Kürzeste Wege und optimale Standorte – Von Industriestandorten, Bomben und Seifenblasen

Ulrich Eckhardt
Universität Hamburg
Department Mathematik
— Optimierung und Approximation —
Bundesstraße 55
20 146 Hamburg
E–Mail: Eckhardt@math.uni-hamburg.de
http://www.math.uni-hamburg.de/home/eckhardt/

Inhaltsverzeichnis

Vortrag am 11. April 2008 im Rahmen der Ringvorlesung „Spektrum der Wissenschaftsgeschichte III“ an der Universität Hamburg.

Abbildungsverzeichnis

1 Einleitung

Wir beginnen zur Einstimmung in die Aufgabenstellung mit einer Aufgabe, die man oft in Büchern über Unterhaltungsmathematik findet. Der bedeutende polnische Mathematikers Hugo Dyonizy Steinhaus (1887 – 1972) hat eine große Anzahl von sehr bedeutenden Arbeiten zu „seriösen“ Themen geschrieben, aber auch Beiträge zur unterhaltenden Mathematik. Bekannt ist sein Buch *Kaleidoskop der Mathematik*, aus dem wir hier zitieren [70, S. 121].

> Drei Dörfer wollen eine gemeinsame Schule errichten. Um die insgesamt von den Schülern für den Schulweg aufgewendete Zeit möglichst klein zu halten, müssen sie eine geeignete Stelle für die Anlage der Schule ausfindig machen. Sie haben beispielsweise 50 bzw. 70 bzw. 90 Kinder.

Steinhaus führt ein mechanisches Modell zur Lösung dieser Aufgabe an:

> Man breitet die Bezirkskarte auf einem Tisch aus, bohrt an den Stellen der Dörfer Löcher in den Tisch, führt drei Schnüre durch die Löcher, bindet sie an den oberen Enden zu einem Knoten zusammen und belastet die unteren Enden mit 50 bzw. 70 bzw. 90 Dekagramm. Die Schule sollte an der Stelle gebaut werden, auf die sich der Knoten einstellt.

Um einzusehen, daß das mechanische Modell die Aufgabe löst, muß man sich vergegenwärtigen, daß sich in dem Modell die Gewichte so einstellen werden, daß ihr gemeinsamer Schwerpunkt am tiefsten liegt. Wir formulieren dies mathematisch, indem wir ein Koordiantensystem einführen, dessen x- und y-Achse sich auf dem Tisch befinden und rechtwinklig aufeinander stehen. Die z-Achse wird senkrecht zum Tisch gedacht, so daß die positive z-Richtung nach oben zeigt. Dann haben die drei Dörfer die Positionen $P_1 = (x_1, y_1, 0)$, $P_2 = (x_2, y_2, 0)$ sowie $P_3 = (x_3, y_3, 0)$. Wir bezeichnen die drei Gewichte mit den Buchstaben $w_1(= 50)$, $w_2(= 70)$ und $w_3(= 90)$. Weiterhin nehmen wir an, daß die Schnüre die Längen ℓ_1 (das ist die Schnur, an dem das Gewicht w_1 hängt), ℓ_2 beziehungsweise ℓ_3 haben. Ist die Vorrichtung aufgebaut und sind die Schnüre zusammengeknotet, dann hat das erste Gewicht die Position (x_1, y_1, z_1) in unserem Koordinatensystem, wobei z_1 eine negative Zahl ist, die angibt, in welcher Höhe das Gewicht w_1 hängt, beziehungsweise, wie weit das Gewicht w_1 von der Tischplatte entfernt ist. Analog für die beiden anderen Längen. Der Schwerpunkt der Gewichte errechnet sich gemäß

$$w_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + w_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + w_3 \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

Uns interessiert zunächst nur die z-Komponente des Schwerpunktes. Sie muß, wie wir aus dem Physikunterricht wissen, einen möglichst niedrigen Wert erreichen, das heißt, es wird gelten:

$$w_1 z_1 + w_2 z_2 + w_3 z_3 \longrightarrow \text{ Minimum.}$$

Wenn wir die Entfernungen des Knotens, der sich im Punkte $P = (x, y, 0)$ befinden möge, von den Orten der drei Dörfer auf der Karte mit $d_i = d(P, P_i)$ für $i = 1, 2, 3$ bezeichnen, dann ist (man beachte, daß die z_i negativ sind)

$$\ell_i = d_i - z_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Hieraus folgt

$$w_1 d_1 + w_2 d_2 + w_3 d_3 = w_1 \ell_1 + w_2 \ell_2 + w_3 \ell_3 + w_1 z_1 + w_2 z_2 + w_3 z_3.$$

Da die Summe der mit den Gewichten multiplizierten Gesamtlängen der Schnüre für unsere Aufgabe eine konstante Größe ist, wird die für uns interessante Größe $w_1 d_1 + w_2 d_2 + w_3 d_3$ genau dann minimal, wenn die Größe $w_1 z_1 + w_2 z_2 + w_3 z_3$ ein Maximum annimmt (Man beachte das negative Vorzeichen der z_i!).

Aufgaben dieser Art tauchen in der mathematischen Unterhaltungsliteratur immer wieder auf. So formulierte A. K. Dewdney die gleiche Aufgabe in einem etwas anderen Gewand [20]: Für den Betrieb eines Hochofens benötigt man regelmäßig eine gewisse Menge an Eisenerz, Kohle und an Zuschlagstoffen (etwa Kalk). Sind jetzt P_i die Orte, an denen die benötigten Rohstoffe vorhanden sind und w_i die jeweils benötigten Mengen, dann ergibt sich der optimale Standort des Hochofens auf die gleiche Weise wie der optimale Standort der Schule. Den entsprechenden mechanischen Apparat zur Ermittlung des optimalen Standorts bezeichnet Dewdney als HOSTACO (**Ho**chofen-**Sta**ndort-**Co**mputer) und führt ihn als Beispiel eines Analogrechners zur Lösung der genannten Aufgabe an.

