel Erfolg!

Aufgabe	A	B	C.1	C.2	C.3	C.4	C.5			$\sum$	Bonus	Note
Max.	20	20	25	15	15	15	10			120		
Punkte												

[1] es handelt sich hierbei um einen korrektur-gelesenen Lösungsvorschlag. Bei etwaigen Fragen bzw. Unklarheiten kontaktieren Sie mich bitte.

Teil A

Aufgabe. (6+8+6=20 Punkte)
Geben Sie eine Definition folgender Begriffe:

(a) gleichmäßige Stetigkeit einer Funktion $f : X \to Y$
(wobei X, Y allgemeine metrische Räume sind)

(b) Die Richtungsableitung einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an einer Stelle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ in Richtung $v \in \mathbb{R}^2$.

(c) messbare Menge $M \subset \mathbb{R}^p$

Notieren Sie hier Ihre Lösung:
(a) $f : X \to Y$ heißt gleichmäßig stetig, falls

$$\forall \varepsilon\, \exists \delta\, \forall x, y \in X: \ (d_X(x,y) < \delta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon)$$

(b) Für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $v \in \mathbb{R}^2$ heißt

$$\frac{\partial f}{\partial v} := \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(f(\mathbf{x} + hv) - f(\mathbf{x}) \right)$$

die Richtungsableitung von f an der Stelle $\mathbf{x}$ in Richtung v (sofern der Grenzwert exisitiert).

(c) Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^p$ heißt messbar, falls ein (abgeschlossener) Quader $Q \subset \mathbb{R}^p$ existiert so dass $Q \supseteq M$ und die Funktion

$$1_M : Q \to \mathbb{R}, \mathbf{x} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in M \\ 0 & \text{falls } x \in Q \setminus M \end{cases}$$

(Riemann) integrierbar ist.

Formulieren Sie (jeweils 4 Punkte)

(d) den *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung* (es genügt der Fall für stetige Funktionen)

(e) die *grundlegenden Eigenschaften* offener Mengen in metrischen Räumen

Für den Beweis der grundlegenden Eigenschaften offener Mengen erhalten Sie **5 Bonuspunkte**.
Notieren Sie hier Ihre Lösung:

(d) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist

$$F : [a, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_a^x f(s) \mathrm{d}s$$

eine Stammfunktion von f.

(e) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt:

(i) Die Mengen $\emptyset$, X sind offen

(ii) $O_1, \dots, O_n$ offen $\implies \bigcap_{i=1}^n O_i$ offen

(iii) O_i, $i \in I$ offen $\implies \bigcup_{i \in I} O_i$ offen

Für den Beweis, siehe Satz 1.23

Geben Sie jeweils ein Beispiel (jeweils 2 Punkte)

(f) einer Funktion $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$, die <u>nicht</u> uneigentlich Riemann integrierbar ist, aber so dass $f|_{[a,1]}$ Riemann integrierbar für jedes $a \in (0, 1)$.

(g) eines metrischen Raumes, dessen Metrik nicht durch eine Norm definiert ist.

(h) einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die partiell differenzierbar, aber nicht total differenzierbar ist.

Sie müssen hierbei keine Beweise angeben.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

(f) Sei $f : (0, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$.
(Dann ist $\int_\varepsilon^1 f(x)\mathrm{d}x = -\ln \varepsilon$ für alle $\varepsilon \in (0, 1)$, aber $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 f(x)\mathrm{d}x = \infty$.)
(g) Paris Metrik auf $\mathbb{R}^2$ oder diskrete Metrik auf $\mathbb{R}$.
(h)$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

Teil B

Aufgabe. (10×2 Punkte) Beantworten Sie die folgenden Fragen. Tragen Sie Ihre Antwort in die Tabelle ein. Es ist keine Begründung hier notwendig!

