

Limitativität als Kriterium bei der Frage nach erweiterten Axiomensystemen für die Mathematik

BENEDIKT LÖWE

Die Bedeutung der limitativen Ergebnisse von Gödel, Church, Tarski und Turing für die Entwicklung der mathematischen Logik und die Grundlagenforschung der Mathematik kann sicherlich kaum überschätzt werden. Außerhalb mathematischer Kreise wird allerdings häufig der begrenzende Charakter dieser Ergebnisse zu stark betont. Wären der Gödelsche Unvollständigkeitssatz, die Churchschen Ergebnisse über Unentscheidbarkeit, das Tarskische Prinzip der Nichtdefinierbarkeit der Wahrheit und die Existenz des Turingschen Halteproblems lediglich Aussagen über die Unmöglichkeit bestimmter Beweise oder Operationen, so hätten sie ihre grundlegende Bedeutung für die mathematische Logik niemals erringen können.

Die mathematische Logik ist an den Hierarchien gewachsen, die die limitativen Ergebnisse unmittelbar erzeugen: z. B. an der Konsistenzstärkehierarchie der Mengenlehre, und an der Hierarchie der Turing-Grade der Rekursionstheorie, um nur zwei zu nennen. In diesem Sinne weisen die limitativen Ergebnisse zugleich über die durch sie festgesetzten Grenzen hinaus, indem sie die Grenze als Abgrenzung festsetzen.

Als Beispiel mag der Gödelsche Unvollständigkeitssatz dienen: Oberflächlich besagt er zunächst nur die Nichtbeweisbarkeit von Konsistenzaussagen in einem gegebenen (hinreichend starken) formalen System T ; als neuerliche Klassifikation verstanden, teilt er die Sätze der Sprache in die Klasse der im System T beweisbaren oder widerlegbaren und die von T nicht entscheidbaren Sätze. Iteratives Anwenden des Gödelschen Unvollständigkeitssatzes (also der Übergang von T auf $T+\text{Cons}(T)$) erzeugt die Konsistenzstärkehierarchie, auf deren unterster Stufe wir die in T entscheidbaren Sätze haben, auf der nächsthöheren die in $T+\text{Cons}(T)$, aber nicht in T entscheidbaren Sätze, dann die in $T+\text{Cons}(T)+\text{Cons}(T+\text{Cons}(T))$, aber nicht in $T+\text{Cons}(T)$ entscheidbaren Sätze, und so durch die iterative Konstruktion hindurch.¹

Diese Abgrenzungen und Hierarchisierungen, die aus den limitativen Ergebnissen der Logik gewonnen werden, spielen in der Grundlagenforschung der Mathematik eine besondere Rolle. Ich möchte an dieser Stelle nur einen der vielen Aspekte der Grundlagenforschung der Mathematik betrachten: Die Diskussion um die Existenz und die Beschreibung des geeigneten Axiomensystems,

¹ Nur der Vollständigkeit halber möchte ich erwähnen, daß die Konsistenzstärkehierarchie keineswegs so linear aussieht, wie es hier erscheinen mag. Harvey Friedman hat gezeigt, daß die Struktur der Konsistenzstärkehierarchie extrem kompliziert ist; vgl. Friedman (1998).

in dem man Mathematik betreiben soll.² In den letzten Jahren hat sich hier eine Verwendung der genauen Kalibrierbarkeit der limitativen Aspekte mathematischer Theorien durchgesetzt, die es ermöglicht, gewisse Arten der Limitativität als negative Kriterien für die Auswahl solcher Axiomensysteme zu verwenden. Ich werde in diesem Vortrag die Formalisierung des Begriffes der „Restriktivität“ durch Penelope Maddy beschreiben.³

Die Suche nach einem Axiomensystem der Mathematik setzte mit der Entwicklung der axiomatischen Methode durch Hilbert⁴ und dem daraus entstehenden Grundlagenstreit am Anfang des zwanzigsten Jahrhunderts ein. Der Wettlauf um das allgemein anerkannte Axiomensystem für die Mathematik wurde im Laufe des zwanzigsten Jahrhunderts von den Zermelo-Fraenkelschen Axiomen ZF für die Mengenlehre gewonnen. Ein finiter oder finitärer Konsistenzbeweis, wie ihn sich noch Hilbert erhoffte, kann nach dem Gödelschen Unvollständigkeitssatz für dieses System nicht gefunden werden.

