

Semantik der Aussagenlogik

Tim Nachtigall

Semantik der Aussagenlogik:

§1. Einführung: Um die Wahrheitswerte von verknüpften Aussagen sinnvoll betrachten zu können, können wir Wahrheitstafeln aufstellen.

Vereinfacht werden hierbei „Wahr“ und „Falsch“ durch „1“ und „0“ dargestellt.

Konjunktion:

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

 Hierbei stellt die linke Spalte das erste Argument und die obere Reihe das zweite Argument dar.

Disjunktion:

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

 Negation:

$\neg$	
0	1
1	0

Implikation:

$\rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

 Äquivalenz:

$\leftrightarrow$	0	1
0	1	0
1	0	1

Eine Aussage, die immer falsch ist, heißt „Falsum“ (Symbol: $\perp$).

Das Gegenteil von „Falsum“ ist „Verum“ (Symbol: $\top$),

also eine Aussage, die immer wahr ist.

§2. Formaler Aufbau:

Definition 2.1: Eine Abbildung $v: \text{PROP} \rightarrow \{0, 1\}$ heißt

Auswertungsfunktion, falls gilt:

- (i) $v(\varphi \wedge \psi) = \min(v(\varphi), v(\psi))$; (ii) $v(\varphi \vee \psi) = \max(v(\varphi), v(\psi))$;
- (iii) $v(\varphi \rightarrow \psi) = 0 \Leftrightarrow v(\varphi) = 1 \text{ und } v(\psi) = 0$;
- (iv) $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 \Leftrightarrow v(\varphi) = v(\psi)$; (v) $v(\neg \varphi) = 1 - v(\varphi)$; (vi) $v(\perp) = 0$.

Theorem 2.2: Sei v eine Abbildung aus den Elementaraussagen (Atomen)

in die Menge $\{0, 1\}$, für die gilt $v(\perp) = 0$,

dann existiert eine eindeutige Auswertungsfunktion $\llbracket \cdot \rrbracket_v$,

so dass für alle Elementaraussagen φ gilt: $\llbracket \varphi \rrbracket_v = v(\varphi)$.

Bemerkung 2.3: Da sich v und $\llbracket \cdot \rrbracket_v$ eindeutig gegenseitig bestimmen, wird v auch Elementaranwertung genannt.

Wenn v aus dem Kontext ersichtlich ist, kann der Index auch weggelassen werden (also nur $\llbracket \cdot \rrbracket$).

Lemma 2.4: Falls $v(p_i) = v'(p_i)$ für alle p_i aus φ gilt, dann gilt: $\llbracket \varphi \rrbracket_v = \llbracket \varphi \rrbracket_{v'}$.

Beweis (per Induktion über φ):

- Sei φ elementar, dann ist die Aussage klar.
- Sei $\varphi = \varphi_1 \square \varphi_2$. Wir nehmen als Induktionshypothese an, dass $\llbracket \varphi_j \rrbracket_v = \llbracket \varphi_j \rrbracket_{v'}$, $j \in \{1, 2\}$, gilt.

Nach Definition 2.1 (i)-(iv) ist $\llbracket \varphi_1 \square \varphi_2 \rrbracket_v$ eindeutig durch die Werte $\llbracket \varphi_1 \rrbracket_v$, $\llbracket \varphi_2 \rrbracket_v$ bestimmt.

Somit folgt aus der Induktionshypothese die Gleichheit $\llbracket \varphi_1 \square \varphi_2 \rrbracket_v = \llbracket \varphi_1 \square \varphi_2 \rrbracket_{v'}$ und somit die Aussage.

- Sei $\varphi = \neg \psi$. Wir nehmen an, dass $\llbracket \psi \rrbracket_v = \llbracket \psi \rrbracket_{v'}$ gilt.

Dann gilt nach Definition 2.1 (v): $\llbracket \neg \psi \rrbracket_v = 1 - \llbracket \psi \rrbracket_v = 1 - \llbracket \psi \rrbracket_{v'} = \llbracket \neg \psi \rrbracket_{v'}$.

Somit folgt die Aussage. $\square$

Definition 2.5: (i) φ heißt Tautologie ($\models \varphi$), falls gilt $\llbracket \varphi \rrbracket_v = 1$,
für alle Anwertungen v .

(ii) Sei Γ eine Menge von Aussagen, dann schreiben wir $\Gamma \models \varphi$,
falls für alle v gilt: $(\llbracket \psi \rrbracket_v = 1, \text{ für alle } \psi \in \Gamma) \Rightarrow \llbracket \varphi \rrbracket_v = 1$.

(" φ folgt semantisch aus Γ ")

Falls $\Gamma \models \varphi$ nicht gilt, schreiben wir $\Gamma \not\models \varphi$.

Konvention: $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$ steht für $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \models \psi$.

Beispiele 2.6: (i) $\models \varphi \rightarrow \varphi$; $\models \varphi \vee \psi \leftrightarrow \psi \vee \varphi$.

(ii) $\varphi, \psi \models \varphi \wedge \psi$; $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \models \psi$.

Definition 2.7: „Substitution von p_i durch ψ in φ “ ($\varphi[\psi/p_i]$)

- Für φ elementar: $\varphi[\psi/p_i] := \begin{cases} \varphi, & \text{falls } \varphi \neq p_i \\ \psi, & \text{falls } \varphi = p_i \end{cases}$

- $(\varphi_1 \square \varphi_2)[\psi/p_i] = \varphi_1[\psi/p_i] \square \varphi_2[\psi/p_i]$

- $(\neg \varphi)[\psi/p_i] = \neg \varphi[\psi/p_i]$

Theorem 2.8 („Gesetz der Substitution von äquivalenten Aussagen“)

Sei $\models \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$, dann gilt $\models \psi[\varphi_1/p] \leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]$, wobei p elementar ist.

