Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich
Mathematik
Prof. Dr. Janko Latschev
PD Dr. Ralf Holtkamp

Übungsaufgaben Mathematik I für Studierende der Physik: Blatt 3 zur Abgabe am 28.11.2018 (in den Übungen).

Die Lösungen der folgenden Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und handschriftlich abzugeben. Bei diesem Aufgabenblatt können Sie zu zweit zusammenarbeiten und Lösungen abgeben. Dabei müssen allerdings beide, die zusammen abgeben, derselben Übungsgruppe angehören, und jeder Abgabepartner sollte erkenntlich bei der Abgabe mindestens eine Aufgabenlösung aufgeschrieben haben.

Aufgabe 1: (1+1+1 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Für die Folge $a_k = \frac{k+2}{k!}$ $(k \geq 0)$ konvergiert die Reihe $(\sum_{k=0}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ absolut.

(b) Für die Folge $a_k = \frac{k^3+2k}{k^4}$ $(k \geq 1)$ konvergiert die Reihe $(\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$.

(c) Sei $(a_k)_{k\geq 1}$ eine Folge komplexer Zahlen, so dass $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$ für alle $k \geq 1$. Dann konvergiert die Reihe $(\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$, aber im Allgemeinen nicht absolut.

Aufgabe 2: (2+2 Punkte)

(a) Beweisen Sie das sogenannte Wurzelkriterium für die Konvergenz von Reihen:

Es sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Gibt es eine Zahl θ mit $0 \leq \theta < 1$ und eine Zahl $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k > N$

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq \theta$$

gilt, dann ist die Reihe $(\sum_{k=0}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ absolut konvergent.

Hinweis: Argumentieren Sie mit Hilfe der geometrischen Reihe.

(b) Betrachten Sie die Reihe $(\sum_{k=0}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_k = 3^{-k}$ für gerades k und $a_k = 4^{-k}$ für ungerades k. Zeigen Sie mit Hilfe des Kriteriums aus Teilaufgabe (a) die (absolute) Konvergenz dieser Reihe. Zeigen Sie außerdem, dass das Quotientenkriterium in diesem Fall nicht (direkt) angewendet werden kann.

Aufgabe 3: (1+1+3 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und alle $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$, die Ungleichung

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}$$

gilt. Zeigen Sie außerdem

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}.$$

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabenteil (a) die Ungleichungskette

$$\frac{9}{4} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k} < 3 \quad \text{für} \quad n \geq 2.$$

(c) Zeigen Sie mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung, dass die Folge $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\geq 1}$ monoton wächst.
Anmerkung: Zusammen mit Aufgabenteil (b) folgt, dass die Folge $(1+\frac{1}{n})^n$ einen Grenzwert $l \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$ hat. Es gilt sogar $l = e$. Können Sie dies zeigen?

Aufgabe 4: (1+1+1+1 Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{3^k\, k!}{k^k}\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$

(b) $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^{k-1}}{(-k)^k}\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$

Hinweis: Verwenden Sie für (a) und (b) die vorhergehende Aufgabe!

(c) $\left(\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{i\pi k}{4}} z^k\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$,

(d) $\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 z^k\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$.