Fachbereich
Mathematik
Prof. Dr. Janko Latschev
PD Dr. Ralf Holtkamp

Übungsaufgaben Mathematik I für Studierende der Physik: Blatt 9 zur Abgabe am 23.1.2019 (in den Übungen).

Die Lösungen der folgenden Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und handschriftlich abzugeben. Bei diesem Aufgabenblatt können Sie zu zweit zusammenarbeiten und Lösungen abgeben. Dabei müssen allerdings beide, die zusammen abgeben, derselben Übungsgruppe angehören, und jeder Abgabepartner sollte erkenntlich bei der Abgabe mindestens eine Aufgabenlösung aufgeschrieben haben.

Aufgabe 1: (1+1+2+2+1+1+0 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils alle Stammfunktionen der folgenden Funktionen, beschreiben Sie Ihren Lösungsweg und überprüfen Sie Ihr Resultat durch Ableiten.

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = xe^{-x^2}$,

(b) $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^2}{(8x^3+27)^{\frac{2}{3}}}$,

(c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin^3 x$,

(d) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x \arctan(x^2)$,

(e) $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = (x^2 + 2x) \ln x$,

(f) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sinh(x) + x \cosh(2x)$.

(g) $f\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$,

Hinweis: Ist F eine Stammfunktion von f, so erhält man alle Stammfunktionen durch Addition einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Man schreibt vereinfachend $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$ als *unbestimmtes Integral*, wobei dies keine eindeutig bestimmte Funktion bezeichnet, sondern (alle) sich von F nur um eine Konstante unterscheidende Funktionen.

Aufgabe 2: (3 Punkte)

Sind $P(x)$ und $Q(x)$ Polynome mit reellen Koeffizienten (in einer Variablen x), und ist $\frac{P(x)}{Q(x)}$ zu integrieren, so nützt oft die Methode der *Partialbruchzerlegung*:

Im Fall, dass das Polynom im Nenner nur reelle Nullstellen hat, schreibt man den Bruch als Summe mehrerer Brüche mit Polynomen der Form $(x + a)^n$ im Nenner (mit geeigneten $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$). Andernfalls zerlegt man den Bruch in Brüche mit Nennern der Form $(x^2 + cx + d)^n$ (mit $c, d \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$).

Beispielsweise ist $3x + 3x^2 + x^3 + x^4 = x(x + 1)(x^2 + 3)$ und so lässt sich die folgende Zerlegung nachrechnen:

$$\frac{3 + 25x + 24x^2 + 11x^3 + 6x^4 + x^5}{3x + 3x^2 + x^3 + x^4} = x + 5 + \frac{x + 4}{x^2 + 3} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x + 1}.$$

Für die rechte Seite lässt sich dann leichter eine Stammfunktion finden.

Bestimmen Sie eine analoge Zerlegung von

$$S(x) = \frac{3x^3 + x^2 + 2x + 2}{x^4 + x^3 + x^2 + x}$$

und berechnen Sie damit eine Stammfunktion von S.

Aufgabe 3: (1+1 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Integrale für alle ganzen Zahlen n und m:

(a) $\int\limits_0^{2\pi} e^{inx} e^{imx} \mathrm{d}x,$

(b) $\int\limits_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx) \mathrm{d}x,$

Aufgabe 4: (1 Punkt)
Berechnen Sie die uneigentlichen Integrale:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}.$$

Aufgabe 5: (2 Punkte)
Sei $f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative monoton fallende Funktion.
Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ genau dann konvergiert, wenn das uneigentliche Integral $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ existiert.