Man findet diese Aufgabe auch in dem sehr „seriösen“ zweibändigen Werk *Methoden der mathematischen Physik* von Richard Courant und David Hilbert aus dem Jahre 1924 [17]. Im ersten Band findet man im vierten Kapitel die Paragraphen *1.1 b: Fermat'sches Prinzip* und *1.1 c: Steiner'sches Problem* als Beispiele für Aufgaben der Variationsrechnung. Allem Anschein nach stammt diese Benennung nach Steiner von Courant und Hilbert. Wir werden sehen (Seite 17), daß diese Bezeichnung der Aufgabe nicht ganz glücklich ist. In dem Buch *Was ist Mathematik?* von Courant und Herbert Robbins [18] (1. Auflage 1941) wird die Fermatsche Aufgabe als illustrierendes Beispiel für Mathematik angegeben. Auf S. 354 dieses Buches findet man sie als §*5. Steiner's Problem.* Auf S. 359 f. schreiben die Autoren:

> In Steiner's problem three fixed points A, B, C are given. It is natural to generalize this problem to the case of n given points, $A_1, A_2, \cdots, A_n$; we ask for the point P in the plane for which the sums of the distances $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ is a minimum, where a_i is the distance PA_i. (For four points arranged as in Fig. 215, the point P is the point of intersection of the diagonals of the quadrilateral $A_1A_2A_3A_4$; the reader may prove this as an exercise.) This problem, which was also treated by Steiner, does not lead to interesting results. It is one of the superficial generalizations not infrequently found in mathematical literature.

Wir werden sehen, daß man diese letzte Aussage als grandiose Fehleinschätzung bezeichnen darf.

Schließlich ist noch das wichtige Buch von Georg Pólya *Mathematik und plausibles Schließen* zu nennen [59]. In diesem Buch, dessen erste englische Auflage 1954 erschienen ist, wird die Fermatsche Aufgabe als ein Paradebeispiel für die Lösung mathematischer Aufgaben vorgestellt. In Kapitel IX, S. 215 ff. schildert der Autor, ausgehend von dem Fermatschen Prinzip des kürzesten Lichtweges, den Weg zur Lösung der Aufgabe von Fermat, die er als Aufgabe von Cavalieri bezeichnet [59, S. 220]. Er bringt auch mechanisches Modell von der eingangs angeführten Art als ein Beispiel für eine Analogie aus der Physik [59, S. 221 f.].

Bevor wir nun diese Aufgabenstellung weiter untersuchen, sollen einige allgemeine Bemerkungen und Beobachtungen zusammengestellt werden, die in die Vorgehensweise und Entwicklung der Mathematik – hier vor allem der angewandten Mathematik – einführen sowie in die Probleme, die sich aus der Wechselwirkung von Mathematik und Realität ergeben.

1.1 Existenz

Die erste Frage, die sich ein Mathematiker stellen muß, ist, ob es überhaupt eine Lösung der vorgelegten Aufgabe gibt. Mit dieser Fragestellung stößt man bei Anwendern häufig auf verständnisloses Kopfschütteln. Man möchte auch hier sagen, daß es doch ziemlich „klar“ ist, daß es eine Lösung, also den optimalen Standort, gibt. Unsere Studentinnen und Studenten lernen schon im ersten Semester, daß die Existenzfrage hier „trivial“ ist, schließlich gibt es ja den *Satz von Bolzano und Weierstraß*, der hier die Existenz garantiert. Man sollte sich aber vor Augen halten, daß dieser Satz sehr subtil ist und daß er ein Produkt der Neuzeit ist, Bernard Bolzano (1781 – 1848) und Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815 – 1897) haben die moderne Analysis begründet, und auf dieser Grundlage läßt sich dann dieser fundamentale Satz der modernen Mathematik formulieren und beweisen. Hier soll dieser Hinweis genügen.

1.2 Eindeutigkeit

Auch diese Frage gilt als typische „Mathematikerfrage“ und ruft gelegentlich bei Anwendern Veständnislosigkeit hervor. Ein Wirtschaftswissenschaftler würde etwa so argumentieren, daß bei Vorliegen mehrerer gleichwertiger Lösungen man dann eben nach einem zweiten Kriterium die bessere wählen kann. Bei dem Beispiel der Schule könnte man beim Vorliegen von Alternativen etwa anhand des Grundstückspreises, der Erschließungskosten ... entscheiden. Wir Mathematiker insistieren jedoch auf dieser Frage, denn eine große Zahl von Verfahren zur Lösung von Aufgabenstellungen setzen stillschweigend voraus, daß es nur eine Lösung geben darf. Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, dann scheitern diese Verfahren in aller Regel.

Hinzu kommt hier, daß es bei unserer Aufgabenstellung in der Tat in gewissen Fällen mehrere Lösungen geben kann. Wenn wir nur zwei Dörfer hätten und wenn in beiden Dörfern die Anzahl der Kinder gleich wäre, dann würde jeder Punkt der Verbindungsstrecke optimale Lösung sein, denn die gesamte für den Schulweg zurückgelegte Wegstrecke wäre dann gerade das Produkt aus der Entfernung der beiden Dörfer und der Gesamtzahl der Schulkinder. Hier könnte man natürlich sagen, daß dann eben die Schule aus Gründen der Gerechtigkeit genau in der Mitte zwischen die beiden Dörfer gebaut werden sollte. In unserer ursprünglichen Aufgabenstellung kam aber das Wort „Gerechtigkeit“ nicht vor!

1.3 Eigenschaften der Lösung – Sonderfälle

Es ist häufig sinnvoll, sich vorab zu überlegen, welche Eigenschaften die Lösung der untersuchten Aufgabenstellung hat und welche Sonderfälle man erwarten kann. Bei der Fermatschen Aufgabe liegt zum Beispiel ein solcher Sonderfall vor, wenn das von den drei gegebenen Punkte definierte Dreieck extrem stumpfwinklig ist. Konkret: Wenn ein Winkel dieses Dreiecks größer oder gleich 120^o ist, dann liegt die Lösung in dem zu diesem Winkel gehörigen Punkt (Abbildung 1).

