Messbare Kardinalzahlen III

Sunday, 23 January 2022 5:19 PM

Reduzierte Produkte und Ultraprodukte

abg. unter Obermengen und Schnitten, $\emptyset \notin F$

Sei $S \neq \emptyset$, $\{\mathfrak{A}_x : x \in S\}$ System von $\mathcal{L}$-Modellen, F Filter auf S

Definiere Äquivalenzrelation $=_F$ auf $\prod_{x \in S} A_x$ $\qquad \mathfrak{A}_x = (A_x, \dots)$

$$a, b \in \prod_{x\in S} A_x, \quad a =_F b \quad \text{gdw} \quad \{x \in S : a(x) = b(x)\} \in F$$

Dies ist eine Äquivalenzrelation:

$a =_F a$, da $\{x \in S : a(x) = a(x)\} = S \in F$

$a =_F b \Rightarrow b =_F a$ per Definition

$a =_F b \wedge b =_F c \Rightarrow a =_F c$, da $\underbrace{\{x \in S : a(x) = c(x)\}}_{\in F} \supseteq \overline{\underbrace{\{x \in S : a(x) = b(x)\}}_{\in F} \cap \underbrace{\{x \in S : b(x) = c(x)\}}_{\in F}}$ $\Leftarrow$

Reduziertes Produkt: $\mathfrak{A} = \left(\prod_{x \in S} A_x \big/ {=_F}, f^{\mathfrak{A}}, R^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{A}}\right)$ $\mathcal{L}$-Modell mit

n-stellige Funktion: $f^{\mathfrak{A}}([a_1] \dots [a_n]) = [b]$ mit $b(x) = f^{\mathfrak{A}_x}(a_1(x) \dots a_n(x))$

n-stellige Relation: $R^{\mathfrak{A}}([a_1] \dots [a_n])$ gdw $\{x \in S : R^{\mathfrak{A}_x}(a_1(x) \dots a_n(x))\} \in S$

Konstante: $c^{\mathfrak{A}} = [a]$ mit $a(x) = c^{\mathfrak{A}_x}$ $\forall x \in S$

Dies ist wohldefiniert:

- Sei $a_i =_F a_i'$, $b(x) = f^{\mathfrak{A}_x}(a_1(x) \dots a_n(x))$, $b'(x) = f^{\mathfrak{A}_x}(a_1'(x) \dots a_n'(x))$. z.z. $b =_F b'$
  Dann $M = \{x \in S : \forall i \leq n \; a_i(x) = a_i'(x)\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in S : a_i(x) = a_i'(x)\} \in F$ (Filter abg. unter endl. Schnitten)
  Damit $\{x \in S : b(x) = b'(x)\} \supseteq M \in F \Rightarrow b =_F b'$
- Sei $a_i =_F a_i'$, ang. $\{x \in S : R^{\mathfrak{A}_x}(a_1(x) \dots a_n(x))\} \in F$
  Es gilt wie oben, dass $M \in F$ und damit $\{x \in S : R^{\mathfrak{A}_x}(a_1(x) \dots a_n(x))\} \cap M \in F$
  und dies ist eine Obermenge von $\{x \in S : R^{\mathfrak{A}_x}(a_1'(x) \dots a_n'(x))\} \in F$

$\forall A \subseteq X : A \in \mathcal{U} \vee A^c \in \mathcal{U}$

Ultraprodukt: Ist F ein Ultrafilter auf S, so heißt $\mathfrak{A}$ Ultraprodukt von $\{\mathfrak{A}_x : x \in S\}$, schreibe $\mathfrak{A} = \mathrm{Ult}_F\{\mathfrak{A}_x : x \in S\}$

Ultrapotenz: Gilt $\mathfrak{A}_x = \mathfrak{B}$ für alle $x \in S$, $\mathcal{U}$ Ultrafilter auf S, so heißt $\mathrm{Ult}_{\mathcal{U}} \mathfrak{B} := \mathrm{Ult}_{\mathcal{U}}\{\mathfrak{A}_x : x \in S\}$ Ultrapotenz von $\mathfrak{B}$

