

Mathematik I für Studierende der
Geophysik/Ozeanographie, Meteorologie und Physik
Vorlesungsskript

Janko Latschev
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
www.math.uni-hamburg.de/home/latschev

Hamburg, Wintersemester 2018/19
Weihnachtsvorlesung

0 / 30

Kapitel 1

Rückblick

1 / 30

\mathbb{R} und \mathbb{C}

Nach dem einführenden Kapitel zu Mengen, Aussagen und Abbildungen war unser erstes Thema die Beschreibung der Eigenschaften der reellen und komplexen Zahlen:

- **algebraische Eigenschaften:** \mathbb{R} und \mathbb{C} sind Körper, d.h. Addition und Multiplikation sind auf diesen Mengen definiert und erfüllen die üblichen Eigenschaften.
- \mathbb{R} ist linear angeordnet.
- \mathbb{C} ist algebraisch vollständig (jedes nichtkonstante komplexe Polynom besitzt eine komplexe Nullstelle).
- \mathbb{R} und \mathbb{C} sind (als metrische Räume) vollständig.

2 / 30

Vollständigkeit

Zur Erinnerung:

Definition (Metrischer Raum)

Sei X eine nichtleere Menge. Eine Funktion $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Metrik* (oder Abstandsfunktion) auf X , falls

- $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$,
- $d(x, y) = d(y, x)$, und
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Das Paar (X, d) nennt man dann einen *metrischen Raum*.

3 / 30

Beispiele

Neben \mathbb{R} und \mathbb{C} mit $d(x, y) = |x - y|$ gibt es noch viele weitere metrische Räume:

- \mathbb{R}^n oder \mathbb{C}^n : Für $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ und $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ definieren wir

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| := \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^2}$$

- Sei $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ die Menge der beschränkten Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ falls eine Konstante $M \in \mathbb{R}$ existiert so dass $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (wir verlangen aber z.B. nicht, dass f stetig ist!). Auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definieren wir eine Metrik durch

$$d_{\mathcal{B}}(f, g) := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)|.$$

4 / 30

Konvergenz im metrischen Raum $(\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), d_{\mathcal{B}})$ ist gerade gleichmäßige Konvergenz von Funktionen.

Definition (Vollständigkeit)

Ein metrischer Raum (X, d) heißt *vollständig*, falls jede Cauchy-Folge in X konvergiert.

Fakt

Alle oben genannten Beispiele metrischer Räume sind vollständig. Auch die Teilmenge $C_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der *beschränkten stetigen* Funktionen ist mit der Metrik $d_{\mathcal{B}}$ ein vollständiger metrischer Raum.

5 / 30

Vollständigkeit in \mathbb{R}

In \mathbb{R} kann man die Vollständigkeit äquivalent mit Hilfe der Ordnung beschreiben:

Äquivalente Formulierungen:

- **(Dedekind)** Für jede Zerlegung von \mathbb{R} in zwei Teilmengen,

$$\mathbb{R} = A \cup B,$$

so dass jede Zahl $a \in A$ kleiner ist als jede Zahl $b \in B$, d.h.

$$\forall a \in A \forall b \in B : a < b,$$

hat entweder A ein größtes oder B ein kleinstes Element.

- **(Supremumseigenschaft)** Jede nach oben beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ besitzt eine (eindeutige) *kleinste* obere Schranke.

6 / 30

Grenzwerte

Grenzwerte sind ebenfalls in jedem metrischen Raum definiert (in der Tat brauchten wir den Begriff ja zur Definition von Vollständigkeit).

Definition (Grenzwert)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge (x_n) von Punkten aus X konvergiert gegen $x \in X$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq N$ die Ungleichung $d(x_n, x) < \varepsilon$ gilt.

Kurz:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Nützlicher Satz:

Satz (Bolzano-Weierstraß)

Jede beschränkte Folge in \mathbb{R} oder \mathbb{C} (oder \mathbb{R}^n oder \mathbb{C}^n) hat eine konvergente Teilfolge.

7 / 30

Nützliche Grenzwerte von Folgen in \mathbb{R}

•

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

•

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{falls } -1 < q < 1 \\ 1 & \text{falls } q = 1 \\ \infty & \text{falls } q > 1 \\ \text{existiert nicht} & \text{falls } q < -1. \end{cases}$$

•

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

•

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

8/30

Nützliche Grenzwerte von Reihen in \mathbb{R} und \mathbb{C}

- Für $|z| < 1$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Für $|z| \geq 1$ konvergiert diese Reihe nicht.

- Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z.$$

- Wir haben auch Reihendarstellungen für die trigonometrischen Funktionen, z.B. gilt für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} \cdots,$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \cdots$$

9/30

Uneigentliche Grenzwerte von Funktionen

Die meisten von uns betrachteten Funktionen sind stetig. Daher interessieren uns in erster Linie uneigentliche Grenzwerte.

•

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^a = \begin{cases} \infty & \text{falls } a > 0 \\ 1 & \text{falls } a = 0 \\ 0 & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

•

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty, \quad \lim_{x \searrow 0} \ln x = -\infty.$$

•

$$\lim_{x \searrow 0} x^a \ln x = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\ln y}{y^a} = 0, \quad a > 0, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^a}{e^y} = 0, \quad a \in \mathbb{R}.$$

•

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

10 / 30

Stetigkeit

Konvergenz ist ein zentrales Konzept in der Analysis, und stetige Abbildungen sind genau diejenigen, welche *jede konvergente Folge im Definitionsbereich auf eine konvergente Folge im Wertebereich abbilden*.

Alternativ gibt es das sogenannte ε - δ -Kriterium:

ε - δ -Definition der Stetigkeit

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist stetig, falls zu jedem $x \in X$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x' \in X$ mit $d_X(x, x') < \delta$ für die Bildpunkte $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$ gilt. Kurz:

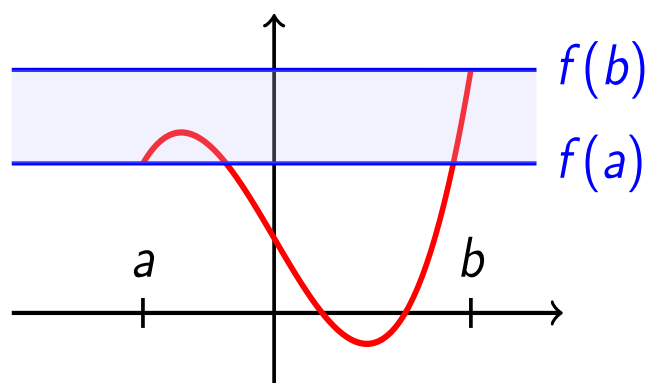
$$\forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x' \in X : d_X(x, x') < \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Stetige Funktionen auf Intervallen

Der nützlichste Satz über stetige Funktionen auf Intervallen ist der

Satz (Zwischenwertsatz)

Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ mindestens einmal an.

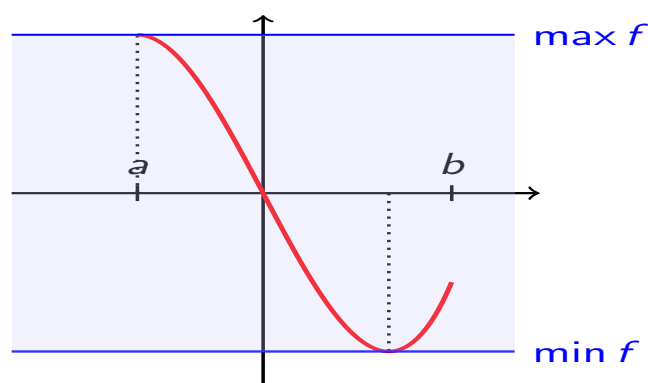


12 / 30

Außerdem gilt auch

Satz (Extremwerte werden angenommen)

Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, definiert auf einem abgeschlossenen Intervall, so nimmt die Funktion ihr globales Maximum und ihr globales Minimum an.