1.4 Invarianzen

Hier trifft sich der Mathematiker mit dem Anwender. Es empfiehlt sich immer, bei einer vorgelegten geometrischen Aufgabe nach Invarianzen Ausschau zu halten. Hier scheint vollkommen klar, daß das Problem translationsinvariant ist, das heißt, daß die Lösung der Aufgabe nicht davon abhängt, wo die drei Dörfer konkret liegen, es kommt nur auf ihre gegenseitigen Entfernungen

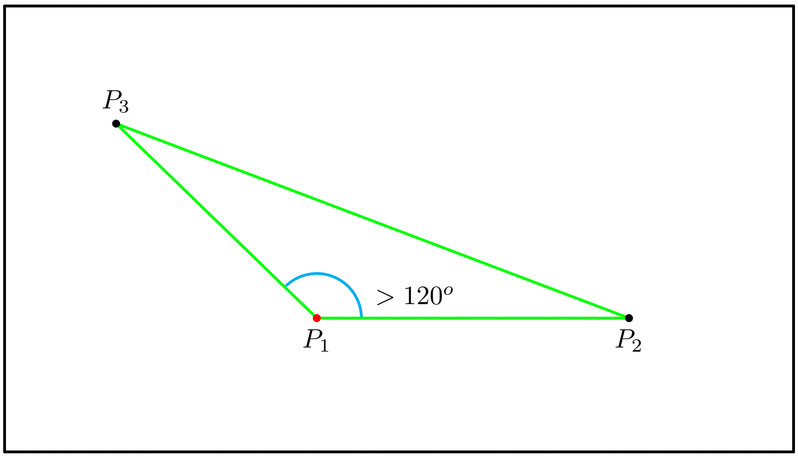

Abbildung 1: Sonderfall: Ein Winkel im Standortdreieck ist größer als 120^o.

an. Ebenso ändern Rotationen nichts an der Lösung; wenn man die Landkarte dreht, auf dem die Dörfer dargestellt sind, darf dies an der Lösung nichts ändern. Fast ebenso klar ist, daß eine Spiegelung der Aufgabe die Lösung nicht ändern kann. Löst man die gespiegelte Aufgabe und spiegelt wieder zurück, dann hat man offenbar die Ausgangsaufgabe gelöst. Man sagt, daß die Aufgabenstellung *bewegungsinvariant* sei. Natürlich muß ein Mathematiker beweisen, daß dies so ist, das gute Gefühl wird in der Mathematik nicht anerkannt. Euklid (365 v. Chr. (?) – 300 v. Chr. (?)) hat mit den Kongruenzsätzen das Werkzeug für einen solchen Beweis geliefert.

Ebenso klar scheint zu sein, daß die Aufgabe skaleninvariant ist. Der Maßstab der benutzten Karte hat ebenfalls keinen Einfluß auf die Lösung. Auch hier hat Euklid mit seinen Ähnlichkeitssätzen die notwendigen Begriffe und Beweise geschaffen.

Invarianzen der Aufgabenstellung können sehr nützlich sein bei der Analyse und der Lösung der Aufgabe.

1.5 Charakterisierung

Gesetzt der Fall, jemand würde den Finger auf die Landkarte legen und behaupten, der damit angezeigte Punkt sei optimal. Wir Mathematiker versuchen, sogenannte *notwendige* Bedingungen aufzustellen, das sind Eigenschaften, die eine optimale Lösung unbedingt haben muß. Kennt man eine solche Eigenschaft, dann wird ihr Fehlen ein Beweis dafür sein, daß die angegebene Lösung eben doch nicht optimal ist. Zudem kann eine genaue Analyse der notwendigen Bedingung eine Möglichkeit liefern, eine vorliegende, als nicht optimal erkannte Lösung nach Maßgabe der notwendigen Bedingung zu verbessern. Der Nachteil an solchen notwendigen Bedingungen ist, daß unter Umständen auch nicht optimale Punkte diese Bedingungen erfüllen können, daß also nur das *Nichterfülltsein* der Bedingungen eine definitive (negative) Aussage zuläßt.

Daneben gibt es auch noch *hinreichende* Bedingungen. Eine solche Bedingung kennzeichnet eine Eigenschaft, die (positiv) anzeigt, daß die optimale Lösung gefunden ist. Eine Bedingung, die sowohl notwendig als auch hinreichend ist, bezeichnet man als *Charakterisierung* der Lösung.

Eine solche Bedingung ist nicht immer zu finden, wenn man sie aber gefunden hat, so ist dies eine sehr befriedigende Situation für den Mathematiker.

1.6 Numerische Verfahren

Die Bestimmung einer Lösung der Standortaufgabe durch eine „Laubsägearbeit“ wie im eingangs angeführten Beispiel mag für manchen „Entscheidungsträger“, der der Mathematik eher unfreundlich gegenüber steht, als eine attraktive Alternative erscheinen [65, S. 86], jedoch muß man als Mathematiker sich darüber Gedanken machen, wie man letztendlich zu konkreten zahlenmäßigen Resultaten kommt. Wir werden sehen, daß dies mit einem gewöhnlichen Computer – eventuell sogar mit einem einfachen Taschenrechner – bequem und schnell zu erreichen ist.

Die Frage nach numerischen Verfahren ist relativ modern. Wir werden sehen, daß man etwa vor hundert Jahren an *geometrischen* Lösungen interessiert war, also an Lösungen „mit Zirkel und Lineal“. Erst seit der Mitte des zwanzigsten Jahrhunderts gibt es leistungsfähige Rechner, so daß man ernsthaft daran denken konnte, eine solche Aufgabe zahlenmäßig zu lösen.

1.7 Verallgemeinerungen

Wir hatten schon eingangs gesehen, daß Mathematik vielseitig verwendbar ist. Exakt der gleiche Ansatz, der das Standortproblem löst, ist auch zur Behandlung der entsprechenden mechanischen Gleichgewichtsaufgabe geeignet. Aus diesem Grunde wird ein Mathematiker, der irgendeine Aufgabenstellung erfolgreich gelöst hat, in einer Nachbereitungsphase darüber nachdenken, ob die verwendete Methodik verallgemeinerungsfähig ist. Als erste Idee könnte man hier überlegen, wie sich die Aufgabe und das Lösungsverfahren modifiziert, wenn man mehr als drei Dörfer betrachtet. Hier türmen sich schon Gewitterwolken am Horizont auf: Wir hatten gesehen, daß die Aufgabe plötzlich einen ganz anderen Charakter aufweisen kann, wenn man nur zwei Orte (und gleiche Gewichte w_i) hat. Man stellt unmittelbar fest, daß bei vier Orten drei völlig verschiedene Lösungstypen auftreten können. Bei gleichen Gewichten hat man bei vier Orten, die längs einer geraden Linie angeordnet sind, wieder Mehrdeutigkeit, optimale Lösungen sind dann wieder alle Punkte auf der Verbindungsstrecke der beiden mittleren Orte (Abbildung 2). Bilden hingegen die vier Standorte ein konvexes Viereck (Abbildung 3), dann ist die eindeutig bestimmte Optimallösung gerade der Schnittpunkt der beiden Diagonalen des Vierecks. Wenn übrigens das Viereck nichtkonvex ist, so ist die Lösung gerade der Punkt, der im Inneren des von den anderen gebildeten Dreiecks liegt.

