Universität Hamburg
Janko Latschev

Sommer 2024

Differentialgeometrie

Übungsaufgaben 5

Präsenzaufgaben

(P12) Wir betrachten die beiden Vektorfelder $X = \frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial z}$ und $Y = \frac{\partial}{\partial y}$ auf $\mathbb{R}^3$.

a) Bestimmen Sie die Lieklammer $[X, Y]$ der beiden Vektorfelder.

b) Die Vektorfelder X und Y spannen in jedem Punkt $p \in \mathbb{R}^3$ einen 2-dimensionalen Unterraum des Tangentialraums $T_p\mathbb{R}^3$ auf. Skizzieren Sie diese "Ebenenfeld" im $\mathbb{R}^3$.

c) Finden Sie explizite Formeln für das Bild eines Punktes $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ unter dem Fluss φ_t von X und unter dem Fluss ψ_s von Y.

d) Sei nun $p \in R^3$ beliebig und $c_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ die Kurve

$$c_p(t) = \psi_{-t} \circ \varphi_{-t} \circ \psi_t \circ \varphi_t(p).$$

Bestimmen Sie eine explizite Formel für $c_p(t)$ und verifizieren Sie die Gleichung

$$\frac{1}{2}\ddot{c}_p(0) = [X, Y]_p.$$

Dies ist ein Beispiel für die in Aufgabe **(A14)** *formulierte allgemeine Behauptung.*

(P13) Finden Sie jeweils die maximalen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen für Funktionen einer Variablen t in Abhängigkeit vom Anfangswert $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$.

a) $\dot{x} = (2t - 5)x$

b) $\dot{x} = e^x \sin(t)$

c) $\dot{x} - 2x = t^2 e^{2t}$

(P14) In $\mathbb{R}^2$ betrachten wir das Vektorfeld

$$V(x, y) = (y + x(1 - x^2 - y^2))\frac{\partial}{\partial x} - (x - y(1 - x^2 - y^2))\frac{\partial}{\partial y}.$$

Schreiben Sie dieses Vektorfeld in Polarkoordinaten (r, φ) und bestimmen Sie dann die Integralkurven. Skizzieren Sie anschließend das qualitative Verhalten dieser Integralkurven in der Ebene.

Bitte wenden!

Übungsaufgaben mit Abgabetermin Do, 16.5., in der Vorlesung

(A14) Seien X und Y Vektorfelder auf $\mathbb{R}^n$, und seien φ_t bzw. ψ_s die jeweiligen (lokalen) Flüsse. Für jedes $p \in \mathbb{R}^n$ gibt es ein offenes Intervall $I_p \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in I_p$, so dass durch $c_p(t) := \psi_{-t} \circ \varphi_{-t} \circ \psi_t \circ \varphi_t(p)$ eine Kurve $c_p : I \to \mathbb{R}^n$ definiert wird. Zeigen Sie

$$\dot{c}_p(0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}\ddot{c}_p(0) = [X, Y]_p.$$

Hinweis: Starten Sie mit der Abbildung $b : (-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$, gegeben als $b(s,t) = \psi_{-s} \circ \varphi_{-t} \circ \psi_s \circ \varphi_t(p)$, und verwenden Sie die Kettenregel, um die Ableitungen von c durch geeignete (Kombinationen von) Ableitungen von b auszudrücken!

(A15) Analog zur Lieableitung von Vektorfeldern kann man die Lieableitung auch für Differentialformen definieren: Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit, $X \in \Gamma(TM)$ ein glattes Vektorfeld und $\omega \in \Omega^k(M)$ eine glatte k-Form, so definieren wir

$$L_X\omega := \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_t^*\omega - \omega}{t},$$

wobei φ_t der Fluss des Vektorfelds X ist. Ziel dieser Aufgabe ist der Beweis der *Cartan-Formel*

$$L_X\omega = d(i_X\omega) + i_X d\omega,$$

wobei $i_X : \Omega^*(M) \to \Omega^{*-1}(M)$ das Einsetzen des Vektorfeldes in die Differentialform bezeichnet. Für die Beschreibung der Teilschritte des Beweises bezeichnen wir mit $L_X^*\omega$ die rechte Seite der zu beweisenden Gleichung. Zeigen Sie:

a) Sowohl L_X als auch L_X^* sind Derivationen des $\wedge$-Produktes von Differentialformen, d.h. es gilt[1]

$$L_X(\omega_1 \wedge \omega_2) = (L_X\omega_1) \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge (L_X\omega_2)$$

und analog für L_X^*.

b) Sowohl L_X als auch L_X^* kommutieren mit der äußeren Ableitung $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$.

c) L_X und L_X^* stimmen auf Funktionen $f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$ überein.

d) Aus diesen drei Aussagen folgt die Behauptung.

(A16) Beweisen Sie für 1-Formen $\eta \in \Omega^1(M)$ die Beziehung

$$d\eta(X,Y) = X(\eta(Y)) - Y(\eta(X)) - \eta([X,Y]).$$

Hinweis: Eine funktionierende Beweisstrategie ist, zunächst

$$(L_X\eta)(Y) = X(\eta(Y)) - \eta(L_XY)$$

zu beweisen und dann die Cartan-Formel anzuwenden. Es gibt jedoch auch andere.

[1] Das Einsetzen $i_X : \Omega^*(M) \to \Omega^{*-1}(M)$ erfüllt für $\omega_1 \in \Omega^k(M)$ und $\omega_2 \in \Omega^\ell(M)$ die Relation $i_X(\omega_1 \wedge \omega_2) = (i_X\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge (i_X\omega_2)$.

Siehe nächstes Blatt!

(A17) Sei G eine Liegruppe und $\gamma : \mathbb{R} \to G$ ein Homomorphismus von Liegruppen, d.h. eine glatte Kurve in G mit $\gamma(0) = e$ und $\gamma(s+t) = \gamma(s)\gamma(t)$. Zeigen Sie, dass γ die Form $\gamma(t) = \exp(t\xi)$ mit $\xi = \dot{\gamma}(0)$ hat!

(A18) **a)** Beschreiben Sie die Liealgebra $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ der Liegruppe $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ als Unterraum von $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$!

b) Beweisen Sie, dass die Exponentialabbildung $\exp : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ nicht surjektiv ist!
Hinweis: Ist eine Matrix A im Bild der Exponentialabbildung, so besitzt sie eine Wurzel, d.h. es existiert eine Matrix B mit $B^2 = A$.

c) Ist diese Exponentialabbildung injektiv?