Łós Theorem

Sei $\mathcal{U}$ Ultrafilter auf $S \neq \emptyset$ und sei $\mathfrak{A} = \mathrm{Ult}_{\mathcal{U}}\{\mathfrak{A}_x : x \in S\}$ Ultraprodukt, dann gilt:

(i) Ist φ eine Formel, dann gilt für alle $a_1 \dots a_n \in \prod_{x\in S} A_x$

$$\mathfrak{A} \models \varphi([a_1] \dots [a_n]) \quad \text{gdw} \quad \{x \in S : \mathfrak{A}_x \models \varphi(a_1(x) \dots a_n(x))\} \in \mathcal{U}$$

(ii) Ist σ ein Satz, so gilt $\mathfrak{A} \models \sigma$ gdw. $\{x \in S : \mathfrak{A}_x \models \sigma\} \in \mathcal{U}$

Beweis:

(i) I.A. $\varphi \equiv u = v$, $\quad \mathfrak{A} \models \varphi([a_1] \dots [a_n]) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models (u = v)([a_1] \dots [a_n])$

$$\Leftrightarrow \underbrace{u([a_1] \dots [a_n])}_{:=[c]} = \underbrace{v([a_1] \dots [a_n])}_{:=[d]}$$

$$\Leftrightarrow c \equiv_{\mathcal{U}} d$$

$$\Leftrightarrow \{x \in S : c(x) = d(x)\} \in \mathcal{U}$$

$$\Leftrightarrow \{x \in S : \mathfrak{A}_x \models c(x) = d(x)\} \in \mathcal{U}$$

$$\Leftrightarrow \{x \in S : \mathfrak{A}_x \models \varphi(a_1(x) \dots a_n(x))\} \in \mathcal{U}$$

$\varphi = R(v_1 \dots v_n)$, $\quad \mathfrak{A} \models \varphi([a_1] \dots [a_n]) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models R([a_1] \dots [a_n])$

$$\Leftrightarrow \{x \in S : R^{\mathfrak{A}_x}(a_1(x) \dots a_n(x))\} \in \mathcal{U}$$

$$\Leftrightarrow \{x \in S : \mathfrak{A}_x \models R(a_1(x) \dots a_n(x))\} \in \mathcal{U}$$

$$\Leftrightarrow \{x \in S : \mathfrak{A}_x \models \varphi(a_1(x) \dots a_n(x))\} \in \mathcal{U}$$

I.S. Ang., Beh. gilt für Formeln φ, ψ

- $\mathfrak{A} \models \neg\varphi([a])$ gdw. nicht $\mathfrak{A} \models \varphi[a]$

  gdw $\{x \in S : \mathfrak{A}_x \models \varphi[a(x)]\} \notin \mathcal{U}$

  gdw $\{x \in S : \mathfrak{A}_x \models \neg\varphi[a(x)]\} \in \mathcal{U}$

- $\mathfrak{A} \models \varphi \wedge \psi\ [a]$ gdw $\mathfrak{A} \models \varphi[a]$ und $\mathfrak{A} \models \psi[a]$

  gdw. $\{x \in S : \mathfrak{A}_x \models \varphi[a(x)]\} \in \mathcal{U}$ und

  $\{x \in S : \mathfrak{A}_x \models \psi[a(x)]\} \in \mathcal{U}$

  gdw. $\{x \in S : \mathfrak{A}_x \models \varphi \wedge \psi\ [a(x)]\} \in \mathcal{U}$