Ganz andere Verhältnisse hat man, wenn man fünf, sechs, . . . Standorte betrachtet oder wenn man drei- oder sogar höherdimensionale Räume untersucht. Man weiß, daß für fünf und mehr gegebene Punkte die Aufgabenstellung im allgemeinen nicht mehr mit Zirkel und Lineal lösbar ist [8].

1.8 Modellierung

Wir haben eine Aufgabe der „praktischen Realität“ in ein mathematisches Modell übersetzt. Man sieht sofort, daß das Modell nicht unbedingt sehr viel mit der Realität zu tun haben muß. Beispielsweise könnte es sein, daß der wie auch immer bestimmte Optimalpunkt gerade auf ein Sumpfgelände, einen Badesee oder auf ein Grundstück fällt, welches nur zu einem unerschwinlich hohen Preis erworben werden kann. Wir hatten auch stillschweigend vorausgesetzt, daß die

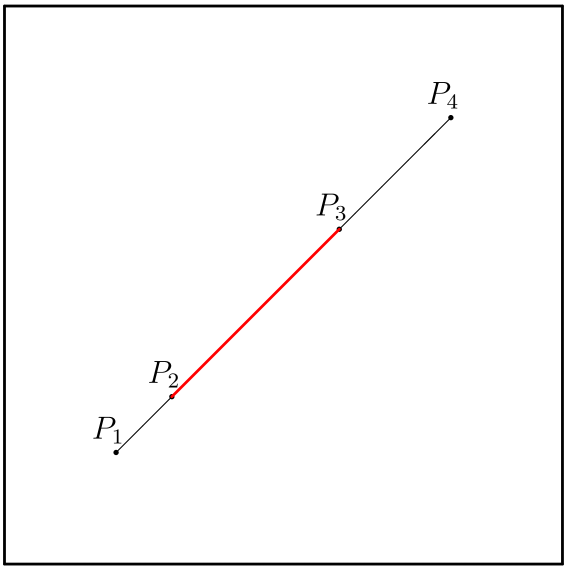

Abbildung 2: Vier kollineare Standorte.

Optimale Lösungen sind alle Punkte auf der Verbindungsstrecke von P_2 und P_3 (hervorgehoben).

Schüler sämtlich auf dem geraden Wege von ihren Dörfern zur Schule und zurück gehen. Auch diese Annahme ist durchaus nicht immer realistisch. Zudem kann man davon ausgehen, daß die Schülerzahlen sich von Jahr zu Jahr ändern werden. Wenn beispielsweise eines der Dörfer dabei ist, ein Neubaugebiet zu erschließen, dann hätte dies auch Auswirkungen auf die Schulsituation. Denkbar wäre es auch, daß eines der Dörfer sich entschließt, einen Schulbus einzusetzen, so daß dann die gesamte Planung auf falschen Voraussetzungen beruhen würde. Ein weiterer Punkt ist, daß häufig – auch trotz vorhandener optimaler Modellösungen – Entscheidungen „politisch" gefällt werden, was auch immer das heißen möge. Der Autor konnte dies bei einem Verkehrsplanungsprojekt sehr eindrucksvoll selbst erleben [56].

Derartige kritische Überlegungen werden grundsätzlich immer wieder angestellt, ich zitiere aus einer Arbeit über Standortbestimmung [65, S. 86 f.]:

> Es ist jedoch zu bezweifeln, daß die unter ... genannten Methoden für das hier vorliegende Problem ökonomisch relevante Aussagen liefern. Denn die Anwendung dieser Verfahren kann ergeben, daß der Ort minimaler Transportkosten in der „Mitte" eines Dreiecks, z. B. an einem geographischen Ort ohne Verkehrsanschluß liegt, also ökonomisch sinnlos ist, und dann doch wieder ein benachbarter „brauchbarer" Ort gefunden werden muß. Noch eine weitere Schwierigkeit läßt die Anwendung dieser Methoden hier als ungeeignet erscheinen:
> Oftmals ist es aus statistischen Gründen gar nicht möglich, aus einer Vielzahl benachbarter Städte quantifizierbare Verbrauchsanteile herauszuarbeiten.
>
> Daher wird in solchen Fällen der Absatzort nicht mit Hilfe mathematischer Methoden, sondern aufgrund der wirtschaftsgeographischen Bedingungen bestimmt.

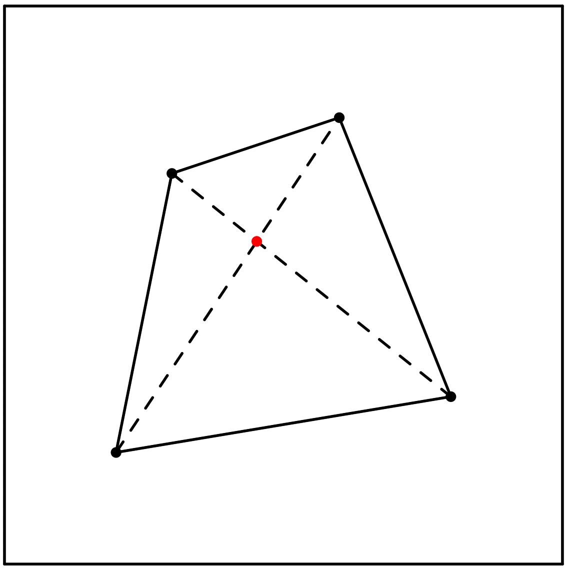

Abbildung 3: Konvexes Standortviereck.

