Seminar über Kurver und Flächen, Sommersemester 2018
David Lindemann

In dem Seminar werden wir verschiedene Eigenschaften von Kurven im $\mathbb{R}^2$ und im $\mathbb{R}^3$, sowie von Flächen im $\mathbb{R}^3$ studieren. Der Fokus des Seminars liegt auf differentialgeometrischen Eigenschaften dieser Objekte. Wir werden uns an dem Buch [B] orientieren.

Vorläufige Liste der Vorträge:

1) Grundsätzliche Definitionen von Kurven, deren Krümmung, Regularität... Ziel ist es, zu beweisen, dass die Umlaufzahl einer einfach geschlossenen orientierten Kurve ± 1 ist (Satz 2.2.10 [B]).

2) Fokus des 2. Vortrags sind konvexe geschlossene Kurven (Satz 2.2.15 [B]) und der Vierscheitelsatz (Satz 2.2.17 [B]).

3) Die sogenannte isoparametrische Ungleichung (Satz 2.2.20 [B]) ist Hauptteil des Vortrags. Der Beweis benötigt eine kurze einführung in die Theorie der Fourierreihen. Zusätzlich sollten grundsätzliche Definitionen wie Krümmung für Kurven im $\mathbb{R}^3$ gegeben werden, sowie der Satz von Frenet (Satz 2.3.7 [B]) im $\mathbb{R}^3$ behandelt werden.

4) Hauptsatz der Raumkurventheorie (Satz 2.3.9 [B]) und Analogon im $\mathbb{R}^2$. Außerdem Krümmungsapproximation der Krümmung von Raumkurven durch Polygone (Satz 2.3.13 [B]).

5) Thema sind Knoten im $\mathbb{R}^3$. Ziel ist es, die Sätze von Fenchel (Satz 2.3.18 [B]) und von Fáry-Milnor (Satz 2.3.21 [B]) zu beweisen.

6) Ab diesem Vortrag geht es um Flächen im $\mathbb{R}^3$. Grundlegende Begriffe sind erkären, wie z.B. Regularität, glatte Funktionen (Prop. 3.1.9 & 3.1.11 [B]) und deren Differential auf Flächen, Diffeomorphismen, Tangentialebenen, (lokale) Parametrisierungen. In diesem Vortrag sind viele Rechenbeispiele wichtig, da die Techniken für die restlichen Vorträge sitzen sollten.

7) Thema sind die erste Fundamentalform, Normalenfelder, Orientierbarkeit und Kriterien für Orientierbarkeit (Satz 2.4.7 [B]), die Weingarten-Abbildung und deren Selbstadjungiertheit (Prop. 2.5.5 [B]) sowie die zweite Fundamentalform. Auch hier sind viele Beispiele wichtig.

8) In diesem Vortrag geht es um verschiedene Krümmungsbegriffe (Normalen-, Gauß-, Hauptkrümmung, mittlere Krümmung) von Flächen im $\mathbb{R}^3$. Behandelt werden sollen der Satz von Rodriguez über Krümmungslinien, sowie der Satz 3.6.15 (und Korollar 3.6.16) in [B] über bestimmte lokale Parametrisierungen.

9) Zeigen Sie, dass jede kompakte nichtleere reguläre Fläche einen Punkt mit positiver Gaußkrümmung enthält (Satz 2.6.17 [B]). Beweisen Sie, dass die sogenannte Gaußabbildung auf einer kompakten nichtleeren regulären Fläche surjektiv ist. Führen Sie Integration auf Flächen ein und beweisen Sie Formeln für die Variation des Flächeninhalts (Satz 3.8.8 [B]). Definieren Sie Minimalflächen (mit Beispielen) und zeigen Sie, dass es keine kompakten Minimalflächen gibt (Korollar 3.8.16 [B]).

10) Führen Sie die grundlegenden Begriffe der inneren Geometrie von Flächen ein (Isometrien, Vektorfelder entlang Flächen, Lieklammer, . . .). Definieren Sie die kovariante Ableitung

von Kurven und allgemeiner von Vektorfeldern und erklären Sie deren Eigenschaften ($\mathbb{R}$-Linearität, Konzept der Chrisoffelsymbole, ...). Führen Sie außerdem den Riemannschen Krümmungstensor ein und beweisen Sie die Gaußgleichung (Satz 4.3.7 [B]). Wichtig bei diesen abstrakteren Konzepten ist, dass sie Beispielrechnungen in lokalen Koordinaten vorführen, rein „algebraisches“ Verständniss reicht in vielen Anwendungen leider nicht aus (z.B. in der gesamten Physik).

11) Beweisen Sie Satz 4.3.8 [B] (Theorema egregium). Besprechen Sie weitere Eigenschaften des Riemannschen Krümmungstensors (Lemma 4.3.10 in [B]) und geben Sie lokale Formeln für die Gaußkrümmung an. Fassen Sie mit Beispielen zusammen, welche behandelten Konzepte als Teil der inneren Geometrie angesehen werden können und welche nicht (siehe Tabellen 1&2 auf Seite 183–184 [B]). Führen Sie das Riemannsche Metriken auf Flächen ein und besprechen Sie Länge und Energie von Kurven. Zeigen Sie Satz 4.5.5 [B] über die Variation der Energie. Definieren Sie Geodätische und zeigen Sie (skizzenhaft) lokale Eindeutigkeit und Existenz von Geodäten. Zeigen Sie außerdem, dass Geodäten konstante Geschwindigkeit haben. Führen Sie abschließend das Konzept der geodätischen Krümmung ein und geben Sie eine lokale Formel an.

12) Definieren Sie die Exponentialabbildung auf Flächen mit Riemannscher Metrik und führen Sie Riemannsche Normalkoordinaten ein. Beweisen Sie Satz 4.6.7 [B] über Eigenschaften der Riemannschen Metrik in Riemannschen Normalkoordinaten und vergleichen Sie ihn mit Satz 3.6.15 [B] aus dem 8. Vortrag. Behandeln Sie außerdem Satz 4.6.9 [B] (Gauß-Lemma, nur Beweisskizze). Definieren Sie Jacobi-Felder. Ziel ist es, die Gleichung (4.15) auf Seite 216 in [B] zu erkären und ein möglichst einfaches Beispiel für eine Lösung zu besprechen.

13) In dem letzten Vortrag geht es um Variation Riemannscher Metriken und die daraus resultierenden Variationen der Christoffelsymbole, des Flächenelements, und der Gaußkrümmung. Besprechen Sie unbedingt Beispiele. Beweisen Sie außerdem Satz 5.2.7 [B]. Falls Sie schon Differentialgeometrie gehört haben (oder Lust auf Arbeit haben), definieren Sie noch den Ricci-Fluss und geben ein Beispiel.

Schauen Sie, dass Sie mit der Zeit hinkommen. Niemand wird Ihnen verübeln, wenn Sie etwas schneller mit Ihrem Vortrag fertig sind. Generell ist es manchmal besser, extrem technische Schritte in Beweisen zu skizzieren anstatt jede einzelne Rechnung vorzutragen, und statt dessen lieber noch ein Beispiel mehr zu besprechen, denn gerade in der Differentialgeometrie (unabhängig von der Dimension der Mannigfaltigkeiten) ist es am Anfang häufig schwierig, die abstrakten Konzepte in konkrete Rechnungen zu übersetzen.

Literatur

[B] C. Bär, *Elementare Differentialgeometrie*, 2. Auflage, De Gruyter Verlag (2010).