Universität Hamburg
Janko Latschev
Leonardo García Heveling

Sommer 2025

Funktionentheorie

Übungsblatt 4

Präsenzaufgabenvorschläge für die Übung

(P11) Beweisen Sie: Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und ist $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f' \equiv 0$, so ist f konstant.

(P12) Wir bezeichnen mit

$$\int_{|z-z_0|=R} f(z)\,dz$$

das Kurvenintegral von f entlang des Weges $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = z_0 + Re^{2\pi\mathbf{i}t}$.
Bestimmen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel:

a) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{1}{(z+1)(z-3)}\,dz$

b) $\displaystyle\int_{|z-2\mathbf{i}|=2} \frac{1}{z^2+\pi^2}\,dz$

c) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{1}{(z-1)(z+2)}\,dz$

(P13) Für $0 < r \neq 1$ definieren wir

$$I(r) := \int_{|z|=r} \frac{\sin(\pi z)}{(z-1)^2}\,dz.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch?

a) $I(2) = -2\pi^2\mathbf{i}$.

b) $I(3) = -3\pi^2\mathbf{i}$.

c) $I(\frac{1}{2}) = 0$.

d) $I'(r) = 0$ für alle $0 < r \neq 1$.

Bitte wenden!

Schriftliche Hausaufgaben: Abgabe am 5.5. in der Vorlesung.

(A13) Berechnen Sie

$$\int_{\gamma_i} \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z}\, dz$$

für die folgenden Kurven $\gamma_i : [0,1] \to \mathbb{C}$:

a) $\gamma_1(t) = 2 + e^{2\pi \mathbf{i} t}$. **b)** $\gamma_2(t) = 2 + 3e^{2\pi \mathbf{i} t}$. **c)** $\gamma_3(t) = 2 + 5e^{2\pi \mathbf{i} t}$.

(A14) Sei $U \subset \mathbb{C}$ sternförmig und $f : U \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph. Zeigen Sie, dass eine holomorphe Funktion $h : U \to \mathbb{C}$ existiert, so dass

$$f(z) = e^{h(z)}$$

für alle $z \in U$.

(A15) Berechnen Sie folgende Integrale:

a) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\cos(z^3) + \sin(z)}{z^4 + 2z^3}\, dz,$

b) $\displaystyle\int_{|z-1|=3} \frac{e^{\alpha z}}{2z^2 - 5z + 2}\, dz$ für $\alpha \in \mathbb{C}$

c) $\displaystyle\int_{|z-1|=1} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz$ für $n \in \mathbb{N}$, und

d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\mathbf{i}t + e^{\mathbf{i}t}}\, dt.$

(A16) Beweisen Sie das folgende *lokale Maximumsprinzip*: Ist $f : B(z_0, r) \to \mathbb{C}$ holomorph und gilt $|f(z_o)| \geq |f(z)$ für alle $z \in B(z_0, r)$, dann ist f auf dem Ball $B(z_0, r)$ konstant.

(A17) *(optional)* Beweisen Sie

$$\int_0^\infty \cos(x^2)\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}} = \int_0^\infty \sin(x^2)\, dx,$$

indem Sie die Funktion $f(z) = e^{\mathbf{i}z^2}$ über den Rand des Kreissektors

$$K := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R, 0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{4}\}$$

integrieren und den Grenzwert für $R \to \infty$ betrachten.
Sie dürfen dabei $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ als bekannt voraussetzen.