Der Beweis des Theorems folgt aus dem folgenden Lemma:

Lemma 2.9: $\llbracket \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2 \rrbracket_v \leq \llbracket \psi[\varphi_1/p] \leftrightarrow \psi[\varphi_2/p] \rrbracket_v$ und es gilt: $\models (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) \rightarrow (\psi[\varphi_1/p] \leftrightarrow \psi[\varphi_2/p])$.

Beweis (per Induktion über ψ):

Es reicht hierbei aus, den Fall $\llbracket \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2 \rrbracket_v = 1$ zu betrachten.

(Für $\llbracket \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2 \rrbracket_v = 0$ ist die Ungleichung trivial erfüllt)

- Sei ψ elementar. Sei $\psi = p$, dann gilt $\psi[\varphi_i/p] = \varphi_i, i \in \{1, 2\}$,
 und somit folgt die Aussage. Sei $\psi \neq p$, dann gilt $\psi[\varphi_i/p] = \psi, i \in \{1, 2\}$,
 und somit folgt $\llbracket \psi[\varphi_1/p] \leftrightarrow \psi[\varphi_2/p] \rrbracket_v = \llbracket \psi \leftrightarrow \psi \rrbracket_v = 1$.

- Sei $\psi = \psi_1 \square \psi_2$. Wir nehmen als Induktionshypothese an, dass
 $\llbracket \psi_j[\varphi_i/p] \rrbracket_v = \llbracket \psi_j[\varphi_2/p] \rrbracket_v, j \in \{1, 2\}$, gilt.

Nun ist nach Definition 2.1 (i)-(iv) der Wert von $\llbracket (\psi_1 \square \psi_2)[\varphi_i/p] \rrbracket_v = \llbracket \psi_1[\varphi_i/p] \square \psi_2[\varphi_i/p] \rrbracket_v$
 eindeutig durch die Komponenten $\llbracket \psi_j[\varphi_i/p] \rrbracket_v, i, j \in \{1, 2\}$, bestimmt.

Da nach Induktionshypothese für festes j (bzw. ψ_j)

Gleichheit in den Komponenten gilt, folgt: $\llbracket (\psi_1 \square \psi_2)[\varphi_1/p] \rrbracket_v = \llbracket (\psi_1 \square \psi_2)[\varphi_2/p] \rrbracket_v$.

Somit folgt die Aussage.

- Sei $\psi = \neg \tilde{\psi}$. Wir nehmen an, dass $\llbracket \tilde{\psi}[\varphi_1/p] \rrbracket_v = \llbracket \tilde{\psi}[\varphi_2/p] \rrbracket_v$ gilt,

dann folgt: $\llbracket (\neg \tilde{\psi})[\varphi_1/p] \rrbracket_v = \llbracket \neg(\tilde{\psi}[\varphi_1/p]) \rrbracket_v = 1 - \llbracket \tilde{\psi}[\varphi_1/p] \rrbracket_v = 1 - \llbracket \tilde{\psi}[\varphi_2/p] \rrbracket_v = \llbracket (\neg \tilde{\psi})[\varphi_2/p] \rrbracket_v$.

Somit folgt die Aussage.

Die zweite Aussage des Lemmas folgt aus der folgenden Implikation:

$$\llbracket \varphi \rrbracket_v \leq \llbracket \psi \rrbracket_v, \text{ für alle } v \Rightarrow \models \varphi \rightarrow \psi.$$

Hierfür betrachten wir die Wahrheitstabelle

φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$
0	$x \in \{0, 1\}$	1
1	1	1

Der genaue Wert von x hängt hierbei

von der Elementaranzwertung v ab. $\square$

§3. Tautologien:

Eine Möglichkeit Aussagen auf Tautologien zu prüfen,
ist die Verwendung von Wahrheitstabellen.

Im Folgenden betrachten wir eine Kurzschreibweise:

<u>$(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$</u>						
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	<u>1</u>	0	1	0

(An Stelle von:

<u>φ</u>	<u>ψ</u>	<u>$\neg\varphi$</u>	<u>$\neg\psi$</u>	<u>$(\varphi \rightarrow \psi)$</u>	<u>$(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$</u>	<u>$(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$</u>
-----------------------------	--------------------------	---------------------------------	------------------------------	--	--	---

)

Da in der **roten** Spalte nur „1“ vorhanden sind,
ist die Aussage eine Tautologie.

Beispiele:

(i) „Satz vom ausgeschlossenen Dritten“: $(\varphi \vee \neg \varphi)$

$\varphi \vee \neg \varphi$ ist eine Tautologie.

0	1	1
---	---	---

1	1	0
---	---	---

(ii) „Aus Falschem folgt Beliebiges“: $(\perp \rightarrow \varphi)$

$\perp \rightarrow \varphi$ ist eine Tautologie.

0	1	0
---	---	---

0	1	1
---	---	---

(iii) $\varphi \rightarrow ((\psi \rightarrow \sigma) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma)))$ ist eine Tautologie.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

(i) (i) (i) (i) (i) (i) (i) (i)

(ii)

(ii)

(iii)

(ii)

(iv)

(v)

(Reihenfolge)