Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich
Mathematik
Prof. Dr. Janko Latschev
PD Dr. Ralf Holtkamp

Übungsaufgaben Mathematik I für Studierende der Physik: Blatt 8 zur Abgabe am 16.1.2019 (in den Übungen).

Die Lösungen der folgenden Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und handschriftlich abzugeben. Bei diesem Aufgabenblatt können Sie zu zweit zusammenarbeiten und Lösungen abgeben. Dabei müssen allerdings beide, die zusammen abgeben, derselben Übungsgruppe angehören, und jeder Abgabepartner sollte erkenntlich bei der Abgabe mindestens eine Aufgabenlösung aufgeschrieben haben.

Aufgabe 1: (2+2 Punkte)
Konvergieren die Funktionenfolgen auf dem angegebenen Definitionsbereich gleichmäßig? Beweisen Sie Ihre Antwort!

(a) $f_n(x) = \dfrac{1}{x+n}$ auf $X = (0, \infty)$.

(b) $g_n(x) = \dfrac{nx}{n+x+1}$ auf $X = [0, 1]$.

Aufgabe 2: (3 Punkte)
Sei

$$f_n(x) := \frac{nx}{1+n^2x^2}.$$

Berechnen Sie die Grenzfunktion $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ der Funktionenfolge auf dem Definitionsbereich $D = [0, 1]$ und zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\geq 1}$ nicht auf D, aber auf $D_a = [a, 1]$ für jedes $0 < a < 1$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

Aufgabe 3: (2 Punkte)
Zeigen Sie die gleichmäßige Konvergenz der folgenden Reihe auf $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}.$$

Aufgabe 4: (2 Punkte)
Betrachten Sie die Taylorentwicklung der Sinusfunktion in $x_0 = 0$ und entscheiden Sie mit Hilfe des Restgliedes in Lagrange-Form, ab welchem $k \in \mathbb{N}$ die Approximation durch das k-te Taylorpolynom so genau ist, dass der Fehler auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ stets kleiner als $\frac{1}{100}$ ist.

Aufgabe 5: (2 Punkte)
Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ mit Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$ habe den Konvergenzradius $R \in (0, \infty]$.
Zeigen Sie, dass auch die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k z^{k-1}$ den Konvergenzradius R hat.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ gilt.

Anmerkung: Mit vollständiger Induktion folgt dann, dass Potenzreihen auf dem Inneren ihres Konvergenzkreises beliebig oft differenzierbare Funktionen definieren.

Aufgabe 6: (3 Punkte)
Zeigen Sie, dass jede stetige nichtnegative Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, deren Integral Null ist, die Nullfunktion ist.

Aufgabe 7: (0 Punkte)
Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion. Beweisen Sie:

(a) Für jeden Punkt $x_0 \in (a,b)$ existieren die Grenzwerte

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \searrow x_0} f(x),$$

und f ist genau dann stetig im Punkt x_0, wenn diese beiden Grenzwerte übereinstimmen.

(b) f hat höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen, d.h. Punkte $x \in [a,b]$, an denen f nicht stetig ist.
Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 6 von Blatt 2.