

Kalkül des natürlichen Schließens

Monica Wiebe-Acheampong

25.09.2026

Gliederung

1. Einführung
2. Grundbegriffe
3. Ableitungsregeln
4. Beispiele
5. Definition der Ableitung

- **Bisher:** Aussagenlogik semantisch über Wahrheitstabellen und Belegungen ($\models \phi$) betrachtet
- **Jetzt:** Syntaktische Betrachtung
 - Bauen ein System um Schlussfolgerungen von Voraussetzungen zu bekommen (**Ableitungsregel**)
 - Konstruiert um die **intuitive** Bedeutung von Junktoren zu wiedergeben

2. Grundbegriffe

- Graphische Notation:

$$\frac{\textit{Voraussetzungen}}{\textit{Schlussfolgerung}}$$

- Beispiel:

$$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$

- **Zwei Arten von Regeln:**

1. Einführungsregeln (*I - Introduction*)

2. Eliminationsregeln (*E - Elimination*)

- Nutzen vorerst nur die Junktoren $\{ \wedge , \rightarrow , \perp \}$

- Die Negation wird als Abkürzung definiert: $\neg \varphi := \varphi \rightarrow \perp$

3. Ableitungsregeln

Einführungsregeln (I)

Eliminationsregeln (E)

$$(\wedge I) \quad \frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}$$

$$(\wedge E) \quad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \quad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}$$

$$(\rightarrow I) \quad \frac{\begin{array}{c} [\varphi] \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi}$$

$$(\rightarrow E) \quad \frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$

$$(\bot) \quad \frac{\bot}{\varphi}$$

$$(RAA) \quad \frac{[\neg\varphi] \vdots \bot}{\varphi}$$

- **Definition der Negation:**

$$\neg\varphi \equiv \varphi \rightarrow \bot$$

Cancellation

- Vorübergehende Annahmen werden durch Regelanwendung entlassen
- Ursprüngliche Annahme gilt ab dieser Zeile nicht mehr als offene Annahme
- **Notation:** $[\varphi]^1$ & Index an der Regelzeile (z. B. $\rightarrow I_1$)