Der Großteil der modernen Mathematik findet im Axiomensystem ZF (oder zumeist sogar schwachen Fragmenten von ZF) statt. Das limitative Phänomen der Unvollständigkeit liefert uns stets Sätze, die auf der Basis dieses Systems nicht entschieden werden können. Besonders schwer wiegen hierbei diejenigen unentscheidbaren Sätze, denen die mathematische Praxis zunächst Natürlichkeit attestiert hat.

Über die eher theoretische Konsistenzfrage hinaus entstehen nämlich beim konkret gegebenen System ZF natürlicherweise weitere Aussagen, die von diesem System nicht entschieden werden: Große Kardinalzahlexiome⁵, technische Axiome wie das *Proper Forcing Axiom* PFA und auch einige Fragen, die von den Mathematikern als natürliche Fragen über Mengen akzeptiert werden, wie die Kontinuumshypothese CH.

Die Feststellung, daß in der Tat Fragen existieren, die von den Mathematikern für natürliche Fragestellungen über mathematische Objekte gehalten werden, die aber auf der Basis des allgemein akzeptierten Axiomensystems ZF nicht entschieden werden können, legt die Frage nahe, ob wir unser Axiomensystem erweitern müssen.

Durch die Rolle, die die Kontinuumshypothese als sogenanntes erstes Hilbertsches Problem⁶ gespielt hat, dient die Kontinuumshypothese stets als bedeutendes Beispiel für das Phänomen der Unvollständigkeit. Durch Gödel und Cohen⁷ ist ihre Unabhängigkeit vom Axiomensystem ZF bewiesen worden,

² Dies schließt die Positionen mit ein, daß es ein solches Axiomensystem nicht gibt oder nicht geben kann.

³ Maddy (1997); Abschnitt III. 6.

⁴ Hilbert (1899).

⁵ Auch „Starke Axiome der Unendlichkeit“ genannt; für eine ausführliche Diskussion vgl. Kanamori (1994).

⁶ Hilbert (1900), S. 253–97.

⁷ Gödel (1938), S. 556–7 und Cohen (1963), S. 1143–8.

und weitere metamathematische Untersuchungen haben gezeigt, daß die Kontinuumshypothese auch nicht von den üblichen Erweiterungen von ZF entschieden werden kann.⁸

Es gibt viele verschiedene Möglichkeiten, mit diesem Faktum umzugehen. Die zwei wichtigsten sind allerdings:

1. Wir können die Fragen, die von ZF nicht entschieden werden, wie z. B. die Kontinuumshypothese CH, für uninteressant erklären.
2. Wir machen uns auf die Suche nach neuen Axiomen, die ZF erweitern und die Kontinuumshypothese entscheiden.

Natürlich sind diese beiden Strategien nur bloße Schablonen, die zur Ausprägung der tatsächlichen Positionen in der Philosophie der Mathematik beitragen. Da ich in diesem Vortrag auf eine eigentümliche Verwendung der limitativen Ergebnisse in der naturalistischen Methodologie Penelope Maddys eingehen möchte, werde ich es bei diesen zwei sehr grundlegenden und wenig spezifizierten Positionen belassen.