1.	Wahr oder nicht wahr: *Alle Normen auf einem Vektorraum X sind äquivalent.*	**nicht wahr**
2.	$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \begin{pmatrix} \|(x,y)\|_1 \\ \mathrm{e}^{\|(x,y)\|_\infty} + \sqrt{\|(x,y)\|_2} \end{pmatrix} =?$	$\begin{pmatrix} 2 \\ \mathrm{e} + 2^{\frac{1}{4}} \end{pmatrix}$
3.	$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\sin(x^2)}{x^2+y^2} =?$	0
4.	$\int_0^1 \frac{1}{1+4x^2}\mathrm{d}x =?$	$\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}$
5.	Wahr oder nicht wahr: *Jede kompakte Menge abgeschlossen.*	**wahr**
6.	Berechnen Sie $\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x \frac{\sin(y)}{y}\mathrm{d}y$ für $x = 0$.	1
7.	Bestimmen Sie das Innere von $\cap_{n\in\mathbb{N}}(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$	$\emptyset$
8.	Ist $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 10 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ auf $[0,1]\times[0,1]$ integrierbar?	**Ja**
9.	Hat die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto \cos(y)x^2\mathrm{e}^z$ ein globales Maximum?	**Nein**
10.	Sei $A \in \mathbb{R}^{p\times p}$. Ist die Funktion $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p, \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ stetig differenzierbar? Geben Sie das totale Differential an $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$ an.	**Ja**, $\mathrm{d}f(\mathbf{x}) = A$

Teil C

Aufgabe 1. (25 Punkte) Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Untersuchen Sie die Funktion auf

(1) Stetigkeit (3 Punkte),
An der Stelle $(0,0)$ ist f stetig, da wegen (man beachte, dass $2xy^2 \leq x^2 + y^4$)

$$|f(x,y)| = \left|\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right| |xy| \leq \frac{1}{2}|xy|$$

gilt, dass $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. An allen anderen Stellen ist f stetig als Verknüpfung stetiger Funktionen.

(2) Integrierbarkeit auf der Menge $[0,2] \times [0,2]$ (2 Punkte),
Die Funktion f ist auf dem Quader $[0,2] \times [0,2]$ stetig und deshalb integrierbar.

(3) stetige totale Differenzierbarkeit und gegebenenfalls totale Differenzierbarkeit (5 Punkte),
Wir berechnen die partiellen Ableitungen an den Stellen $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^7}{(x^2+y^4)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2y^2(3x^2-y^4)}{(x^2+y^4)^2}$$

und an der Stelle $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}(f(h,0) - f(0,0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}(f(0,h) - f(0,0) = 0$$

Wir zeigen nun, dass $(x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ und $(x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ stetig sind: Wieder mit der Ungleichung $2xy^2 \leq x^2 + y^4$ erhalten wir für $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| = \left|\frac{2xy^7}{(x^2+y^4)^2}\right| \leq \left|\frac{y^5}{x^2+y^4}\right| = |y| \left|\frac{y^4}{x^2+y^4}\right| \leq |y|$$

bzw.

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = \left|\frac{x^2y^2(3x^2-y^4)}{(x^2+y^4)^2}\right| \leq |x| \left|\frac{|3x^2-y^4|}{x^2+y^4}\right| \leq |x| \frac{3x^2+3y^4}{x^2+y^4} = 3|x|$$

Und somit folgt die Stetigkeit der partiellen Ableitungen an $(0,0)$. An alle anderen Stellen sind die partiellen Ableitungen Verknüpfungen stetiger Funktionen. Somit ist f auf $\mathbb{R}^2$ stetig total differenzierbar.

(4) lokale und globale Extremwerte (3 Punkte), *Da f auf ganz $\mathbb{R}^2$ (genauer gesagt, f ist auf einer offenen Menge definiert) definiert ist, ist jede globale Extremstelle auch eine lokale Extremstelle. Eine notwendige Bedingung an eine lokale Extremstelle ist, dass die partiellen Ableitungen an dieser Stelle gleich 0 sind. Aus den obigen Berechnungen ergibt sich somit, dass dies nur der Fall sein kann wenn*

$$(x = 0 \vee y = 0) \wedge (x^2y^2(3x^2 - y^4) = 0) \iff (x = 0 \vee y = 0).$$

Somit können Extremstellen nur entlang der Koordinatenachsen auftreten. Um zu überprüfen, ob die Funktion an diesen Stellen ein Maximum oder Minimum hat, beachten wir *zuerst, dass der Funktionswert an diesen Stellen gleich* 0 *ist. Offenbar nimmt die Funktion aber positive und negative Werte an (z.B.* $f(1,1)$ *und* $f(1,-1)$*), womit also keine globalen Extremwerte existieren können. Weiterhin gilt wegen*

$$f(x,y) = y\frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$$

und $\frac{x^2y^2}{x^2+y^4} > 0$*, für* $(x,y) \neq (0,0)$*, dass*

$$f(x,y) \geq 0 \iff y \geq 0.$$

Daraus folgt direkt, dass alle Punkte in $\{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y > 0\}$ *lokale Minimalstellen sind, alle Punkte* $\{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y < 0\}$ *lokale Maximalstellen sind und alle Punkte auf der x-Achse keine Extremstellen sein können. Da jede Kugel um einen Punkt auf einer Achse einen weiteren Punkt auf der Achse schneidet, kann es sich bei den Extrema um keine strikten Maxima- bzw. Minima handeln.*