4. Beispiele

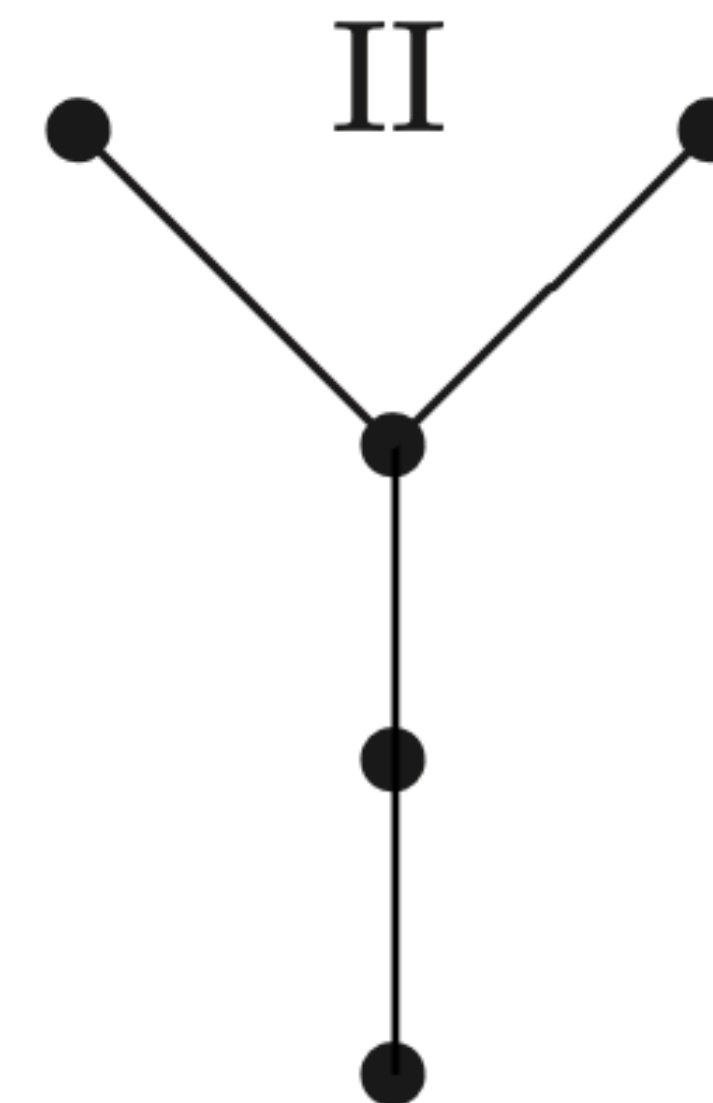
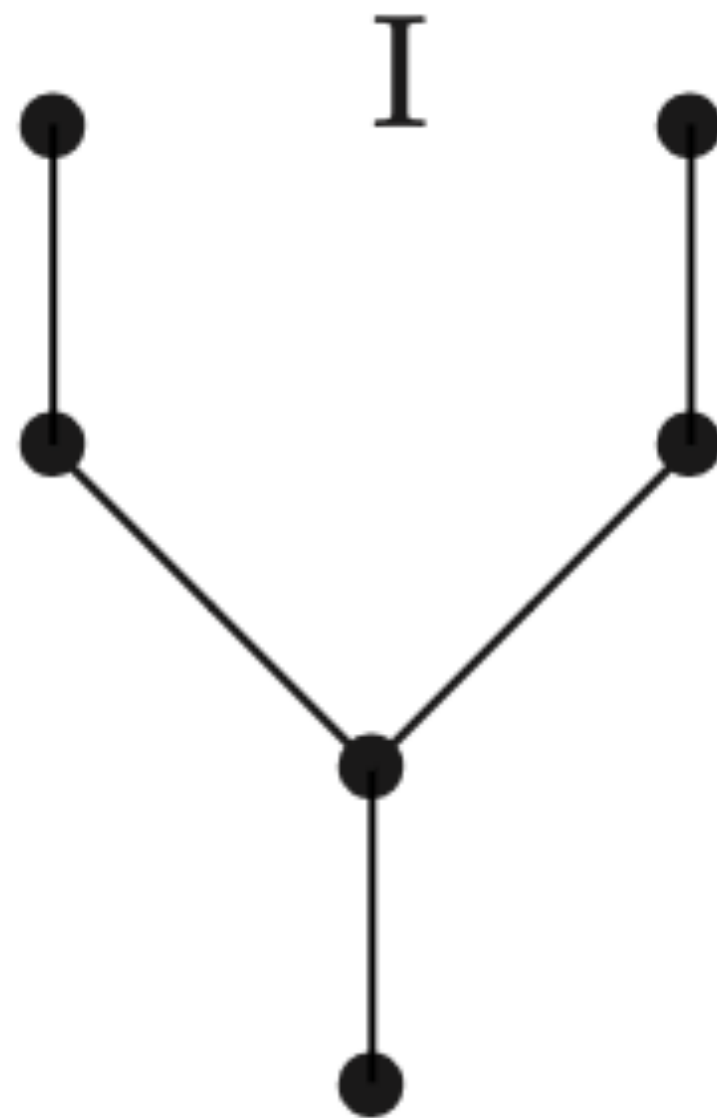
$$\begin{array}{c}
 \text{I} \\
 \frac{\frac{[\varphi \wedge \psi]^1 \quad [\varphi \wedge \psi]^1}{\psi \quad \varphi} \quad (\wedge E)}{\psi \wedge \varphi} \quad (\wedge I) \\
 \hline
 \varphi \wedge \psi \rightarrow \psi \wedge \varphi \quad (\rightarrow I_1)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{II} \\
 \frac{\frac{\frac{[\varphi]^2 \quad [\varphi \rightarrow \perp]^1}{\perp}}{(\varphi \rightarrow \perp) \rightarrow \perp} \quad (\rightarrow E)}{\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \perp) \rightarrow \perp)} \quad (\rightarrow I_1) \\
 \hline
 \varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \perp) \rightarrow \perp) \quad (\rightarrow I_2)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\text{I} \\
\frac{\frac{[\varphi \wedge \psi]^1 \quad [\varphi \wedge \psi]^1}{\psi \quad \varphi} \quad (\wedge E)}{\frac{\psi \wedge \varphi}{\varphi \wedge \psi \rightarrow \psi \wedge \varphi}} \quad (\wedge I) \quad (\rightarrow I_1)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\text{II} \\
\frac{\frac{\frac{[\varphi]^2 \quad [\varphi \rightarrow \perp]^1}{\perp}}{(\varphi \rightarrow \perp) \rightarrow \perp}}{\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \perp) \rightarrow \perp)} \quad (\rightarrow E) \quad (\rightarrow I_1) \quad (\rightarrow I_2)
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\text{II}' \\
\frac{\frac{\frac{[\varphi]^2 \quad [\neg \varphi]^1}{\perp}}{\neg \neg \varphi}}{\varphi \rightarrow \neg \neg \varphi} \quad (\rightarrow E) \quad (\rightarrow I_1) \quad (\rightarrow I_2)
\end{array}$$