13 / 30

Differentialrechnung

Definition

Eine Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar, falls für alle $x_0 \in (a, b)$ der Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{existiert.}$$

Bemerkung

Dieselbe Definition funktioniert auch für komplexe Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, wobei wir annehmen wollen, dass der Definitionsbereich für jeden Punkt $z_0 \in D$ eine offene Kreisscheibe $B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ um diesen Punkt enthalten soll. Wir nennen f *komplex differenzierbar*, wenn für jedes $z_0 \in D$ der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{existiert.}$$

14 / 30

Ableitungsregeln

Die Ableitung ist eine lineare Abbildung zwischen Funktionenräumen, in dem Sinne dass für differenzierbare Funktionen $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ und Konstanten $c, d \in \mathbb{R}$ die Beziehung

$$(c \cdot f + d \cdot g)' = c \cdot f' + d \cdot g' \quad \text{gilt.}$$

Wir haben verschiedene weitere Rechenregeln für Ableitungen:

- Leibnizregel: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
- Quotientenregel: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
- Kettenregel: $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$

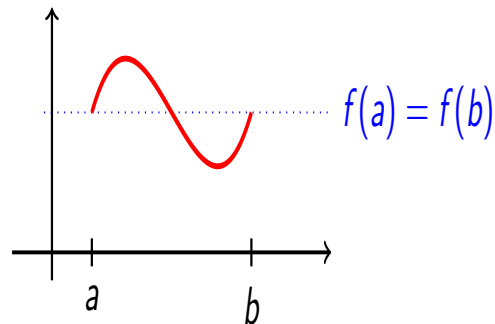
15 / 30

Nützliche Sätze

Satz (Satz von Rolle)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) = f(b)$.

Falls f auf (a, b) differenzierbar ist, so existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$.



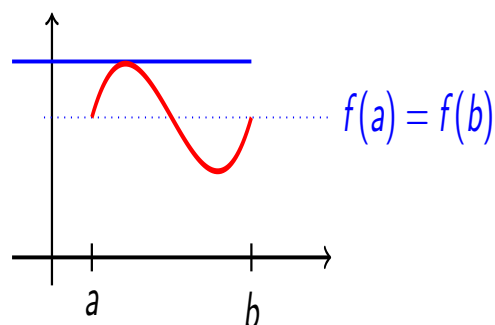
16 / 30

Nützliche Sätze

Satz (Satz von Rolle)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) = f(b)$.

Falls f auf (a, b) differenzierbar ist, so existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$.



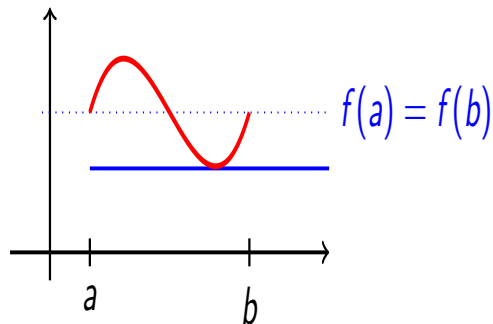
17 / 30

Nützliche Sätze

Satz (Satz von Rolle)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) = f(b)$.

Falls f auf (a, b) differenzierbar ist, so existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$.



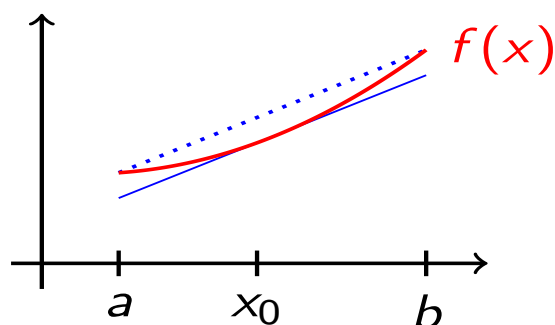
18 / 30

Satz (Mittelwertsatz)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, auf (a, b) differenzierbare Funktion.

Dann existiert $x_0 \in (a, b)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



19 / 30

Weitere Auswirkungen der Ableitung(en)

Die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar.

- Ist die Ableitung f' positiv (negativ), so ist die Funktion f streng monoton wachsend (fallend).
- Ein Vorzeichenwechsel der Ableitung von f kennzeichnet ein lokales Maximum der Funktion f :
 - ▶ wachsende Ableitung (z.B. impliziert durch positive zweite Ableitung) impliziert ein lokales Minimum
 - ▶ fallende Ableitung (z.B. impliziert durch negative zweite Ableitung) impliziert ein lokales Maximum
- Eine zweimal differenzierbare Funktion ist konvex, falls die zweite Ableitung nichtnegativ ist.

