Universität Hamburg
Janko Latschev
Leonardo García Heveling

Sommer 2025

Funktionentheorie

Übungsblatt 2

Präsenzaufgaben für die Übung (15./16.4.)

(P4) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert als

$$f(z) := \begin{cases} (z\bar{z}^{-1})^2 & z \neq 0 \\ 1 & z = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitungen nach x und y von f im Punkt $z_0 = 0$ existieren und die Cauchy-Riemann-Gleichungen erfüllen, f aber in z_0 nicht komplex differenzierbar ist. Warum widerspricht das der in der Vorlesung entwickelten Theorie nicht?

(P5) Entscheiden Sie, in welchen Punkten die angegebenen Funktionen komplex differenzierbar sind:

a) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x + \mathbf{i}y) = x^3y^2 + \mathbf{i}x^2y^3$

b) $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(x + \mathbf{i}y) = \cos^2(x + y) + \mathbf{i}\sin^2(x + y)$

c) $h : \{\mathrm{Re}(z) > 0\} \to \mathbb{C}$, $h(x + \mathbf{i}y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + \mathbf{i}\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$
(hier seien $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ und $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ jeweils die bekannten reellen Funktionen)

(P6) $U \subseteq \mathbb{C}$ sei offen und zusammenhängend. Beweisen Sie, dass eine holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$, die nur reelle oder nur imaginäre Werte annimmt, konstant sein muss.

Bitte wenden!

Schriftliche Hausaufgaben: Abgabe am 22.4. und 23.4. in den Übungen.

(A5) **a)** Diskutieren Sie in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{C}$, in welchen Punkten die Funktion $f(x + \mathbf{i}y) = ax + by$ komplex differenzierbar ist!

b) Beschreiben Sie alle holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ von der Form $f(x+\mathbf{i}y) = u(x) + \mathbf{i}v(y)$ mit $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$!

(A6) **a)** Bestimmen Sie für die Funktion $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, gegeben als

$$u(x + \mathbf{i}y) = 2x^3 - 6xy^2 + x^2 - y^2 - y$$

alle Funktionen $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, so dass $u + \mathbf{i}v$ holomorph ist!

b) Beweisen Sie, dass jede harmonische Funktion $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ Realteil einer holomorphen Funktion $f = u + \mathbf{i}v : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist!

(A7) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Wir definieren

$$U^* := \{z \in \mathbb{C} \mid \bar{z} \in U\} \subseteq \mathbb{C}.$$

Zeigen Sie, dass die Funktion $f^* : U^* \to \mathbb{C}$, $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$ ebenfalls holomorph ist, und bestimmen Sie die Ableitung von f^* in $z \in U^*$!

(A8) Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, welche durch

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

gegeben ist.

a) f ist in seinem Definitionsbereich holomorph. In welchen Punkten verschwindet die Ableitung von f?

b) Sei $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe. Zeigen Sie, dass die Einschränkung von f auf $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ injektiv ist! Was ist das Bild?

c) Zeigen Sie, dass auch die Einschränkung von f auf $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ injektiv ist!

d) Beschreiben Sie das Bild eines Kreises $K_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ in Abhängigkeit von $r > 0$!

e) Beschreiben Sie das Bild eines Strahls $S_\varphi := \{z \in \mathbb{C} : z = re^{\mathbf{i}\varphi} \text{ mit } r > 0\}$ in Abhängigkeit von $\varphi \in \mathbb{R}$!