Ableitungen haben die Form von Bäumen



5. Definition der Ableitung

Notation

- Kombination von Teilbeweisen:

$$\frac{D}{\varphi} \quad \psi$$

$$\frac{D \quad D' \quad \varphi \quad \varphi'}{\psi}$$

- Streichen von Hypothesen (*Cancellation*):

$$\frac{[\psi] \quad D \quad \varphi}{\sigma}$$

Definition 1.4.1: Die *Menge X aller Ableitungen* ist die kleinste Menge mit:

(1) *Ein – Element – baum* $\varphi \in X$ für alle $\varphi \in \text{PROP}$.

(2 $\wedge$) Wenn $\frac{D}{\varphi}, \frac{D'}{\varphi'} \in X$, dann $\frac{\frac{D}{\varphi} \quad \frac{D'}{\varphi'}}{\varphi \wedge \varphi'} \in X$.

Wenn $\frac{D}{\varphi \wedge \psi} \in X$, dann $\frac{\frac{D}{\varphi \wedge \psi}}{\varphi} \in X$, $\frac{\frac{D}{\varphi \wedge \psi}}{\psi} \in X$.

$$(2 \rightarrow) \text{ Wenn } \frac{\varphi}{D} \in X, \text{ dann } \frac{\frac{[\varphi]}{D} \psi}{\varphi \rightarrow \psi} \in X.$$

$$\text{Wenn } \frac{D}{\varphi}, \frac{D'}{\varphi \rightarrow \psi} \in X, \text{ dann } \frac{\frac{D}{\varphi} \quad \frac{D'}{\varphi \rightarrow \psi}}{\psi} \in X.$$

(2⊥) Wenn $\frac{D}{\perp} \in X$, then $\frac{\perp}{\varphi} \in X$.

Wenn $\frac{D}{\perp} \in X$, then $\frac{\perp}{\neg\neg\varphi} \in X$.

Definition 1.4.2:

- $\Gamma \vdash \varphi$ bedeutet: Es gibt eine Ableitung mit Schlussfolgerung φ , deren alle (*nicht-aufgehobenen*) Hypothesen in der Menge Γ liegen.
- Ist $\Gamma = \emptyset$, schreiben wir $\vdash \varphi$ und nennen φ ein **Theorem**

Theorem 1.4.4:

- (1) $\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi),$
- (2) $\vdash \varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi),$
- (3) $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow [(\psi \rightarrow \sigma) \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma)],$
- (4) $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi),$
- (5) $\vdash \neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi,$
- (6) $\vdash [\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)] \leftrightarrow [\varphi \wedge \psi \rightarrow \sigma],$
- (7) $\vdash \perp \leftrightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi).$

Bew:

$$\begin{array}{lcl}
 (1) & \frac{\frac{[\varphi]^1}{\psi \rightarrow \varphi} \quad (\rightarrow I)}{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)} & (\rightarrow I)_1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 (2) & \frac{\frac{\frac{[\varphi]^2}{\perp} \quad (\perp,)}{\neg\varphi \rightarrow \psi} \quad (\rightarrow I_1)}{\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi)} & \begin{array}{l} (\rightarrow E) \\ (\rightarrow I_2) \end{array}
 \end{array}$$

Theorem 1.4.4:

- (1) $\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$,
- (2) $\vdash \varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi)$,
- (3) $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow [(\psi \rightarrow \sigma) \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma)]$,
- (4) $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$,
- (5) $\vdash \neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$,
- (6) $\vdash [\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)] \leftrightarrow [\varphi \wedge \psi \rightarrow \sigma]$,
- (7) $\vdash \perp \leftrightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi)$.

Proof:

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\varphi]^1 \quad [\varphi \rightarrow \psi]^3}{\psi} (\rightarrow E) \quad \frac{[\psi \rightarrow \sigma]^2}{\sigma} (\rightarrow E) \\
 \frac{\psi \quad \sigma}{\varphi \rightarrow \sigma} (\rightarrow I_1) \\
 \frac{\varphi \rightarrow \sigma}{(\psi \rightarrow \sigma) \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma)} (\rightarrow I_2) \\
 \frac{(\psi \rightarrow \sigma) \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma)}{(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \sigma) \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma))} (\rightarrow I_3)
 \end{array}$$

Theorem 1.4.4:

- (1) $\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi),$
- (2) $\vdash \varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi),$
- (3) $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow [(\psi \rightarrow \sigma) \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma)],$
- (4) $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi),$
- (5) $\vdash \neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi,$
- (6) $\vdash [\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)] \leftrightarrow [\varphi \wedge \psi \rightarrow \sigma],$
- (7) $\vdash \perp \leftrightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi).$