- $\mathfrak{A} \models (\exists u)\varphi[a_1 \ldots a_n, u]$ gdw. $\exists b \in \prod_{x \in S} A_x$ sd. $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1 \ldots a_n, b]$

  gdw $\exists b(x) \in A_x$
  $b = \prod b(x)$

  $\{x \in S : \mathfrak{A}_x \models \varphi[a_1(x) \ldots a_n(x), b(x)]\}$
  $\in \mathcal{U}$

  gdw. $\{x \in S : \mathfrak{A}_x \models \exists u_x\ \varphi[a_1(x) \ldots a_n(x), u(x)]$
  $\in \mathcal{U}$

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Bemerkung:

- Maßtheoretische Formulierung:

  $\mathfrak{A}_x$ erfüllt $\varphi(a_1(x) \dots a_n(x))$ für fast alle x

  $\mathfrak{A}_x \models \varphi(a_1(x) \dots a_n(x))$ fast überall

$\rightsquigarrow \mathfrak{A} \models \varphi([a_1] \dots [a_n])$ gdw $\mathfrak{A}_x \models \varphi(a_1(x) \dots a_n(x))$ (f.ü.)

Korollar:

Eine Ultrapotenz von $\mathfrak{A}$ ist elementar äquivalent zu $\mathfrak{A}$

($\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ gdw $\mathfrak{A} \models \sigma$ gdw $\mathfrak{B} \models \sigma$ für alle Sätze σ)

Beweis:

$\underbrace{\mathrm{Ult}_{\mathcal{U}} \mathfrak{A}}_{\prod \mathfrak{A}_x = \prod \mathfrak{A}} \models \sigma \overset{(ii)}{\text{gdw}} \{x \in S : \underbrace{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{A}_x = \mathfrak{A}} \models \sigma\} \in \mathcal{U}$ gdw. $\mathfrak{A} \models \sigma$ ($\emptyset \notin \mathcal{U}$)

$\mathfrak{A}_x = \mathfrak{A}$

Korollar:

$j : \mathfrak{A} \to \mathrm{Ult}_{\mathcal{U}} \mathfrak{A} : \underset{a}{\overset{A}{\cup\!\!\!|}} \mapsto c_a$, wobei $c_a(x) = a \quad \forall x \in S$, kanonische Einbettung von $\mathfrak{A}$ in seine Ultrapotenz, ist eine elementare Einbettung.

($j : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ elementare Einbettung gdw $j(\mathfrak{A}) \prec \mathfrak{B}$ elementare Substruktur, d.h. $\forall \varphi$ Formel, $a_1 \dots a_n \in j(\mathfrak{A})$, $j(\mathfrak{A}) \models \varphi(a_1 \dots a_n)$ gdw $\mathfrak{B} \models \varphi(a_1, \dots a_n)$)

Beweis:

Sei $a \in A$, φ Formel

$\underbrace{\mathrm{Ult}_{\mathcal{U}} \mathfrak{A}}_{\prod_{x \in S} \mathfrak{A} / =_{\mathcal{U}}} \models \varphi[j(a)]$ gdw. $\mathrm{Ult}_{\mathcal{U}} \mathfrak{A} \models \varphi[c_a]$

gdw $\mathfrak{A} \models \varphi[a]$

$\square$

Sei $S \neq \emptyset$, $\mathcal{U}$ Ultrafilter auf S

Definiere Äquivalenzrelation $=^*$ auf der Klasse der Funktionen mit Definitionsbereich S:

$$f =^* g \quad \text{gdw} \quad \{x \in S : f(x) = g(x)\} \in \mathcal{U}$$

$$[f] = \{g : f =^* g \text{ und } \forall h\, (h =^* f \to \operatorname{rank} g \leq \operatorname{rank} h)\}$$

rank: Definiere $V_0 = \emptyset$, $V_{\alpha+1} = P(V_\alpha)$, $V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta$ für α Limit-Ordinalzahl

$\operatorname{rank}(x) :=$ kleinste Ordinalzahl, sodass $x \in V_{\alpha+1}$

Sei $(V, \in)$ Struktur von $\mathcal{L}$, Sprache der Mengenlehre, definiere
$\mathcal{A} = V$, $\mathcal{I}_x = V$