> Der Optimalpunkt (rot markiert) ergibt sich als Schnittpunkt der beiden Diagonalen des konvexen Vierecks.

Was hier auch immer der letzte Absatz besagen soll, wenn – wie im vorletzten Absatz angedeutet – die für eine rationale Entscheidung notwendigen Daten nicht verfügbar sind, dann bleiben in der Tat wohl nur noch „wirtschaftsgeographische Bedingungen".

Solche Einwände gegen die Modellierung von Situationen der realen Welt hat es schon immer gegeben, auf der anderen Seite hat man sich chon seit langer Zeit sich mit Planung befaßt. Die Tatsache, daß bei Ausschreibungen der Kostenvoranschlag regelmäßig nicht eingehalten wird, spricht nicht gegen Planung. In der Bibel findet man unter LK 14,28–29:

> Denn wer ist unter euch, der einen Turm bauen will und setzt sich nicht zuvor hin und überschlägt die Kosten, ob er genug habe, um es auszuführen?
>
> damit nicht, wenn er den Grund gelegt hat und kann's nicht ausführen, alle, die es sehen, anfangen, über ihn zu spotten.

Trotz der – in aller Regel berechtigten – Einwände kann das mathematische Modell sehr nützlich sein. Einmal verhilft allein schon die Aufstellung des Modells häufig zu einer tieferen Einsicht der zugrundeliegenden realen Aufgabe – so könnte sich zum Beispiel herausstellen, daß die Datenlage für eine rationale Entscheidung ungenügend ist. Zum anderen ist die berechnete optimale Lösung eine Art „Goldstandard" für eine sachgemäße Entscheidung. Stellt sich zum Beispiel heraus, daß die schließlich gewählte – wie auch immer gewonnene – reale Lösung sich bezüglich des der auftretenden Gesamttransportkosten lediglich um 10 % von der idealen Lösung unterscheidet, dann wäre dies eine nützliche Information. Man könnte in dem Fall, daß der optimale Standort nur unter hohen Investitionskosten realisierbar ist, für jeden alternativen Standort die Investitionskosten gegen die alljährlich anfallenden zusätzlichen Transportkosten verrechnen. Da die Lösung einer Aufgabe der hier betrachteten Art vergleichsweise leicht und billig ist, und da einige der genannten Einwände in einem geeignet verfeinerten Modell durchaus berücksichtigt werden können, ist nicht leicht einzusehen, warum man nicht „zur Sicherheit“ eben doch schnell nachrechnet, was denn im Idealfall zu erreichen wäre. Wenn man den Rechenvorgang halbwegs geschickt organisiert, dann kann man aus den Resultaten sehr viel herauslesen, man könnte etwa Linien gleicher Gesamttransportkosten - sogannnte Isodapanen – in eine Landkarte einzeichnen [79] usw.

1.9 Mathematik und Realität

Wir hatten gesehen, daß sich die gleiche Mathematik auf zwei völlig unterschiedliche Aufgaben anwenden läßt. Damit haben wir unter Umständen Probleme bei der sogenannten „Wirkungsforschung“, eine der möglichen Aufgaben mag hochgradig ethisch sein und die andere verwerflich. Wir werden dies noch an einem konkreten Beispiel sehen (Abschnitt 4.2, inbesondere Seite 26). Kurz nach dem zweiten Weltkrieg schrieb Wolfgang Borchert seine kleine Geschichte vom *Mann mit dem weißen Kittel*:

> Der Mann mit dem weißen Kittel schrieb Zahlen auf das Papier. Er machte ganz kleine zarte Buchstaben dazu.
>
> Dann zog er den weißen Kittel aus und pflegte eine Stunde lang die Blumen auf der Fensterbank. Als er sah, daß eine Blume eingegangen war, wurde er sehr traurig und weinte.
>
> Und auf dem Papier standen die Zahlen. Danach konnte man mit einem halben Gramm in zwei Stunden tausend Menschen totmachen.
>
> Die Sonne schien auf die Blumen.
>
> Und auf das Papier.

Wir werden noch sehen, daß wir Mathematiker sehr schnell in die Situation des Mannes mit dem weißen Kittel kommen können. Angesichts der vielfältigen Verwendbarkeit der Mathematik kann das zu schwierigen Konflikten führen. Der bekannte Informatiker Joseph Weizenbaum, der am 5. März 2008 verstarb, vertritt diesbezüglich eine sehr extreme Position, die er in einem *Zeit*–Interview (am 18. 11. 1988) wie folgt darstellte

> Wissenschaftler und Studenten sollten sich vorstellen, was der Endnutzen ihrer Arbeit ist, nicht nur, an wen es verkauft wird. Wenn ich heute zum Beispiel im Bereich der Künstlichen Intelligenz arbeite, das heißt unter anderem dem Computer das Sehen besser beizubringen, muß mir klar sein, daß es in dieser Welt, in Amerika, letzten Endes zum Steuern von Waffen benutzt wird. Das bedeutet, daß sich in einer Cruise Missile, die optisch gesteuert wird, die sich also selbst navigiert, indem sie das Land sieht, meine Ergebnisse wiederfinden werden. Der Endzweck dieser Arbeit ist, eine Atombombe über einer Stadt abzuwerfen. Dann soll sich der Student oder der Wissenschaftler fragen: „Würde ich selbst diese Bombe steuern?“ Wenn die Antwort „Nein“ ist, sollte er auch an diesem System nicht weiterarbeiten.

Hieraus würde dann allerdings folgen, daß man die Beschäftigung mit Mathematik – oder doch wenigstens mit angewandter Mathematik – ganz einstellt. Die letztere Position gegenüber angewandter Mathematik vertrat übrigens vehement der berühmte „reine“ Mathematiker Godefrey Harold Hardy (1877 –1947) [35]:

> Ich habe nie etwas „Nützliches“ gemacht. Keine Entdeckung von mir hat je oder wird wahrscheinlich je, direkt oder indirekt, zum Guten oder Bösen einen Unterschied im Lauf der Welt machen.