Strategien, die den beiden genannten Grundmustern entsprechen, sind von namhaften Grundlagenforschern vertreten worden:

Strategie (1.) ist eine Position, die der Praxis des Mathematikers entspricht.⁹ Anhänger dieser Strategie sind der Meinung, daß die bisherigen Axiome bereits alle Intuitionen über mathematische Objekte enthalten, und Fragen, die auf dieser Basis nicht beantwortet werden können, jenseits unserer Intuition (z. B., weil sie zu allgemein sind), und damit außerhalb des mathematischen Interesses sind. Diese Position wurde von Feferman in seinem berühmten Aufsatz „Does mathematics need new axioms?“¹⁰ vertreten, in der er die Kontinuumshypothese als „inherently vague“ bezeichnete.

The continuum [...] is *not* a definite mathematical object. Rather, it's a conception [...] clear enough for us to ascribe many evident properties to that supposed object [...] but which cannot be sharpened in any way to determine or fix that object itself. (Feferman (2000), S. 405)

Strategie (2.) wird normalerweise als *Gödels Programm* bezeichnet. Für den mathematischen Realisten¹¹ Gödel war die Unentscheidbarkeit der Kontinuumshypothese nicht akzeptabel:

A proof of the undecidability of [CH] from the accepted axioms of set theory [...] would by no means solve the problem. [...] Its undecidability from the

⁸ Vgl. Lévy & Solovay (1967), S. 234–48.

⁹ Ich verwende hier die etwas eigentümliche, aber übliche Sprechweise der mathematischen Logiker, die den „Mathematiker“, der ein an Logik nicht interessierter Mathematiker ist, vom „Logiker“, der ein an Logik interessierter Mathematiker ist, trennen.

¹⁰ Feferman (1999), S. 99–111.

¹¹ In der Philosophie der Mathematik wird diese Position meistens als „Platonismus“ bezeichnet. Vgl. Shapiro (2000), S. 27.

axioms being assumed today can only mean that these axioms do not contain a complete description of that reality. (Gödel 1947, S. 260)

Gödel forderte daher dazu auf, nach neuen Axiomen der Mathematik zu suchen, die über das bislang akzeptierte Axiomensystem ZF hinausgehen und dann diejenigen Fragen beantworten, die von ZF nicht entschieden wurden. Obwohl Gödels eigene Motivation für sein Programm¹² sein fester Glaube an die objektive Existenz mathematischer Gegenstände war, kann man den methodologischen Ansatz von Gödels Programm verfolgen, ohne selbst mathematischer Realist zu sein, wie Maddys Abkehr von ihrer ursprünglich realistischen Position beweist.¹³

Die Frage, welche Rolle Erweiterungen von ZF für die Mathematik und vor allen Dingen für die Grundlagenforschung der Mathematik spielen sollen, ist nach Fefermans Plenarvortrag beim Jahrestreffen der *American Mathematical Society* in San Diego CA 1997 und seinem gleichnamigen bereits genannten Artikel „Does mathematics need new axioms?“ in Kreisen der mathematischen Logik und Philosophie der Mathematik kontrovers diskutiert worden.

Die *Association of Symbolic Logic* hat zu diesem Thema auf der Jahrestagung 2000 in Urbana-Champaign IL eine Podiumsdiskussion mit Solomon Feferman, Harvey Friedman, Penelope Maddy und John Steel veranstaltet, bei der die Vertreter der verschiedenen Strategien miteinander diskutieren konnten.¹⁴

Ich möchte hier im folgenden die Strategien (1.) und (2.), vertreten durch Feferman und Maddy in ihren jeweiligen Diskussionsbeiträgen unter besonderer Berücksichtigung der Bedeutung von limitativen Phänomenen (als paradigmatisches Beispiel gilt stets die Nichtentscheidbarkeit von CH aus den Axiomen von ZF) diskutieren, und aufzeigen, daß hier in beiden Fällen die limitativen Phänomene der Logik als Kriterium benutzt wird, allerdings in sehr unterschiedlicher Art.