20 / 30

Taylor-Approximation

Ist die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mindestens k mal differenzierbar, so kann man in jedem Punkt $x_0 \in [a, b]$ das Taylor-Polynom vom Grad $k - 1$ betrachten, definiert als

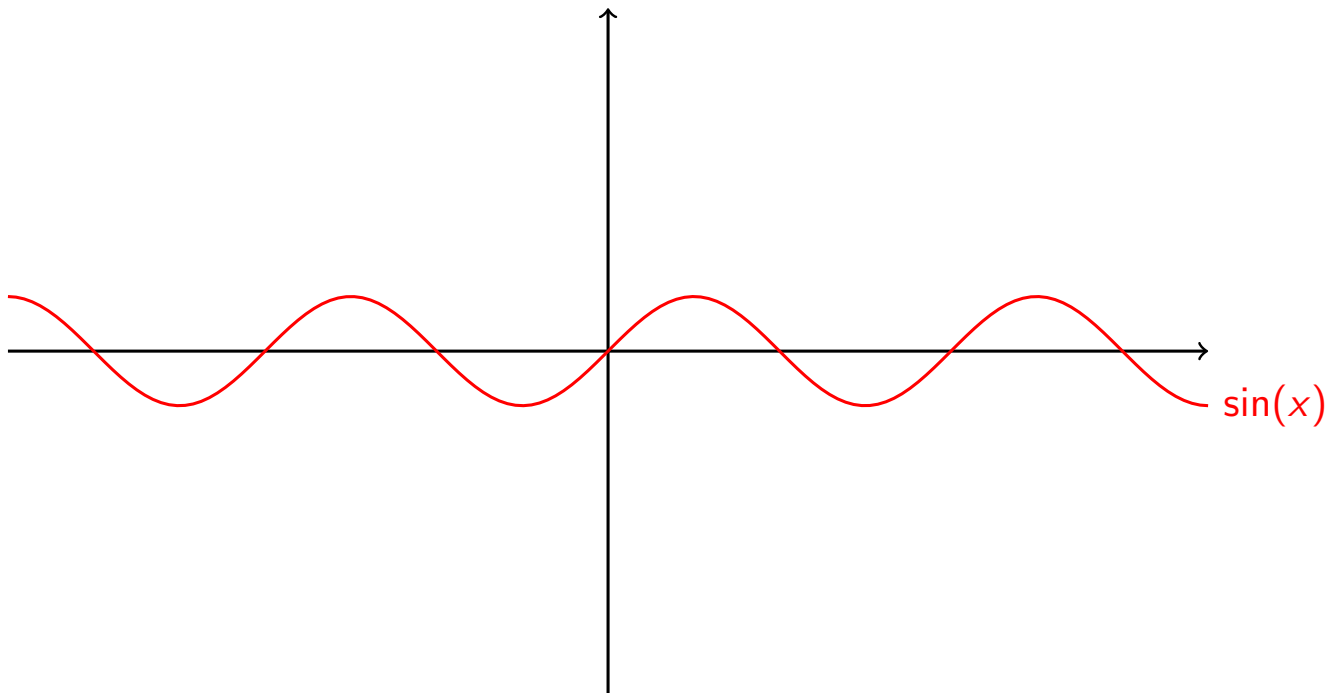
$$T_{k-1}(x) := \sum_{r=0}^{k-1} \frac{f^{(r)}(x_0)}{r!} (x - x_0)^r.$$