1.10 Zur Entwicklung der Mathematik

Der Wissenschaftshistoriker Thomas Kuhn [44, 45] hat ein vielzitiertes Modell der Wissenschaftsentwicklung vorgeschlagen. Demnach entwickelt sich die Wissenschaft durch „Revolutionen“. Als Beispiel führt er die Phlogistontheorie der Chemie an. Diese wurde durch die Sauerstofftheorie der Verbrennung vollständig verdrängt und ist heute nur noch den Historikern vertraut. Meiner Ansicht nach entwickelt sich die Mathematik völlig anders. In der Mathematik wird keine wissenschaftliche Erkenntnis durch eine neue ersetzt, und Euklid ist heute noch so aktuell wie er es zu seiner Zeit war – von geringfügigen Gewichtsverlagerungen abgesehen. Zwar gibt es in der Mathematik wechselnde „Moden“, aber diese bedeuten nur, daß ein gewisses Teilgebiet der Mathematik stärker bearbeitet wird als andere.

Es ist übrigens interessant, einen Blick auf die Standorte des Buches von Thomas Kuhn an der Universität Hamburg zu werfen (Tabelle 1). Wenn man anmerkt, daß die deutsche Übersetzung bereits im Titel eine Ungenauigkeit enthält, denn *Scientific Revolutions* bedeutet genau genommen *Naturwissenschaftliche Revolutionen*, und genau in diesem Sinne handelt das Buch von Kuhn nur von Physik und Chemie. Es fällt auf, daß das Buch am häufigsten im Fachbereich Wirtschaftswissenschaften zu finden ist, jedoch *nicht* in den Fachbereichen Physik, Chemie, Biologie oder Mathematik!

Institution /	Anzahl der Exemplare	
Fachbereich	deutsch	englisch
Universitätsbibliothek (SUB)	2	1
Wirtschaftswissenschaften	7	1
Informatik	2	1
Philosophie	4	1
Rechtswissenschaft	3	–
Medizin	2	1
Anglistik, Amerikanistik	1	–
Sprachwissenschaft	1	–
Psychologie	1	–
Sozialwissenschaften	1	–
Volkskunde	1	–
Ethnologie	1	–
Erziehungswissenschaft	1	1

Tabelle 1: Standorte des Buches von Th. Kuhn, *Die Struktur wissenschaftlicher Revolutionen* an der Universität Hamburg.

Meiner Ansicht nach entwickelt sich Mathematik eher nach dem Modell einer „Flaschenpost“. Jeder wissenschaftlich arbeitende Mathematiker und jede Gruppe wirft von Zeit zu Zeit eine Nachricht in den unermeßlichen Ozean des mathematischen Wissens. Einige dieser Nachrichten gehen auf ewig verloren, andere tauchen an unerwarteten Stellen plötzlich auf und offenbaren Überraschendes. Ich möchte in diesem Vortrag den Weg einer solchen „Flaschenpost“ aufzeigen.

1.11 Das mathematische Modell

Wir haben eingangs die Aufgabenstellung noch nicht in der Form formuliert, die heute für eine „seriöse“ Aufgabe üblich ist, nämlich in Formeln, die insbesondere eine computergerechte Formulierung zulassen. Dies soll nun kurz nachgeholt werden.

Zunächst zum Abstandsbegriff: Für Punkte in der Ebene (und natürlich auch in höherdimensionalen Räumen) benutzt man seit Fermat (1601 – 1665) und Descartes (1596 – 1650) Koordinaten, wie wir dies schon eingangs angedeutet hatten. Ein Punkt P in der Ebene hat demnach bezüglich eines rechtwinkligen (cartesischen) Koordinatensystems die Koordinaten (x, y). Der *Abstand* zweier Punkte $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$ ist dann – nach dem bekannten Satz von Pythagoras – gegeben durch (vgl. Abbildung 4):

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

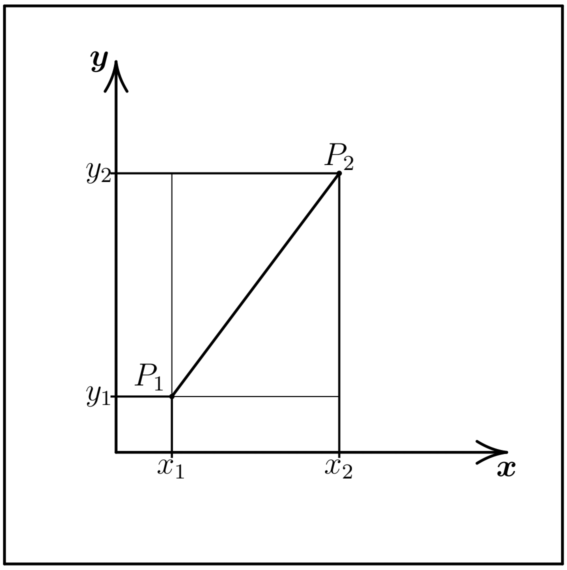

Abbildung 4: Euklidischer Abstand der Punkte P_1 und P_2 in der Ebene.

Hiermit formulieren wir die Aufgabenstellung:

> Gegeben seien die Punkte $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ und $P_3 = (x_3, y_3)$ in der Ebene sowie die positiven Gewichte w_1, w_2 und w_3. Gesucht ist ein Punkt $P = (x, y)$, so daß die Funktion
>
> $$\begin{aligned} \varphi(x,y) &= w_1 \cdot d(P,P_1) + w_2 \cdot d(P,P_2) + w_3 \cdot d(P,P_3) = \\ &= w_1 \cdot \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} + w_2 \cdot \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} + \\ &\qquad + w_3 \cdot \sqrt{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2} \end{aligned} \tag{1}$$
>
> minimal wird.