(5) globale Extremwerte unter der Nebenbedingung $x^2 + y^4 = 1$ (4 Punkte).
Man beachte, dass es genügt, die globalen Extrema von

$$\tilde{f}(x,y) = x^2y^3$$

unter der Nebenbedingung zu betrachten. Sei $g(x,y) = x^2+y^4-1$*. Da* $\frac{\partial g}{\partial(x,y)} = (2x, 4y^3)$ *für alle* (x,y) *mit* $g(x,y) = 1$ *ungleich dem Nullvektor ist, hat* $\frac{\partial g}{\partial(x,y)}$ *Rang gleich* 1*. Außerdem ist die Menge* $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon g(x,y) = 0\}$ *kompakt, weshalb es in* M *globale Extremstellen geben muss. Diese müssen auch lokale Extremstellen sein* [2]*. Diese Extremstellen müssen Nullstellen des Gradienten von der Lagrangefunktion*

$$\Lambda(x,y,\lambda) = \tilde{f}(x,y) + \lambda g(x,y),$$

sein. Die Rechnung liefert, dass genau an den Punkten

$$(\pm\frac{2}{\sqrt{7}}, \left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{1}{4}})$$

ein lokales Maximum angenommen, wohingegen genau an den Punkten

$$(\pm\frac{2}{\sqrt{7}}, -\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{1}{4}})$$

ein lokales Minimum angenommen wird mit den Funktionswerten

$$Max = \frac{4}{7}\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{3}{4}} \qquad bzw. \qquad Min = -\frac{4}{7}\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{3}{4}}$$

Daneben sind die Punkte $(\pm 1, 0)$ *und* $(0, \pm 1)$ *Nullstellen des Gradienten der Lagrangefunktion, die aber keine Extremwerte liefern (die Funktionswerte sind alle gleich* 0*).*

[2] nach der Definition von lokalen Extremstellen für Aufgaben mit Nebenbedingungen, siehe Vorlesung vom 30.1.

Weiterhin behandeln Sie **eine** der beiden folgende Aufgaben (8 Punkte)

(6) Berechnen Sie das Integral $\int_{[0,2]\times[0,2]} f(x,y)\mathrm{d}(x,y)$
Schreiben Sie das Integral mit Hilfe des Satzes von Fubini als Doppelintegral. Integrieren Sie zuerst nach y, dies ist leicht, da der Zähler bis auf einen Faktor die Ableitung des Nenners ist,

$$x^2 \int \frac{y^3}{x^2+y^4} = \frac{x^2}{4}\ln(x^2+y^4)+C$$

Intergrieren Sie nun nach x indem Sie einmal partiell integrieren. Verwenden Sie dann die Erweiterung

$$\frac{x^3}{x^2+1} = \frac{x^3+x-x}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} - 1$$

und nochmals den Umstand, dass der Zähler die Ableitung des Nenners ist (bis auf einen Faktor).

(7) (i) Untersuchen Sie, ob die Menge $f((-\infty,\infty)\times[-1,1])$ kompakt ist.(3 Punkte)
Man beachte, dass sich die Kompaktheit der Menge $M = f((-\infty,\infty)\times[-1,1])$ nicht aus der Stetigkeit folgern lässt, weil $(-\infty,\infty)\times[-1,1]$ nicht kompakt ist!
Wir versuchen, die Menge M explizit zu bestimmen. Aus (4) wissen wir bereits, dass die lokalen Extremwerte von f gleich 0 sind und somit $f(M)$ die maximalen bzw. minimalen Werte nur auf dem Rand von $(-\infty,\infty)\times(1,1)$, d.h. auf $(-\infty,\infty)\times\{-1,1\}$ annehmen kann. Da $f(x,1) = -f(x,-1)$ genügt es also, den Wertebereich der Funktion $x \mapsto f(x,1)$ zu bestimmen. Dazu bestimmen wir das Supremum und das Infimum der Funktion