Der Fehlerterm

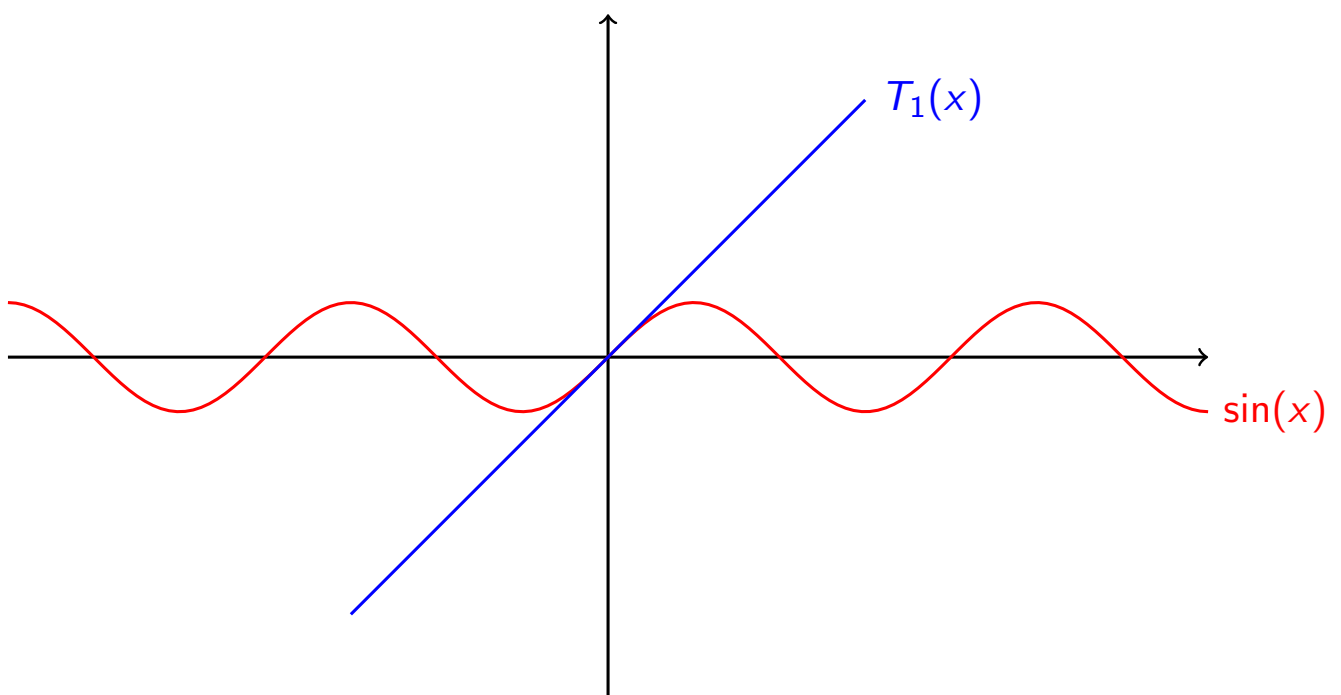
$$R_k(x) = f(x) - T_{k-1}(x)$$

lässt sich mit Hilfe der k -ten Ableitung von f an einem Punkt zwischen x_0 und x ausdrücken.