$Ult := Ult_{\mathcal{U}}(V)$ Klasse alle Äquivalenzklassen $[f]$ mit $f : S \to V$

Definiere $\mathcal{L}$-Struktur $(Ult, \in^*)$ mit $f \in^* g$ gdw. $\{x \in S : f(x) \in g(x)\} \in \mathcal{U}$

$\leadsto$ Łoś Theorem:

- $Ult \models \varphi([f_1] \dots [f_n])$ gdw $\{x \in S : V \models \varphi(f_1(x) \dots f_n(x))\} \in \mathcal{U}$ für $\varphi(x_1, \dots x_n)$ $\mathcal{L}$-Formel
- $j_{\mathcal{U}} : V \to Ult : a \mapsto c_a$, c_a konst. Funktion auf a, ist eine elementare Einbettung

wohlfundiert: $Ult_{\mathcal{U}}(V)$ ist wohlfundiert, falls

(i) $\forall X \subseteq Ult$, $X \neq \emptyset$: X besitzt ein $\in^*$-minimales Element

(ii) $ext(f) := \{[g] : g \in^* f\}$ ist eine Menge für alle $f : S \to V$

Bemerkung

- (ii) gilt für alle Ultrafilter $\mathcal{U}$ per Definition
- (i) gilt gdw es keine unendlich-absteigenden Folgen $f_0^* \ni \dots \ni f_n^* \ni \dots$ gibt

Lemma

σ-Schnitte sind enthalten

Falls $\mathcal{U}$ σ-vollständiger Ultrafilter ist, dann gilt $(Ult, \in^*)$ ist wohlfundierte Struktur.

Beweis:

Ang. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $f_n^* \ni f_{n+1}$

$$X_n = \{x \in S : f_{n+1}(x) \in f_n(x)\} \in \mathcal{U} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n \in \mathcal{U} \qquad X := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n \neq \emptyset$$

$$x \in X \qquad f_0(x) \ni f_1(x) \ni \dots \quad \text{↯}$$

$$\{f_i(x)\}$$

Lemma

Falls es ein messbare Kardinalzahl κ gibt so existiert eine elementare Einbettung $j: V \to M$, M transitiv, sodass j nicht die Identität ist.

Beweis

Mostowski-Collapsing-Theorem: Jedes wohlfundierte Modell ist isomorph zu einem trans. Modell

$\in^*$ Extensional, da V extensional + j elementare Einbettung

$\pi : Ult \to M$, M transitiv, π Bijektion

$$f \in^* g \quad \to \quad \pi([f]) \in \pi([g])$$

$[f]$ $\quad \pi([f])$ $\qquad M \sim \mathrm{Ult}_{\mathcal{U}}(V)$

$j = j_{\mathcal{U}} : V \to M$ (↗ Ult, ⇓ is)

$j \neq id$:

κ messbare Kardinalzahl, $\mathcal{U}$ κ-vollständiger Ultrafilter

$d : \kappa \to \kappa : \alpha \mapsto \alpha \quad \forall \alpha < \kappa$

$\forall \gamma < \kappa \quad d(\alpha) > \gamma \quad$ (fü) $\quad \alpha < \kappa$

$[d] > \gamma \quad \forall \gamma < \kappa \quad \Rightarrow \quad [d] \geq \kappa$

$[d] < j(\kappa) \Rightarrow j(\kappa) > \kappa \quad \Rightarrow \quad j \neq id$

Lemma:
Ist $j: V \to M$ eine nichttriviale elementare Einbettung, so existiert eine messbare Kardinalzahl κ.