Bew.: (4) „ $\rightarrow$ “ (D) Setzen in (3) für $\sigma, \perp$ ein

$$\begin{array}{c}
 \text{„}\leftarrow\text{“ (D')} \quad \frac{[\neg\psi]^1 \quad [\neg\psi \rightarrow \neg\varphi]^3}{\neg\varphi} \quad (\leftrightarrow E) \\
 \frac{\neg\varphi}{\perp} \quad (\varphi)^2 \quad (\leftrightarrow E) \\
 \frac{\perp}{\psi} \quad (RAA)_1 \\
 \frac{\psi}{\varphi \rightarrow \psi} \quad (\rightarrow I_2) \\
 \frac{\varphi \rightarrow \psi}{(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)} \quad (\rightarrow I_3)
 \end{array}$$

Theorem 1.4.4:

- (1) $\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi),$
- (2) $\vdash \varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi),$
- (3) $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow [(\psi \rightarrow \sigma) \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma)],$
- (4) $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi),$
- (5) $\vdash \neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi,$
- (6) $\vdash [\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)] \leftrightarrow [\varphi \wedge \psi \rightarrow \sigma],$
- (7) $\vdash \perp \leftrightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi).$

Bew: (4) Also haben wir

$$\begin{array}{ccc}
 D & & D' \\
 (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) & & (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \\
 \hline
 (\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) & & \leftarrow I)
 \end{array}$$

Theorem 1.4.4:

- (1) $\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi),$
- (2) $\vdash \varphi \rightarrow (\neg \varphi \rightarrow \psi),$
- (3) $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow [(\psi \rightarrow \sigma) \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma)],$
- (4) $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg \psi \rightarrow \neg \varphi),$
- (5) $\vdash \neg \neg \varphi \leftrightarrow \varphi,$
- (6) $\vdash [\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)] \leftrightarrow [\varphi \wedge \psi \rightarrow \sigma],$
- (7) $\vdash \perp \leftrightarrow (\varphi \wedge \neg \varphi).$

Bew: $(5)_{\neg} \rightarrow^*$ ist Asp. II'
 $\leftarrow^*$

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\neg \varphi]^1 \quad [\neg \varphi]^2}{\quad} (\rightarrow E) \\
 \frac{\perp}{\varphi} (RAA_1) \\
 \hline
 \neg \neg \varphi \rightarrow \varphi \quad (\leftrightarrow I_2)
 \end{array}$$

Theorem 1.4.4:

- (1) $\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi),$
- (2) $\vdash \varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi),$
- (3) $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow [(\psi \rightarrow \sigma) \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma)],$
- (4) $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi),$
- (5) $\vdash \neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi,$
- (6) $\vdash [\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)] \leftrightarrow [\varphi \wedge \psi \rightarrow \sigma],$
- (7) $\vdash \perp \leftrightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi).$

Bew: (6) —

(7) „ $\rightarrow$ “

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\perp]^\uparrow}{\varphi} \quad (\perp) \\
 \hline
 \varphi \quad \neg \quad \neg \varphi \\
 \hline
 \perp \rightarrow \varphi \wedge \neg \varphi
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \frac{[\perp]^\uparrow}{\neg \varphi} \quad (\perp) \\
 \hline
 \neg \varphi \quad \neg \neg \varphi \\
 \hline
 \neg \neg \varphi \quad (\neg\neg I) \\
 \hline
 \neg \neg \varphi \quad (\rightarrow I_1)
 \end{array}$$

Theorem 1.4.4:

- (1) $\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$,
- (2) $\vdash \varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi)$,
- (3) $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow [(\psi \rightarrow \sigma) \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma)]$,
- (4) $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$,
- (5) $\vdash \neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$,
- (6) $\vdash [\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)] \leftrightarrow [\varphi \wedge \psi \rightarrow \sigma]$,
- (7) $\vdash \perp \leftrightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi)$.

Proof: (7) " $\Leftarrow$ "

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\varphi \wedge \neg\varphi]^{\neg}}{\varphi} (\neg E) \quad \frac{[\varphi \wedge \neg\varphi]^{\neg}}{\neg\varphi} (\neg E) \\
 \hline
 \perp \quad (\neg\rightarrow E) \\
 \hline
 (\varphi \wedge \neg\varphi) \rightarrow \perp \quad (\rightarrow I_1)
 \end{array}$$

□

Danke fürs Zuhören!