Feferman steht hier für die Position, alle von einem bestimmten Grundsystem (z. B. ZF) nicht entschiedenen Sätze als „inherently vague“ und damit mathematisch uninteressant zu klassifizieren. Feferman verwendet das limitative Resultat als Abgrenzung der *sinnvollen* mathematischen Fragen (diejenigen, die im Grundsystem beantwortbar sind) von den *unsinnigen* Fragen (diejenigen, deren Beantwortung nicht im Basissystem möglich ist). Wenn man wie Feferman und andere der Meinung ist, daß ZF die maximale Formalisierung unserer mathematischen Intuition ist, so ist diese Position die folgerichtige Konsequenz

¹² Eine Diskussion der wissenschaftstheoretischen Bedeutung von Gödels Programm vor allen Dingen im Kontext der mengentheoretischen Forschung der letzten Jahre findet sich in Hauser (2001), S. 245–85.

¹³ Maddy (2000), S. 413–22: „What I propose is that philosophical considerations like those surrounding Platonism are largely irrelevant to the very real methodological question of set theoretic practice.“ (S. 415).

Für eine detaillierte Diskussion ihres naturalistischen Standpunkts, vgl. Maddy, (1997).

¹⁴ Die Vorträge und Diskussionen sind als Feferman et al. (2000) veröffentlicht worden.

im Bereich der mathematischen Grundlegung. Sobald sich herausstellt, daß eine Frage von dieser maximalen Kodifizierung unserer mathematischen Vorstellung nicht entschieden wird, reicht die Frage offensichtlich in Bereiche jenseits der Intuition und ist damit dem mathematischen Denken unzugänglich.

Maddy im Gegensatz ist nicht der Meinung, daß ZF bereits alle mathematischen Intuitionen axiomatisiert und darstellt und versucht, ein möglichst großzügiges Axiomensystem zu finden, welches ihren Maximen *Maximize* und *Unify* genügt.

Maximize ist eine Faustregel, die besagt, daß „mathematics should be as generous as possible“¹⁵; während *Unify* uns zwingt, eine einzelne Theorie zu finden, die dies erfüllt.¹⁶

Maddy Abgrenzung trennt *ungeeignete* Kandidaten für Axiomensysteme (diejenigen, die *Maximize* und *Unify* verletzen) von *geeigneten* Kandidaten für Axiomensysteme (diejenigen, die *Maximize* und *Unify* erhalten).¹⁷

Hierbei verletzt ein Axiomensystem *Maximize*, falls es zu viele erwünschte Modelle, in denen wir Mathematik betreiben möchten, ausschließt. Die Maxime *Maximize* scheint also zunächst zu versuchen, dem limitativen Phänomen zu entkommen, indem wir auf die Suche nach einem maximalen Axiomensystem gehen.¹⁸

¹⁵ Maddy (1997); S. 210.

¹⁶ Natürlich sind beide Maximen angreifbar, und sind auch angegriffen worden. Besonders angreifbar scheint mir *Unify* zu sein, und Maddy argumentiert für *Unify* in Maddy (2001), S. 17–27: „Set theoretic practice does in fact have as one of its goals that of providing a foundation [...] for classical mathematics.“ (S. 19) Auch diese Aussage ist natürlich angreifbar. Details zu den Maddyschen Maximen finden sich in Maddy (1988); S. 481–511, in Abschnitt III. 5 ihres Buchs Maddy (1997) und in Maddy (2001), S. 17–27.

¹⁷ Der technische Begriff, der „*ungeeignet*“ entspricht, ist der Begriff der *Restriktivität* (Maddy 1997; S. 224).

Man vergleiche auch die Diskussion dieses Begriffs in Löwe (2001), S.347–54.

¹⁸ Sowohl Feferman als auch Maddy haben eine soziologische Herangehensweise an die Mathematik. Das Maß, an dem sich die Nützlichkeit der Abgrenzung (entweder sinnvolle von sinnlosen Fragen oder geeignete von ungeeigneten Axiomensystemen) messen muß, ist die mathematische Praxis. Z. B. argumentiert Feferman gegen die Notwendigkeit von neuen Axiomen für die Mathematik, indem er die fehlende Nützlichkeit für den *working mathematician* als Argument anführt:

„There is not a shred of evidence so far that we will need anything beyond ZFC – or even much weaker systems – to settle outstanding combinatorial problems of interest to the working mathematician.“ (Feferman 2000, S. 407).

