

Der Vollständigkeitssatz

Thm: $\forall \Gamma \subset \text{PROP}, \varphi \in \text{PROP}: \Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \models \varphi$

Lemma: $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$

Bew: Induktion nach D $\begin{matrix} D \\ \varphi \end{matrix}$

IA: $D = \varphi \Rightarrow \varphi \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \models \varphi$

IS: $\wedge I$: $\frac{D_1 \quad D_2}{\varphi_1 \wedge \varphi_2}, \varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2, \Gamma_1 \models \varphi_1, \Gamma_2 \models \varphi_2$

Γ enthält alle Annahmen von D_1 und D_2
 $\Rightarrow \Gamma \supset \Gamma_1 \cup \Gamma_2 : (\Gamma_1 \vdash \varphi_1 \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi_1)$

$\Gamma \models \varphi_1, \Gamma \models \varphi_2 \Rightarrow \Gamma \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$

$\wedge E$: Γ hat Ann. $\frac{D}{\varphi \wedge \psi}$ und $\Gamma \models \varphi \wedge \psi$

$\Rightarrow \Gamma \models \varphi \checkmark$

$\rightarrow I$: Γ hat Ann. $\frac{D \quad \varphi}{\psi}, \Gamma \models \varphi$

Γ' enthält Ann. von $\frac{[\varphi] \quad D}{\psi}$, dann $\Gamma' \cup \{\varphi\} \supset \Gamma$
 $\varphi \rightarrow \psi$

$$\Gamma' \cup \{\varphi\} \models \varphi \Rightarrow \Gamma' \models \varphi \rightarrow \varphi$$

$$\rightarrow E: \Gamma \text{ hat } \overset{D}{\varphi}, \Gamma' \text{ hat } \overset{D'}{\varphi \rightarrow \varphi} : \Gamma \models \varphi, \Gamma' \models \varphi \rightarrow \varphi$$

$$\Gamma'' : \frac{\overset{D}{\varphi} \quad \overset{D'}{\varphi \rightarrow \varphi}}{\varphi}$$

$$\Gamma'' \supset \Gamma \cup \Gamma', \text{ d.h. } \Gamma'' \models \varphi$$

$$\Gamma'' \models \varphi \rightarrow \varphi$$

$$\Gamma'' \models \varphi$$

$$(\perp): \Gamma \text{ hat } \overset{D}{\perp}, \Gamma \models \perp : \llbracket \perp \rrbracket = 0$$

$$\text{d.h. es sind für kein } v \text{ alle } \varphi \in \Gamma \text{ } \llbracket \varphi \rrbracket_v = 1$$

$$\frac{D}{\perp} \varphi$$

$$\Gamma \models \varphi$$

$$\underline{RAA}: \Gamma \text{ hat } \overset{\neg \varphi}{\perp} \text{ und } \Gamma \models \perp ;$$

$$\Gamma' \text{ hat } \frac{\overset{\neg \varphi}{\perp}}{\varphi} \text{RAA}$$

$$\text{z.z. } \Gamma' \models \varphi$$

Ang. $\Gamma' \models \varphi$, dann $\exists v: \llbracket \varphi \rrbracket_v = 1, \forall \varphi \in \Gamma'$
 und $\llbracket \varphi \rrbracket_v = 0$ aber wie oben gilt
 wenn $\llbracket \varphi \rrbracket = 1 \Rightarrow \llbracket \neg \varphi \rrbracket = 0 \Rightarrow \llbracket \varphi \rrbracket = 1$

$$\Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$$

Def.: Γ ist konsistent falls $\Gamma \not\vdash \perp$

Lemma: Tfae: (i) Γ ist konsistent

(ii) Für kein φ : $\Gamma \vdash \varphi$, $\Gamma \vdash \neg \varphi$

(iii) $\exists \varphi: \Gamma \not\vdash \varphi$

Bew. $\neg(i) \stackrel{\vee}{\Rightarrow} \neg(ii) \stackrel{\vee}{\Rightarrow} \neg(i) \Rightarrow \neg(i)$

$\Gamma \vdash \perp$, dann $\forall \varphi$: $\frac{\perp}{\varphi}$ $\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \neg(iii)$

$\Gamma \vdash \varphi$ und $\Gamma \vdash \neg \varphi$

$\frac{\begin{array}{c} \text{D} \quad \text{D} \\ \varphi \quad \neg \varphi \end{array}}{\perp} \text{RAA} \quad \text{also } \Gamma \vdash \perp$

Lemma: Wenn es v gibt mit $\llbracket \varphi \rrbracket_v = 1 \quad \forall \varphi \in \Gamma$ dann ist Γ konsistent

Bew. Wenn $\Gamma \vdash \perp \Rightarrow \Gamma \models \perp$, aber das ist Widerspruch.

Bsp: $\{p_0, \neg p_1, p_1 \rightarrow p_2\}$ ist konsistent
mit $p_0 = 1, p_1 = 0, p_2 = 0 \checkmark$

$\{p_0, \neg p_0\}$ nicht kons.

Lemma: a) $\Gamma \cup \{\neg \varphi\}$ inkonsistent $\Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$

b) $\Gamma \cup \{\varphi\}$ inkonsistent $\Rightarrow \Gamma \vdash \neg \varphi$

Bew: a) $\Gamma \cup \{\neg \varphi\}$ folgt $\perp \Rightarrow$ Nr mit Ann.

aus Γ gilt: $\frac{\begin{array}{c} [\neg \varphi] \\ \perp \end{array}}{\varphi} \text{RAA} \quad \text{d.h. } \Gamma \vdash \varphi$

b) Analog.