Beweis:

$j: V \to M$, α Ord. $j(\alpha) \neq \alpha$

Ang. α ex. nicht

(Ind. über rank $\operatorname{rank}(jx) = \operatorname{rank}(x)$ $\forall x \in V$ $\to$ $j = id$ ↯)

κ die kleinste Ordinalzahl $j(\kappa) \neq \kappa$

$j(n) = n$ $n \in \mathbb{N}$

$j(\omega) = \omega$

$\Rightarrow \kappa > \omega$

$D \subseteq P(\kappa)$, $X \in D$ gdw. $\kappa \in j(X)$

$X \subseteq \kappa$

$\kappa < j(\kappa)$, $\kappa \in D$

$\emptyset \notin D$, $j(\emptyset) = \emptyset$

D Filter: $X, Y \in D$,

$\kappa \in j(X)$, $\kappa \in j(Y)$

$\kappa \in j(X \cap Y) = j(X) \cap j(Y)$ $\Rightarrow X \cap Y \in D$

j injektiv

$X \in D$, d.h. $\kappa \in j(X)$, $X \subseteq Y$

$$\kappa \in j(Y) \supseteq j(X) \ni \kappa \quad \Rightarrow \quad Y \in D$$

D Ultrafilter: $X \notin D$, d.h. $\kappa \notin j(X)$

$$\Rightarrow \quad \kappa \in j(\kappa \setminus X) = j(\kappa) \setminus j(X)$$

$$\Rightarrow \quad \kappa \setminus X \in D$$

D frei: $\forall \alpha < \kappa \quad j(\{\alpha\}) = \{\alpha\}$

$$\Rightarrow \quad \kappa \notin j(\{\alpha\}) \quad \Rightarrow \quad \{\alpha\} \notin D$$

D κ-vollständig: $\gamma < \kappa$, $\mathcal{X} = (X_\alpha : \alpha < \gamma)$, $X_\alpha \in \kappa$

$\kappa \in j(X_\alpha)$ d.h. $X_\alpha \in D$

$$X := \bigcap_{\alpha < \gamma} X_\alpha \overset{!}{\underset{?}{\in}} D$$

$$j(X) = \bigcap_{\alpha < \gamma} \underbrace{\underbrace{j(X_\alpha)}_{\ni \kappa}}_{\ni \kappa} \quad \Rightarrow \kappa \in j(X)$$

$$\Rightarrow \quad X \in D$$

Lemma

Sei $j: V \to M$ eine nichttriviale elementare Einbettung, κ kleinste Ordinalzahl, sodass $j(\kappa) \neq \kappa$, D Ultrafilter vom letzten Beweis.
Sei $j_D: V \to Ult$ die kanonische elementare Einbettung von V in $Ult_D(V)$.
Dann existiert eine elementare Einbettung $k: Ult \to M$, sodass $k(j_D(\alpha)) = j(\alpha)$ $\forall \alpha$, d.h. das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
a \in V \arrow[r, "j"] \arrow[d, "j_D"'] \arrow[dr, phantom, "="] & M \\
Ult \arrow[ur, dashed, "k"'] &
\end{tikzcd}$$

Beweis:

$$\forall [f] \in Ult, \quad k([f]) = j(f)(\kappa)$$

Wohldefiniert: $f =_D g$, d.h. $X = \{\alpha : f(\alpha) = g(\alpha)\} \in D$

$$\Rightarrow \kappa \in j(X) = \{\alpha < j(\kappa) : (jf)(\alpha) = (jg)(\alpha)\}$$

$$\Rightarrow (jf)(\kappa) = (jg)(\kappa)$$

k elementar: $\varphi(x)$, $Ult \models \varphi([f])$

$$X = \{\alpha : V \models \varphi([f(\alpha)])\} \in D$$

$$\kappa \in j(X), \quad (jf)(\kappa) = k([f])$$

$$M \models \varphi(k[f]) \qquad j(X) = \{\alpha < j(\kappa) : M \models \varphi((jf)(\alpha))\} \ni \kappa$$

Diagramm kommutiert:

$a \in V$, $j_D(a) = [c_a]$ ← konstant mit Wert a

$j_D(a) = [c_a]$

konstant mit Wert a

$$k(j_D(a)) = (j(c_a))[K] = j(a)$$