Wir haben in der Schule gelernt, wie man eine solche Aufgabe behandeln kann. Man bildet die Ableitungen nach den Veränderlichen x und y und setzt diese gleich Null. Damit hat man die

Bedingungsgleichungen

$$
\begin{aligned}
w_1 \cdot \frac{x - x_1}{d(P,P_1)} + w_2 \cdot \frac{x - x_2}{d(P,P_2)} + w_3 \cdot \frac{x - x_3}{d(P,P_3)} &= 0, \\
w_1 \cdot \frac{y - y_1}{d(P,P_1)} + w_2 \cdot \frac{y - y_2}{d(P,P_2)} + w_3 \cdot \frac{y - y_3}{d(P,P_3)} &= 0.
\end{aligned}
$$

Leider nützt uns diese Erkenntnis wenig. Die gesuchten Größen stehen nämlich nicht nur im Zähler, sie stecken auch in den Nennerausdrücken $d(P, P_i)$ auf eine recht komplizierte Weise innerhalb der Wurzeln. Man sieht nicht unmittelbar, wie die Lösung aussehen sollte, und wir werden sehen, daß sich auch die numerische Lösung auf dem Rechner schwierig gestalten kann.

2 Der Anfang: Fermat

2.1 Die Aufgabe von Fermat

Um 1640 schrieb der bedeutende Mathematiker Pierre de Fermat (1601 – 1665) eine Reihe von Manuskripten über die Ermittlung von Maxima und Minima (siehe [19, S. 134]). In diesen Manuskripten stellt Fermat eine Methode vor, die man als Vorläufer der Differentialrechnung ansehen kann. In einem der Manuskripte (vermutlich aus dem Jahre 1646) fordert Fermat die Gelehrten seiner Zeit heraus, indem er schreibt [19, S. 153]

> Si qui adhuc supersunt qui methodum hanc nostrum debitarum sorti pronuntiant,
>
> Hos cupiam similes tentando exudere sortes
>
> Qui hanc methodum non probaverit, ei proponitur:
>
> *Datis tribus punctis, quartum reperire, a quo si ducantur tres rectæ ad data puncta, summa trium harum rectarum sit minima quantitas*[1]*.*

Diese Herausforderung reiste im Gepäck von Marin Mersenne (1588 – 1648) nach Italien. Bereits 1646 gab Evangelista Torricelli (1608 bis 1647) drei elementare Lösungen an [64, S. 53]. Torricellis Schüler Vincenzo Viviani (1622 – 1703) sammelte und ordnete die Manuskripte Torricellis. Er publizierte eine eigene und Torricellis Lösung im Jahre 1659 [34]. In diesem Zusammenhang spielt ein Satz von Viviani ein wichtige Rolle, und die Anwendung des Satzes im Kontext der Fermatschen Aufgabe wird von Honsberger [36, S. 25–35: 3.2 Fermats Problem] dargestellt. Bereits im Jahre 1647 war ein Buch von Bonaventura Cavalieri (1598 (?) – 1647) erschienen [14], in dem die Fermatsche Aufgabenstellung diskutiert wurde. Cavalieri hat zu der Lösung der Aufgabe Eigenes beigesteuert.

Etwa ein Jahrhundert später, im Jahre 1750 behandelte Thomas Simpson (1710 – 1761) die Aufgabenstellung vermittels der Fluxionen von Newton (1643 – 1727) [66] als Übungsaufgabe. Er fragt dabei nach der minimalen *gewichteten* Summe der Abstände von drei Punkten.

Im März 1989 war ein Artikel von Bern und Graham über kürzeste Netzwerke in der Zeitschrift *Spektrum der Wissenschaft* erschienen [10]. In einem Leserbrief vom August des gleichen Jahres schrieb der Leser Dr. Fritz Diem zu diesem Artikel einigermaßen verwundert:

[1]Sollte es aber immer noch jemand geben, der behauptet, daß wir diese Methode dem Zufall verdanken, der möge selbst sein Glück mit ähnlichem Zufall versuchen. Wer diese Methode noch immer nicht gelten lassen will, dem sei die Aufgabe gestellt: Gegeben drei Punkte, gesucht ist ein vierter Punkt, so daß die Summe seiner Abstände von den drei gegebenen Punkten ein Minimum wird.

> Marshall W. Bern und Ronald L. Graham stellen einen Spezialfall vor (finde den Punkt P, der die Summe seiner Abstände zu drei vorgegebenen Punkten minimiert) und berichten, die italienischen Mathematiker Evangelista Torricelli (1608 bis 1647) und Francesco Cavalieri (1598 bis 1647) hätten diese Aufgabe unabhängig voneinander um 1640 gelöst. Diese Bemerkung hat bei mir einiges Kopfzerbrechen ausgelöst: Theoretisch läßt sich diese Extremwertaufgabe ja mit Hilfe der Differentialrechnung lösen. Nur war deren Erfinder Isaac Newton (1643 bis 1727) beim Tode der beiden Italiener erst vier Jahre alt.
>
> Dazu kommt: Versucht man dieses Problem heute allgemein — das heißt ohne vereinfachende Annahmen — zu lösen, so stößt man auf ein System sehr unangenehmer Wurzelgleichungen, von deren Lösbarkeit ich nicht überzeugt bin. Nur für eine etwas vereinfachte Aufgabenstellung ist auch die Lösung einfach.
>
> Daher meine Fragen: Wie haben die beiden Italiener damals das Problem gelöst, wenn nicht etwa doch experimentell? Und läßt sich das Problem heute exakt mit Hilfe der Differentialrechnung lösen?

P. Schreiber schreibt in seiner vorzüglichen Darstellung der Geschichte unserer Aufgabe [64, S. 53]:

> Die gleiche Aufgabe erhält ein von Fermat an A. Mersenne gerichteter, für Torricelli bestimmter Brief. Aus der Formulierung und dem Zusammenhang geht deutlich hervor, daß FERMAT an eine Lösung unter Anwendung der von ihm präparierten Methode dachte, Extremwerte durch implizites Nullsetzen der implizit berechneten Ableitung einer Funktion zu bestimmen. Die weitere Bearbeitung dieser Aufgabe sollte jedoch immer deutlicher zeigen, daß es sich geradezu um ein Paradebeispiel einer Aufgabe handelt, zu deren Lösung die Differentialrechnung selbst in ihrer heutigen voll entwickelten Form nur wenig leisten kann, während es andererseits mehrere wesentlich verschiedene elementargeometrische Lösungswege gibt. In der Tat gab Torricelli schon 1646 drei Varianten einer solchen elementaren Lösung an, ...