Def: Γ heißt maximal konsistent wenn
 Γ konsistent und wenn $\Gamma' \supset \Gamma$ mit Γ' kons.
dann $\Gamma' = \Gamma$.

Bsp.: Für v Auswertung ist $\{\varphi \mid \llbracket \varphi \rrbracket_v = 1\}$ ist
max. konsistent. $\square$

$\Gamma \cup \{\varphi\}$, denn $\llbracket \varphi \rrbracket = 0 \Rightarrow \llbracket \neg \varphi \rrbracket = 1$
 $\Rightarrow \neg \varphi \in \Gamma$

Lemma: Γ konsistent $\Rightarrow \Gamma \subset \Gamma^*$ max. konsistent.

Bew. Stellen fest: PROP ist abzählbar.

$\varphi_0, \varphi_1, \dots$

$$\Gamma_0 = \Gamma$$

$$\Gamma_{i+1} = \begin{cases} \Gamma_i \cup \{\varphi_i\}, & \text{falls } \Gamma_i \cup \{\varphi_i\} \text{ kons.} \\ \Gamma_i, & \text{sonst.} \end{cases} \quad \Gamma^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Gamma_i$$

Stellen fest: Γ_i konsistent

Zeigen Γ^* max kons.

Γ^* kons.: Ang. nicht, d.h. $\exists D$ in Γ^* , dann

hat D $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ als Ann. $\exists K$ mit $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in \Gamma_K$, aber
dann ist Γ_K nicht konsistent.

max: $\varphi_j \notin \Gamma^* \Rightarrow \Gamma_j \cup \{\varphi_j\}$ nicht konsistent

$\Rightarrow \Gamma^* \cup \{\varphi_j\}$ nicht kons. $\square$

Lemma: Γ max. kons., $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \in \Gamma$

Lemma: Γ max. kons. : (a) $\forall \varphi: \varphi \in \Gamma \vee \neg \varphi \in \Gamma$
(b) $\forall \varphi, \psi: (\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma) \Leftrightarrow (\varphi \in \Gamma \Rightarrow \psi \in \Gamma)$

Bew: a) Ang. $\varphi \notin \Gamma$, d.h. $\Gamma \cup \{\varphi\}$ nicht kons.
 $\Rightarrow \Gamma \vdash \neg \varphi \Rightarrow \neg \varphi \in \Gamma$

b) " $\Rightarrow$ " Ang. $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$ und $\varphi \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \vdash \psi$
 $\Rightarrow \psi \in \Gamma$

" $\Leftarrow$ " Ang. $\varphi \in \Gamma \Rightarrow \psi \in \Gamma$. Fall 1: $\varphi \in \Gamma \Rightarrow \psi \in \Gamma$
 $\Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$

Fall 2: $\varphi \notin \Gamma \Rightarrow \neg \varphi \in \Gamma$ also $\Gamma \vdash \neg \varphi$
 $\Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$

Korollar: Γ max. kons. . $\varphi \in \Gamma \Leftrightarrow \neg \varphi \notin \Gamma$

Lemma: Γ konsistent $\Rightarrow \exists \Gamma$ mit $\langle \varphi \rangle_{\varphi \in \Gamma} = 1 \forall \varphi \in \Gamma$

Bew: $\Gamma^* \supset \Gamma$ max. $v(p_i) = \begin{cases} 1, & p_i \in \Gamma \\ 0, & p_i \notin \Gamma \end{cases}$

$\llbracket \varphi \rrbracket = 1 \Leftrightarrow \varphi \in \Pi^*$ per Induktion nach φ

φ Elementar: $\checkmark$

$\varphi = \psi \wedge \phi : \llbracket \varphi \rrbracket = 1 \Leftrightarrow \llbracket \psi \rrbracket = 1 \text{ und } \llbracket \phi \rrbracket = 1 \Leftrightarrow \psi \in \Pi^* \text{ und } \phi \in \Pi^* \Leftrightarrow \psi \wedge \phi \in \Pi^*$

$\varphi = \psi \rightarrow \phi : \llbracket \varphi \rrbracket = 0 \Leftrightarrow \llbracket \psi \rrbracket = 1 \text{ und } \llbracket \phi \rrbracket = 0 \Leftrightarrow \psi \in \Pi^* \text{ und } \phi \notin \Pi^* \Leftrightarrow \psi \rightarrow \phi \in \Pi^*$

Korollar: $\Pi \not\models \varphi \Rightarrow$ Es gibt Auswertung v mit $\llbracket \varphi \rrbracket = 1 \vee \varphi \in \Pi$ und $\llbracket \varphi \rrbracket = 0$

Bew: $\Pi \not\models \varphi \Rightarrow \Pi \cup \{\neg \varphi\}$ kons. $\Leftrightarrow \exists v: \begin{matrix} \varphi \in \Pi \\ \llbracket \varphi \rrbracket = 1, \\ \llbracket \neg \varphi \rrbracket = 1 \end{matrix} \square$

$(\Pi \not\models \varphi \Rightarrow \Pi \not\models \varphi)$

$\Leftrightarrow (\Pi \models \varphi \Rightarrow \Pi \vdash \varphi)$