Lösungsvorschlag zum Übungsblatt 2

Aufgabe 1

Sind die Vektoren linear unabhängig, so darf $\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z = 0, \lambda_i \in \mathbb{R}$ nur für $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0)$ gelten. Dies ist genau dann der Fall, wenn die folgende Determinante nicht verschwindet:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Damit sind die drei Vektoren linear unabhängig.

Wir beschreiben die Seiten des Dreiecks nun durch die Vektoren:

$$y - x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; z - y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; x - z = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Diese haben jeweils die Länge

$$\|y - x\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \; \|z - y\| = 1, \; \|x - z\| = \sqrt{5}$$

Zu berechnen sind die Innenwinkel des Dreiecks, also der Winkel α zwischen $y - x$ und $-(x - z)$, der Winkel β zwischen $z - y$ und $-(y - x)$, sowie der Winkel γ zwischen $x - z$ und $-(z - y)$. Wir berechnen sie aus:

$$\cos\alpha = \frac{< z - x, y - x >}{\|z - x\| \|y - x\|} = \frac{2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1}{\sqrt{5}\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\cos\beta = \frac{< z - y, x - y >}{\|z - y\| \|x - y\|} = \frac{1 \cdot (-1)}{1 \cdot \sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{< x - z, y - z >}{\|x - z\| \|y - z\|} = \frac{(-2) \cdot (-1)}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Es ist also $\alpha = \arccos(\frac{3}{\sqrt{10}}) \approx 0.32175$ (bzw. $18.435°$), $\beta = \frac{3\pi}{4}$ (bzw. $135°$), $\gamma \approx 0.46365$ (bzw. $26.565°$.) [Probe: Die Winkelsumme ist $180°$!]

Aufgabe 2

In Parameterdarstellung erhalten wir als Ebenengleichung:

$$E : x = a + \lambda(b - a) + \mu(c - a) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \; \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Den Normalenvektor berechnen wir mittels

$$n = (b - a) \times (c - a) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-4) \cdot 3 - (-3) \cdot 4 \\ (-3) \cdot 1 - 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 4 - (-4) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 12 \end{pmatrix}$$

und normieren diesen

$$\|n\| = 15 \Rightarrow n^0 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

womit wir schließlich die Hesse'scher Normalform der Ebene erhalten:

$$\frac{1}{5} < \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, x >= \frac{1}{5} < \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} >= 0$$

Der Abstand von q zu E ist $| < n^0, q > - < n^0, a > | = 2$.

Die Gerade durch p und q ist gegeben durch

$$G : x = p + \lambda(q - p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Setzen wir dies in die Hesse'sche Normalform ein, so erhalten wir

$$0 = \frac{1}{5} < \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} >= \frac{1}{5}(-6 - 4\lambda) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{3}{2}$$

und damit nach Einsetzen in die Geradengleichung den Schnittpunkt $(-\frac{3}{2}, 2, \frac{3}{2})$.

Für den Winkel β zwischen dem Einheitsnormalenvektor von E und dem Richtungsvektor von G gilt:

$$\cos\beta = \frac{0 \cdot 0 + \frac{3}{5} \cdot 0 + \frac{(-4)}{5} \cdot (-1)}{\sqrt{2}} = \frac{4}{5\sqrt{2}},$$

also $\beta = \arccos(\frac{4}{5\sqrt{2}}) \approx 0.9695$.

Der gesuchte Winkel α zwischen G und E ist also $= \pi/2 - \beta \approx 0.60126$ (bzw. 34,450°)

Aufgabe 3

Das Produkt einer $(n \times r)$-Matrix A mit einer $(r \times m)$-Matrix B ist definiert als $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}$, d.h. das Element in der i.ten Zeile und j.ten Spalte der $(n \times m)$-Matrix AB ist das Standardskalarprodukt aus dem i.ten Zeilenvektor von A und dem j.ten Spaltenvektor von B. Da A eine (3×3)-Matrix, B eine (3×4)-Matrix und C eine (4×3)-Matrix ist, existieren alle Produkte mit Ausnahme von BA.

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3+4+0 & 3+4+2 & 3+4+4 & 3+4+6 \\ 0+2+0 & 0+2+0 & 0+2+0 & 0+2+0 \\ -2-4-0 & -2-4-1 & -2-4-2 & -2-4-3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 9 & 11 & 13 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ -6 & -7 & -8 & -9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BC &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2-1+0+2 & 1+0-2-3 & -3+1+4-1 \\ 4-2+0+4 & 2+0-4-6 & -6+2+8-2 \\ 0-1+0+6 & 0+0-4-9 & 0+1+8-3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 6 & -8 & 2 \\ 5 & -13 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
CB &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2+2+0 & 2+2-3 & 2+2-6 & 2+2-9 \\ -1+0+0 & -1+0+1 & -1+0+2 & -1+0+3 \\ 0-4+0 & 0-4+4 & 0-4+8 & 0-4+12 \\ 2-6+0 & 2-6-1 & 2-6-2 & 2-6-3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & -5 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & 4 & 8 \\ -4 & -5 & -6 & -7 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn es sich um eine quadratische Matrix mit nicht verschwindender Determinante handelt. Möglicherweise invertierbar ist also nur A, und wir beginnen (ohne vorher die Determinante überprüfen zu müssen) mit der Variante des Gauß'schen Eliminationsverfahrens zur Bestimmung von A^{-1}:

$$
\left(\begin{array}{ccc||ccc} 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc||ccc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc||ccc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc||ccc} 1 & \frac{2}{3} & 0 & -1 & -\frac{4}{3} & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc||ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right)
$$

Also ist A invertierbar, und A^{-1} steht rechts.

Aufgabe 4

a) $(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 1+2i-1 = 2i$ und $z+i = 2i \Leftrightarrow z = i$

b) $2iz+1 = z \Leftrightarrow 1 = (1-2i)z \Leftrightarrow z = \frac{1}{1-2i} = \frac{1+2i}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$

c) $z^2+4z = -13 \Leftrightarrow z^2+4z+4 = -9 \Leftrightarrow (z+2)^2 = -9 \Leftrightarrow z+2 = \pm 3i \Leftrightarrow z = -2 \pm 3i$

d) Die Gleichung $x^3+x^2-2 = 0$ ist für $x = 1$ erfüllt, somit können wir die Polynomdivision durch $(x-1)$ durchführen:

$$
\begin{array}{lllll}
\big(& x^3 & +x^2 & & -2\big) : (x-1) = x^2+2x+2 \\
& -x^3 & +x^2 & & \\
\hline
& & 2x^2 & & \\
& & -2x^2 & +2x & \\
\hline
& & & 2x & -2 \\
& & & -2x & +2 \\
\hline
& & & & 0
\end{array}
$$

Neben $x_1 = 1$ erhalten wir die beiden weiteren Lösungen $x_2 = -1+i,\ x_3 = -1-i$ (z.B. mittels pq-Formel angewandt auf $x^2+2x+2 = 0$).