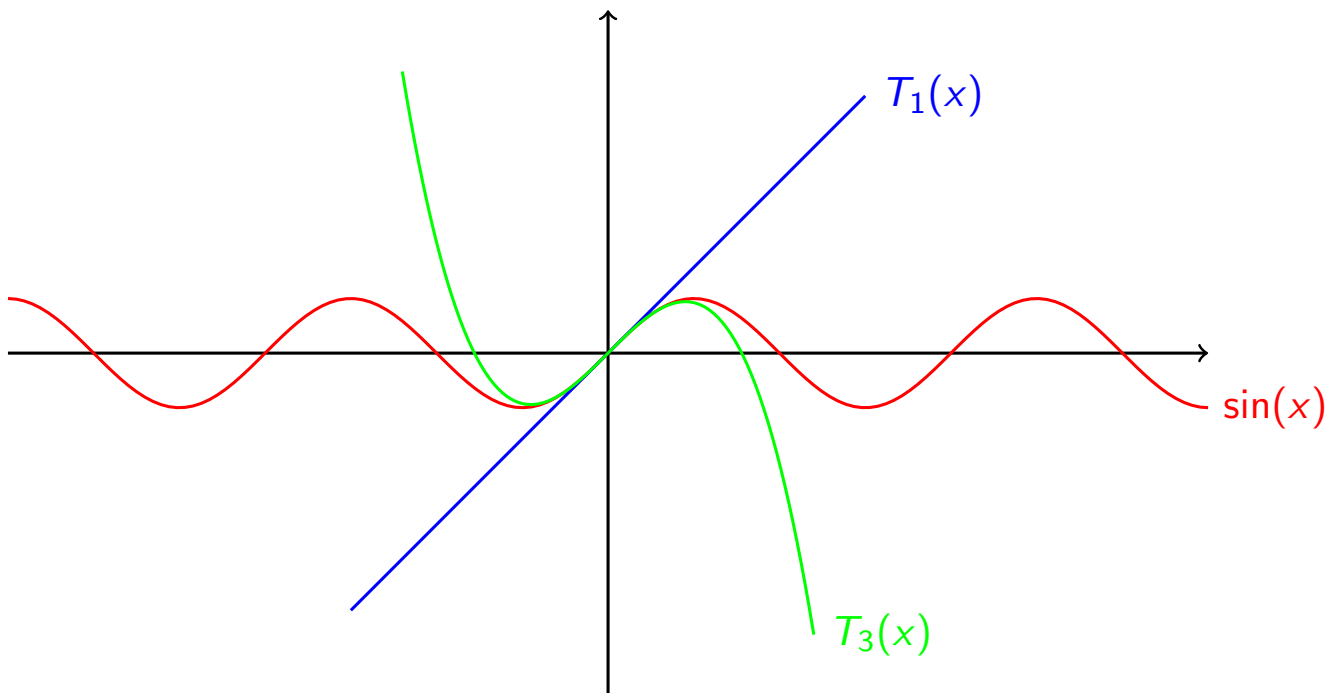
21 / 30

Taylor-Polynome des Sinus in $x_0 = 0$ 

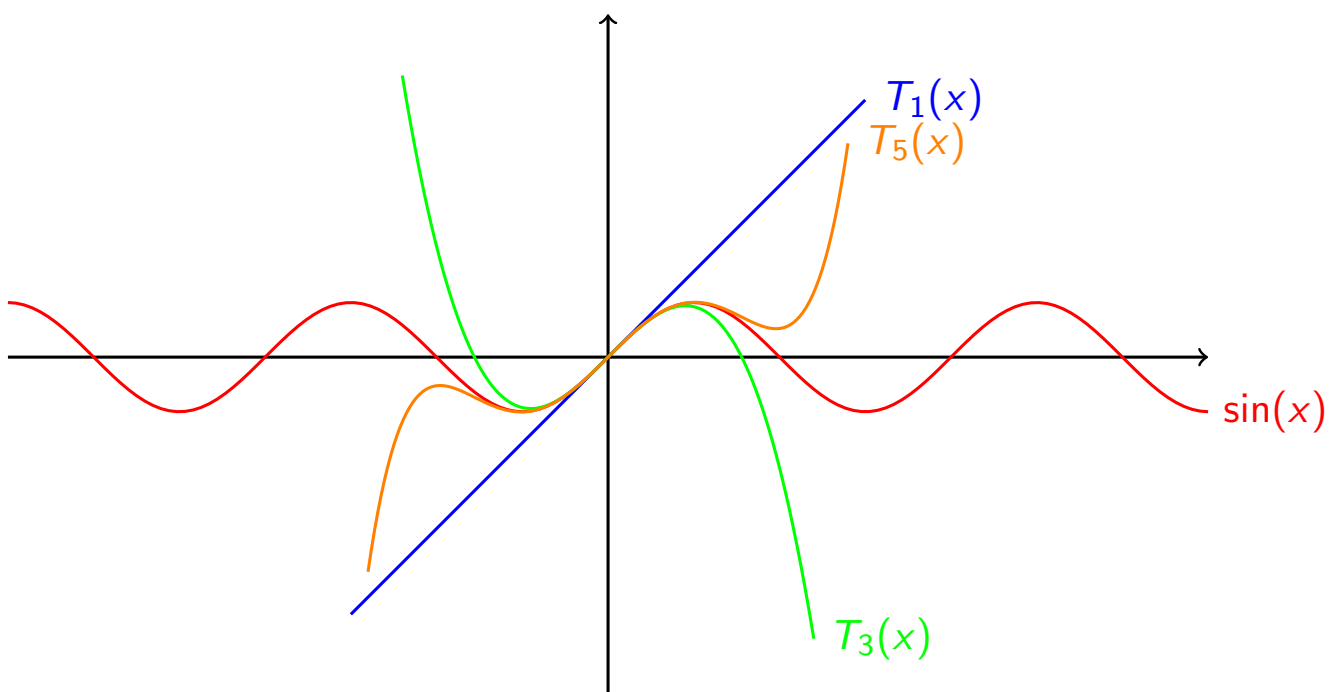
22 / 30

Taylor-Polynome des Sinus in $x_0 = 0$ 

23 / 30

Taylor-Polynome des Sinus in $x_0 = 0$ 

24 / 30

Taylor-Polynome des Sinus in $x_0 = 0$ 

25 / 30

Die Riemannsche Zeta-Funktion

Für $z \in \mathbb{C}$ betrachten wir die Reihe

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

Die Potenz n^z ist dabei wie für reelle Zahlen als $n^z = e^{z \cdot \ln n}$ definiert.