$$x \mapsto f(x,1) = \frac{x^2}{x^2+1}.$$

Offensichtlich ist das Infimum (gleich dem Minimum) gleich 0 und das Supremum (das kein Maximum ist) gleich 1. Aus dem Zwischenwertsatz (Ana I) folgt, dass Bild von $\mapsto f(x,1)$ gleich der Menge $[0,1)$ sein muss. Wegen $f(x,1) = -f(x,-1)$ folgt, dass

$$M = f((-\infty,\infty)\times[-1,1]) = (-1,1).$$

Somit ist f NICHT KOMPAKT!!

(ii) Berechnen Sie den Grenzwert (5 Punkte)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x,n)\mathrm{d}x$$

Um den Grenzwert zu berechnen, argumentieren wir warum sich Integral und Limes vertauschen lassen. Dazu zeigen wir, dass die Funktionenfolge $f(\cdot,n)$ auf $[0,1]$ **gleichmäßig** *gegen die Nullfunktion konvergiert: Für alle $x\in[0,1]$ gilt, dass*

$$|f(x,n)| \le \frac{1^2\cdot n^3}{0^2+n^4} = \frac{1}{n}$$

also $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}|f(x,n)| = 0$. Somit folgt, dass $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x,n)\mathrm{d}x = 0$.

Aufgabe 2. (15 Punkte) Berechnen Sie das Volumen eines American Footballs, der hier durch folgende Menge beschrieben wird:

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \sqrt{x^2+y^2} \le 1 - \frac{z^2}{4}\right\}$$

Lösung: Sei M die oben angegebene Menge. Wir formen die Ungleichung nach x um. Sei dazu $c_z = (1 - \frac{z^2}{4})$

$$\begin{aligned} M &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon -\underbrace{\sqrt{c_z^2 - y^2}}_{=\phi(y,z)} \le x \le \sqrt{c_z^2 - y^2}, (y,z) \in \tilde{M}\right\}, \\ \tilde{M} &= \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \colon c_z^2 - y^2 \ge 0\} = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \colon -c_z \le y \le c_z, z \in [-2,2]\}. \end{aligned}$$

Wir nutzen nun (die Folgerung des Satzes von) Fubini zweimal, um das Volumen zu berechnen:

$$\int_M 1\mathrm{d}(x,y,z) = \int_{\tilde{M}} \int_{-\phi(y,z)}^{\phi(y,z)} 1\mathrm{d}x\mathrm{d}(y,z) = 2\int_{-2}^{2}\int_{-c_z}^{c_z} \phi(y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2\int_{-2}^{2}\int_{-c_z}^{c_z} \sqrt{c_z^2 - y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Das innere Integral lässt sich mit Hilfe der Substitution $y = c_z \sin u$ und wegen

$$\int \cos^2(u)\mathrm{d}u = \tfrac{1}{2}(\sin(u)\cos(u) + u) + C$$

berechnen (letzteres folgt aus partieller Integration, siehe Vorlesung),

$$\begin{aligned} 2\int_{-2}^{2}\int_{-c_z}^{c_z} \sqrt{c_z^2 - y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= 2\int_{-2}^{2} c_z^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}z \\ &= \pi \int_{-2}^{2} c_z^2 \mathrm{d}z \\ &= \pi \int_{-2}^{2} (1 - \tfrac{z^2}{4})^2 \mathrm{d}z \\ &= \pi \int_{-2}^{2} 1 - \tfrac{z^2}{2} + \tfrac{z^4}{16}\mathrm{d}z \\ &= \pi(4 - \tfrac{8}{3} + \tfrac{4}{5}) = \tfrac{32}{15}\pi. \end{aligned}$$

Bemerkung: Es ist nicht sinnvoll, die Ungleichung, die die Menge M definiert, nach z umzuformen, weil man dann eine Funktion mit "doppelter Wurzel" integrieren müsste.