Ebenso möchte Maddy in ihrer naturalistischen Position solche Ergebnisse ausschließen, die der Praxis widersprechen: „[If something] conflicts with our naturalized model of practice ... [it] is unacceptable to our naturalistic philosophers of mathematics.“ (Maddy 1997, S. 202)

Auch wenn es zunächst scheint, als versuche der Maddysche Ansatz das limitative Phänomen zu umgehen, benutzt Maddys Methode bei der Analyse, ob eine Theorie *geeignet* oder *ungeeignet* ist, gerade wiederum limitative Theoreme.

Maddys Beispiel für diesen Fall sind $T_0 := \text{ZFC} + „V = L“$ und $T_1 := \text{ZFC} + „\text{es existiert eine meßbare Kardinalzahl}“$.¹⁹ T_0 schließt die Existenz von inneren Modellen²⁰ von T_1 aus:

Theorem 1 (Gödel 1938) Falls M ein Modell von T_0 ist und N ist ein inneres Modell von M , dann ist auch N ein Modell von T_0 .²¹

Theorem 2 (Scott 1961) T_0 impliziert die Negation von T_1 .²²

Die Theoreme 1 und 2 zusammen bilden ein limitatives Theorem: Sie bestimmen eine Grenze der Theorie T_0 , indem sie sagen, daß sie nicht in der Lage ist, bestimmte innere Modelle zu realisieren. Im Gegensatz dazu schließt T_1 nicht nur Modelle von T_0 nicht aus, sondern enthält stets solche:

Theorem 3 Falls M ein Modell von T_1 ist, so gibt es ein inneres Modell L von M , so daß L ein Modell von T_0 ist.²³

Vor dem Hintergrund der Maxime *Maximize* ist also $T_1 = \text{ZFC} + „\text{es existiert eine meßbare Kardinalzahl}“$ für Maddy zu bevorzugen, denn man kann sowohl T_0 als auch T_1 in der Theorie T_1 realisieren, aber nicht umgekehrt. T_0 als Basistheorie der Mathematik anzunehmen, nimmt uns die Möglichkeit, über Konsequenzen und Eigenschaften der Theorie T_1 in inneren Modellen zu untersuchen, und widerspricht nach Maddy daher *Maximize*.²⁴

Die Limitativität, die von Maddy für das Kriterium der Restriktivität als Grund der Ablehnung von T_0 verwendet wird, ist nicht die Limitativität der Gödelschen Unvollständigkeitssätze. Eine solche Limitativität wäre vom Typ „ T beweist, daß die Konsistenz von S nicht beweisbar ist“ oder „ T beweist, daß die Existenz eines Modells von S nicht beweisbar ist“ – in diesem Fall erzeugt die Limitativität die Konsistenzstärkehierarchie; in unserem Fall liegt eine Limitativität vom Typ „ T beweist, daß die Existenz eines *inneren* Modells von S widerlegbar ist“.

Ein Restriktivitätsbegriff auf der Basis der Konsistenzstärkehierarchie kann nicht wirklich erklären, warum T_0 abzulehnen sei: T_0 und die sicherlich nicht gern als restriktiv erkannte Theorien ZF und ZFC haben die gleichen Konsi-

¹⁹ Für Definitionen verweise ich auf Kanamori (1994).

²⁰ Falls $M=(M, \in)$ ein Modell einer Theorie T ist, so heißt eine Teilklasse N von M ein inneres Modell einer Theorie S falls (N, \in) ein Modell von S ist, also das Relationssymbol durch dieselbe Relation wie in M interpretiert wird.

²¹ Gödel (1940).

²² Scott (1961), S. 521–4.