Satz

Die Reihe $\zeta(z)$ konvergiert auf jeder Teilmenge $X_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 1 + \varepsilon\}$ mit $\varepsilon > 0$ gleichmäßig.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ fixiert. Dann gilt für $z = x + iy \in X_\varepsilon$

$$|n^z| = \left| e^{z \cdot \ln n} \right| = \left| e^{(x+iy) \cdot \ln n} \right| = \left| e^{x \cdot \ln n} \right| \cdot \left| e^{iy \cdot \ln n} \right| = e^{x \cdot \ln n} = n^x.$$

26 / 30

Wegen der Monotonie der Exponentialfunktion und $x \geq 1 + \varepsilon$ wissen wir also

$$|n^z| \geq n^{1+\varepsilon}, \quad \text{d.h.} \quad \left| \frac{1}{n^z} \right| \leq \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \quad \text{für alle } z \in X_\varepsilon.$$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ für $\varepsilon > 0$ konvergiert, folgt unsere Behauptung aus dem Majorantenkriterium für Funktionenreihen. \square

Unsere Reihe definiert also eine Funktion

$$\zeta : \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\} \rightarrow \mathbb{C}.$$

27 / 30

Unendliche Produkte

Es sei eine Folge (z_k) von komplexen Zahlen mit $z_k \neq 0$ gegeben.

Definition

Das unendliche Produkt $\prod_{k=1}^{\infty} z_k$ heißt konvergent, falls die Folge der endlichen Produkte

$$p_n = z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n$$

in \mathbb{C} gegen eine von Null verschiedene Zahl p konvergiert.

Wir werden folgenden Fakt benutzen:

Satz

Sei (z_k) eine Folge komplexer Zahlen, so dass

- $z_k \neq -1$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k| < \infty$.

Dann konvergiert das Produkt $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + z_k)$.

28 / 30

Wir betrachten das Produkt

$$G(z) = \prod_{p \text{ Primzahl}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^z}} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^z}},$$

wobei p_1, p_2, p_3, \dots die (aufsteigende) Folge der Primzahlen ist.

Wegen

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p^z}} = \frac{p^z}{p^z - 1} = 1 + \frac{1}{p^z - 1}$$

und $1 \leq \frac{1}{2} p^{\operatorname{Re}(z)}$ für Primzahlen p und $\operatorname{Re}(z) > 1$, erhalten wir

$$\left| \frac{1}{p^z - 1} \right| \leq \frac{1}{|p^z| - 1} = \frac{1}{p^{\operatorname{Re}(z)} - 1} \leq \frac{2}{p^{\operatorname{Re}(z)}} \quad \text{falls } \operatorname{Re}(z) > 1.$$

Dann folgt aber wegen $\sum_p \frac{1}{p^{\operatorname{Re}(z)}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\operatorname{Re}(z)}} < \infty$, dass das Produkt $G(z)$ für $\operatorname{Re}(z) > 1$ konvergiert.

Satz

Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z) > 1$ gilt $G(z) = \zeta(z)$, d.h.

$$\prod_{p \text{ Primzahl}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^z}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

Insbesondere hat die Riemannsche ζ -Funktion auf der Menge $\{\operatorname{Re}(z) > 1\} \subset \mathbb{C}$ keine Nullstellen.

Die Funktion besitzt eine (komplex differenzierbare) Fortsetzung als Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Diese Fortsetzung hat viele bemerkenswerte Eigenschaften, und spielt in der Zahlentheorie eine wichtige Rolle.

Die Fortsetzung hat Nullstellen an allen negativen geraden ganzen Zahlen, welche man als "die trivialen Nullstellen" bezeichnet.

Riemannsche Vermutung

Alle anderen Nullstellen der Riemannschen ζ -Funktion liegen auf der Geraden $\{\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}\} \subset \mathbb{C}$.