Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich
Mathematik
Prof. Dr. Janko Latschev
PD Dr. Ralf Holtkamp

Übungsaufgaben Mathematik I für Studierende der Physik: Blatt 1 zur (Einzel-)Abgabe am 14.11.2018 (in den Übungen).

Die Lösungen der folgenden Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und handschriftlich abzugeben. Bei diesem Aufgabenblatt können Sie zu zweit zusammenarbeiten und Lösungen abgeben. Dabei müssen allerdings beide, die zusammen abgeben, derselben Übungsgruppe angehören, und jeder Abgabepartner sollte erkenntlich bei der Abgabe mindestens eine Aufgabenlösung aufgeschrieben haben.

Aufgabe 1: (1+1+2 Punkte)
Sei im Folgenden die Menge M gegeben durch

$$\left\{\sqrt{2}, \emptyset, \{\emptyset, \sqrt{2}\}, \sqrt{2}, 1, \{\sqrt{2}, \emptyset\}, 2\right\}.$$

(a) Geben Sie ein Element von M an, das auch ein Element von einem Element von M ist. Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

(b) Ist die leere Menge $\emptyset$ eine Teilmenge von M? Ist sie ein Element von M? Begründen Sie Ihre Antworten jeweils kurz.

(c) Wieviele Elemente hat die Menge M? Listen Sie alle Teilmengen von M auf, die genau 4 Elemente haben.

Aufgabe 2: (1+1+1 Punkte)

(a) Negieren Sie folgende Aussagen (es genügt natürlich nicht, “es gilt nicht:” vor die Aussage zu schreiben):

  (i) Die Zahl $\sqrt{x}$ ist rational, falls x eine natürliche Zahl ist.

  (ii) Für alle natürliche Zahlen n gibt es eine natürliche Zahl m mit $m > n$.

(b) Schreiben Sie die folgende Aussage als gewöhnlichen Satz. Ist dieses Aussage wahr oder falsch?

$$\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R} : x^2 = y.$$

Aufgabe 3: (3 Punkte)
Gegeben seien Mengen A und B und eine Abbildung $f : A \to B$. Beweisen Sie, dass

$$f^{-1}(S \cup T) = f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T) \text{ und } f^{-1}(S \cap T) = f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T)$$

gilt für alle Mengen $S, T \subseteq B$. Überprüfen Sie, ob analog die folgende Gleichung

$$f(M \cap N) = f(M) \cap f(N)$$

gilt für alle $M, N \subseteq A$.

Aufgabe 4: (2+3 Punkte)
Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$ gilt:

$$2n \leq n^2 - 1 \leq 2^n - 1.$$

Aufgabe 5: (2+2 Punkte)
Wie das Summenzeichen ist rekursiv das **Produktzeichen** $\prod_{j=k}^{m}$ für $k, m \in \mathbb{N}$ definiert.
Sind $a_0, a_1, a_2, \ldots$ Elemente einer Menge M so, dass für alle $a, b \in M$ das Produkt $a \cdot b \in M$ mit neutralem Element 1 definiert ist, so ist

$$\prod_{j=k}^{m} a_j := 1 \quad \text{für} \quad m < k\,.$$

$$\prod_{j=k}^{m} a_j := a_k \cdot \prod_{j=k+1}^{m} a_j \quad \text{für} \quad k \leq m\,.$$

Im Folgenden sei $M = \mathbb{R}$. Beachten Sie, dass dann

$$\left(\prod_{j=m}^{k} a_j\right)^{-1} = \prod_{j=m}^{k} (a_j)^{-1}$$

gilt, wenn für beide Seiten alle Inversen definiert sind.
Für $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ definieren wir nun den **Binomialkoeffizienten** $\binom{x}{k}$ durch

$$\binom{x}{0} := 1,$$

falls $k = 0$, und für alle $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 0$ durch

$$\binom{x}{k} := \prod_{j=1}^{k} \frac{x-j+1}{j}.$$

(a) Zeigen Sie durch direkte Umformungen: Für alle $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 0$ gilt

$$\binom{x}{k} = \binom{x-1}{k-1} + \binom{x-1}{k}.$$

(b) Beweisen Sie mit Induktion und mit Hilfe von (a): Für alle $k \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{x}{j} = (-1)^k \binom{x-1}{k}.$$

Aufgabe 6: (1+1+2 Punkte)
Betrachten Sie die Menge $\mathbb{F}_3 := \{a, b, c\}$, auf der zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ durch folgende Tabellen definiert sind:

$+$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

$\cdot$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	c
c	a	c	b

Sie dürfen als gegeben annehmen, dass beide Verknüpfungen jeweils assoziativ und kommutativ sind. Verifizieren Sie, dass $(\mathbb{F}_3, +, \cdot)$ ein Körper ist:

(a) Bestimmen Sie bezüglich $+$ das neutrale Element und die Inversen.

(b) Bestimmen Sie bezüglich $\cdot$ das neutrale Element und die Inversen (soweit diese existieren).

(c) Zeigen Sie, dass das Distributivgesetz erfüllt ist.