²³ Devlin (1984); Theorem 4.3.

²⁴ Dieser Absatz ist nur eine Skizze des in Maddy (1997), Abschnitt III.6 ausführlich diskutierten Beispiels.

stärken. Zudem schließt eine niedrige Konsistenzstärke nicht *a priori* die Möglichkeit der Realisierung stärkerer Theorien aus: Falls T_1 konsistent ist, so gibt es Modelle von T_∞ , in denen der Satz „ T_1 ist konsistent“ wahr ist.

Wie Theoreme 1 und 2 zeigen, verändert sich die Situation, wenn man von beliebigen Modellen (also der Konsistenzbehauptung) zu inneren Modellen übergeht. Anstatt innere Modelle als den korrekten Realisierungsbegriff zu verwenden, kann man Maddysche Restriktivitätsbegriffe auch für andere Modellklassen betrachten und untersuchen.²⁵

Literatur

- COHEN, Paul: The independence of the Continuum Hypothesis I, *Proceedings of the National Academy of Sciences U.S.A.* 50, 1963, S. 1143–1148.
- DEVLIN, Keith J.: *Constructibility*, Berlin 1984 [Perspectives in Mathematical Logic].
- FEFERMAN, Solomon: Does mathematics need new axioms?, *American Mathematical Monthly* 106, 1999, S. 99–111.
- FEFERMAN, Solomon: Why the programs for new axioms need to be questioned, *Bulletin of Symbolic Logic* 6, 2000.
- FEFERMAN, Solomon, Harvey M. FRIEDMAN, Penelope MADDY & John R. STEEL, Does mathematics need new axioms?, *Bulletin of Symbolic Logic* 6 (2000), S. 401–46.
- FRIEDMAN, Harvey: *Proof Theoretic Degrees*, FOM Posting, Sun, 2 Aug 1998 21:37:57 +0100.
- GÖDEL, Kurt: The consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-Hypothesis, *Proceedings of the National Academy of Sciences U.S.A.* 24, 1938, S. 556–7.
- GÖDEL, Kurt: *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory*, Princeton 1940 [Annals of Mathematical Studies 3].
- GÖDEL, Kurt: What is Cantor’s Continuum Problem?, *American Mathematical Monthly* 54 (1947), S. 515–25. Zitiert nach dem Nachdruck in: Solomon Feferman et al. (eds.), *Kurt Gödel, Collected Works, Volume II*, Oxford 1990.
- HAUSER, Kai: Objectivity over objects: A case study in theory formation, *Synthese* 128 (2001), S. 245–85.
- HILBERT, David: *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig 1899.
- HILBERT, David: *Mathematische Probleme*, Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1900.
- KANAMORI, Akihiro: *The higher infinite, Large cardinals in set theory from their beginnings*, Berlin 1994.
- LÉVY, Azriel/M. Solovay, Robert M.: Measurable cardinals and the continuum hypothesis, *Israel Journal of Mathematics* 5, 1967, S. 234–48.
- LÖWE, Benedikt: A first glance at non-restrictiveness, *Philosophia Mathematica* 9, 2001, S. 347–54.

²⁵ Vgl. auch Maddy (1997), S. 227.

- MADDY, Penelope: Believing the Axioms I, *Journal of Symbolic Logic* 53, 1988, S. 481–511.
- MADDY, Penelope: *Naturalism in Mathematics*, Oxford 1997.
- MADDY, Penelope: Does mathematics need new axioms?, *Bulletin of Symbolic Logic* 6, 2000, S. 413–22.
- MADDY, Penelope: Some Naturalistic Reflections on Set Theoretic Method, *Topoi* 20, 2001, S. 17–27.
- SCOTT, Dana S. : Measurable cardinals and constructible sets, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, *Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques* 9 (1961), S. 521–4.
- SHAPIRO, Stewart: Thinking about mathematics, *The philosophy of mathematics*, Oxford 2000.