Alternativ: Mit Zylinderkoordinaten (nicht in Vorlesung besprochen) und dem Transformationssatz der letzten Vorlesung: Hierfür betrachte man die Abbildung:

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (r, \phi, h)^T \mapsto (r \cos\phi, r \sin\phi, h)^T$$

Die Einschränkung $\Phi|_{(0,\infty)\times(0,2\pi)\times\mathbb{R}}$ ist ein Diffeomorphismus mit $|\det \frac{\partial\Phi}{\partial(r,\phi,h)}(r, \phi, h)| = r$ (dies folgt einfach aus dem Wissen, dass die Kugelkoordinaten einen Diffeomorphismus auf $\mathbb{R}^2$ darstellen, siehe Vorlesung und dem Entwicklungssatz für Determinanten). Somit erhalten wir mit Hilfe des Transformationssatzes

$$\int_{\Phi(\Phi^{-1}(M))} 1 \mathrm{d}(x, y, z) = \int_{\Phi^{-1}(M)} 1|\det \tfrac{\partial\Phi}{\partial(r,\phi,h)}(r, \phi, h)| \mathrm{d}(r, \phi, h) = \int_{\Phi^{-1}(M)} r \, \mathrm{d}(r, \phi, h).$$

Da $\Phi^{-1}(M) = \{(r, \phi, h) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \le r \le 1 - \frac{h^2}{4}, \phi \in [0, 2\pi]\}$, erhalten wir also mit dem Satz (der Folgerung) von Fubini, dass

$$\int_{\Phi^{-1}(M)} r \, \mathrm{d}(r, \phi, h) = \int_{[0,2\pi]\times[-2,2]} \int_0^{1-\frac{z^2}{4}} r \, \mathrm{d}r\mathrm{d}(\phi, h) = \frac{1}{2} \int_{[-2,2]} \int_{[0,2\pi]} (1 - \frac{h^2}{4})^2 \, \mathrm{d}\phi\mathrm{d}h.$$

Die restliche Rechnung ist identisch mit den letzten zwei Gleichungen in der ersten Variante.

Aufgabe 3 (15 Punkte)**.** Betrachten Sie die Funktion

$$g(x,y) = \mathrm{e}^{y-x} + 3y + x^2 - 1$$

definiert von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$.

(1) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung $T_{g,2}(x,y)$ an der Ansschlussstelle $(x,y) = (0,0)$. Was lässt sich über den Fehler

$$R = g - T_{g,2}$$

aussagen?

(2) Zeigen Sie, dass die Gleichung $g(x,y) = 0$ lokal um jeden Punkt $(x,y) = (a,b)$ nach y auflösbar ist. Gilt diese Aussage auch, wenn man g durch das Taylorpolynom aus dem ersten Aufgabenteil ersetzt?

Lösung: (1) Die partiellen Ableitungen von g sind

$$D^{(1,0)}g(x,y) = -\mathrm{e}^{y-x} + 2x,\ D^{(0,1)}g(x,y) = \mathrm{e}^{y-x} + 3,$$

und die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung sind

$$D^{(2,0)}g(x,y) = \mathrm{e}^{y-x} + 2,\ D^{(1,1)}g(x,y) = -\mathrm{e}^{y-x},\ D^{(0,2)}g(x,y) = \mathrm{e}^{y-x}.$$

Deshalb ist das Taylorpolynom gegeben durch

$$T_{g,2}(x,y) = \sum_{|\alpha|\leq 2} D^\alpha f(0,0)\frac{1}{\alpha!}x^{\alpha_1}y^{\alpha_2} = -x + 4y + \frac{3}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2.$$

(Das Taylorpolynom kann man auch direkt mit Hilfe der Potenzreihe der e*-Funktion ablesen.)*
Da g zweimal stetig differenzierbar ist, gilt für den Fehler $\lim_{h\to\mathbf{0}} \frac{|R(h)|}{\|h\|_2^2} = 0$

(2) Da $D^{(0,1)}f(x,y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \mathrm{e}^{y-x} + 3 \neq 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und da g stetig differenzierbar ist, ist nach dem Satz über implizite Funktionen die Gleichung $g(x,y) = 0$ an jeder Stelle (a,b) mit $g(a,b)$ lokal nach y auflösbar (d.h. es existiert eine offene Kugel $B_\varepsilon((a,b))$ so dass für alle $(x,y),(x,\tilde{y}) \in B_\varepsilon((a,b))$ folgt, dass $y = \tilde{y}$).
Es gilt $\frac{\partial T_{g,2}}{\partial y}(x,y) = 4 - x + y = 0$ genau dann wenn $y + 4 = x$. Setzen wir dies in $T_{g,2}$ ein, so erhalten wir

$$3y - 4 + \frac{3}{2}(y^2 + 8y + 16) - (y+4)y + \frac{1}{2}y^2 = y^2 + 11y + 20 = 0$$

Die Nullstellen sind $y = \frac{-11\pm\sqrt{41}}{2}$. An den Stellen

$$\left(\frac{-3\pm\sqrt{41}}{2}, \frac{-11\pm\sqrt{41}}{2}\right)$$

lässt sich der Satz über implizite Funktionen nicht anwenden (tatsächlich gilt, dass die Gleichung an dieser Stelle nicht nach y aufösbar ist.)

Aufgabe 4. (15 Punkte) Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, wobei X kompakt sei. Zeigen Sie, dass eine bijektive und stetige Abbildung

$$f : X \to Y$$

eine stetige Inverse hat.

Lösung: Nach der Charakterisierung der Stetigkeit über abgeschlossene Mengen, genügt es, zu zeigen, dass für jede abgeschlossene Menge $A \subset X$ folgt, dass das Urbild von A unter f^{-1} eine abgeschlossene Menge in Y ist [3]. Dieses Urbild ist aufgrund der Bijektivität gleich $f(A)$. Nun ist A kompakt, als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge X. Deshalb ist $f(A)$ kompakt, weil f stetig ist. Schließlich ist $f(A)$ abgeschlossen, weil jede kompakte Menge abgeschlossen ist.

Alternative: Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in Y, die gegen $y \in Y$ konvergiert. Da f bijektiv ist, gibt es zu jedem Folgenglied y_n ein Element $x_n \in X$ mit $f(x_n) = y_n$, $n \in \mathbb{N}$ und genauso existiert $x \in X$ mit $f(x) = y$. Da X kompakt ist, folgt (aufgrund der Äquivalenz zu Folgenkompaktheit), dass jede Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge hat. Wir behaupten, dass die jeweiligen Grenzwerte dieser Teilfolgen von Teilfolgen gleich x sein müssen. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert $z \neq x$. Dann würde, wegen der Stetigkeit von f, die Bildfolge $(f(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $f(z)$ konvergieren. Aufgrund der Bijektivität von f gilt dann aber $f(z) \neq f(x)$ was im Widerspruch zur Konvergenz der Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ steht.
Wir haben also gezeigt, dass jede Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen x konvergente Teilfolge besitzt. Dies impliziert aber, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selbst konvergent gegen x sein muss[4]

[3] siehe Skript, Beispiel 1.41

[4] (dies wurde in der Ana 1 für Folgen von reellen Zahlen gezeigt und überträgt sich direkt auf Folgen in metrischen Räumen mit Hilfe des Umstands, dass

$$x_n \xrightarrow{d} x \iff d(x_n, x) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

Aufgabe 5. (10 Punkte) Sei $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ total differenzierbar an einer Stelle $\mathbf{x} \in D$ und seien die Richtungsableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial f}{\partial w}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

für die Richtungen $v = (1,1)^T$ und $w = (0,-1)^T$ gegeben.

Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})$ an der Stelle $\mathbf{x}$ sowie die Richtungsableitung

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{v}}(\mathbf{x})$$

in Richtung $\tilde{v} = (4,3)^T$.

Lösung: Da f total differenzierbar ist, ist

$$v \mapsto \frac{\partial f}{\partial v}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \cdot v$$

eine lineare Abbildung. Wir stellen nun die benötigten Richtungsvektoren mit Hilfe von v und w dar:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v + w, \; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -w, \; \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 4(v+w) - 3w = 4v + w,$$

Vorsicht, hier war ein Rechenfehler in der ursprünglichen Version. Somit erhalten wir für die Jacobi-Matrix und die gesuchte Richtungsableitung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) &= \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial v}(\mathbf{x}) + \frac{\partial f}{\partial w}(\mathbf{x}), -\frac{\partial f}{\partial w}(\mathbf{x}) \right) \\
&= \begin{pmatrix} 2+0 & -0 \\ 1+3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -0 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \\
\frac{\partial f}{\partial \tilde{v}}(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 + 0 \\ 4 \cdot 1 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$