Wir gehen hier nicht näher auf die von Torricelli und auch von Cavalieri vorgeschlagenen Lösungswege ein. Sie sind „geometrisch“, das heißt, sie setzen ein Minimalwissen über Elementargeometrie voraus, das zu Fermats Zeiten ein jeder Interessierte besaß, welches man aber heutzutage nicht mehr ohne weiteres voraussetzen darf. Ein Beweis ist im Anhang gegeben. Man findet eine gute Darstellung des geometrischen Hintergrundes in der genannten Arbeit von Schreiber [64], aber auch in einem Artikel von Folke Ericsson [26] oder in dem Buch von Ross Honsberger [36, Section 3.2 Fermats Problem]. In jüngerer Zeit ist ein Artikel von Gueron und Tessler erschienen, in dem sich ebenfalls nützliche historische Hinweise finden lassen [34].

Es seien nur kurz einige wichtige Personen genannt. Zunächst einmal Evangelista Torricelli (1608 – 1647). Er lieferte eine vollständige geometrische Lösung, das heißt, eine Charakterisierung und eine konstruktive Methode zur Bestimmung der Lösung der Aufgabe von Fermat. Wenn einer der drei Winkel des von den drei Standorten gebildeten Dreiecks größer oder gleich 120^o wird, dann ist die Lösung gerade der Punkt, in dem sich dieser Winkel befindet. Torricelli zeigte nun weiter, daß für den „Normalfall“, also für den Fall, daß alle drei Winkel im Standortdreieck kleiner sind als 120^o, die Lösung konstruktiv – also etwa mit Zirkel und Lineal – gefunden werden kann. Man errichtet auf jeder Seite des gegebenen Dreiecks ein gleichseitiges Dreieck und bestimmt für jedes dieser drei gleichseitigen Dreiecke den kleinsten Kreis, der das Dreieck enthält, den sogenannten *Umkreis*. Die drei Umkreise schneiden sich in einem Punkt, und dieses ist der gesuchte Lösungspunkt (siehe Abbildung 5).

Der Punkt, in dem sich die drei Umkreise treffen, wird auch *Torricelli-Punkt* genannt. Bonaventura Cavalieri (1598 (?) – 1647) [14] zeigte, daß die Seiten des Standortdreiecks vom Lösungspunkt aus je unter einem Winkel von 120^o gesehen werden. Es tritt also auch hier der 120^o-Winkel auf, der schon in Abschnitt 1.3 eine Rolle gespielt hat. Thomas Simpson (1710 – 1761) [66] schließlich bewies, daß die drei Linien, die von je einem der gleichseitigen Dreiecke zu der gegenüberliegenden Ecke des Standortdreiecks verlaufen, sich in dem Torricelli-Punkt treffen. Man nennt diese drei Linien auch die *Simpson-Linien* (nach [41]).

3 Das neunzehnte Jahrhundert

3.1 Die Anfänge

Die Aufgabe von Fermat wurde bald von der Fachwelt „vergessen“, sie trieb als „Flaschenpost“ durch unbekannte Gewässer. Im neunzehnten Jahrhundert wurde sie wieder interessant, allerdings ohne daß auf die Vorläufer Bezug genommen wurde. Es begann im Jahre 1811 mit einer anonym gestellten Aufgabe im ersten Band der französischen Zeitschrift *Annales de mathématiques pures et appliquées*, die von Joseph Diaz Gergonne (1771 – 1859) gegründet worden war und die auch unter dem Namen *Annales de Gergonne* zitiert wurde. Es ist interessant, daß diese Aufgabe als „Textaufgabe“ gestellt wurde [4]:

> Un ingénieur veut établir une communication entre trois villes, non situées en ligne droite, au moyen d'une route composée de trois branches aboutissant d'une part aux trois villes, et se réunissant de l'autre en un même point entre ces trois villes. On demande comment il doit établir le point de concours des trois branches de route, pour que leur longueur totale soit la moindre possible (*)?

Es wird also hier eine „praktische“ Aufgabenstellung zugrundegelegt und – in der Fußnote – wird auf Verallgemeinerungen eingegangen, auf die gleiche Aufgabe, aber mit mehreren gegebenen Punkten und auf die Übertragung der Aufgabenstellung ins Dreidimensionale. Noch im Jahre 1811 erschienen drei Lösungen der Aufgabenstellung in der gleichen Zeitschrift, zwei davon gaben eine notwendige Bedingung für den Fall von mehr als drei Punkten an. Bis in die dreißiger Jahre des neunzehnten Jahrhunderts erschienen etwa ein Dutzend Artikel in den Gergonneschen Annalen, die zu diesem Thema Beiträge lieferten [76, 49, 33, 5, 75, 61, 72, 62, 6, 57].

Im Jahre 1835 löste eine Aufgabe von Jakob Steiner (1796 –1863) in der Zeitschrift *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, auch bekannt als *Crelles Journal* (August Leopold Crelle, 1780 – 1855) [68, S. 362, Aufgabe 4.] auch in Deutschland Interesse an der Fermatschen Aufgabe aus. Auch hier gab es eine Anzahl von Lösungsvorschlägen, etwa durch den Studenten Dippe aus Halle [21] sowie in zwei Arbeiten von Friedrich Otto Rudolf Sturm (1841 – 1919), welche den Fall von mehr als drei Punkten in der Ebene [73] sowie von vier Punkten im Raum behandelten [74]. Besonders interessant ist eine Arbeit von dem „Conrector *Fasbender* zu Iserlohn“ [28]. Er bewies, daß die Senkrechten zu den Simpson–Strecken durch die drei gegebenen Punkte gerade die Seiten des größten gleichseitigen Dreiecks sind, welches das gegebene Dreieck umschreibt und daß die Höhe dieses Dreiecks gleich der Minimalsumme der Abstände ist. Hier haben wir ein sehr bemerkenswertes Beispiel des *Dualitätsprinzips*, welches für die moderne Optimierung fundamental

(*)On peut généraliser ce problème, en demandant de déterminer, sur un plan, un point dont la somme des distances à un nombre de points quelconques situés sur ce plan soit un *minimum*. On peut même l'étendre à des points situés d'une maniére quelconque dans l'espace.

ist [41]. Um die Lösung der Fermatschen Aufgabe zu erhalten, wird zunächst eine ganz andere Aufgabe – eine sogenannte *duale Aufgabe* – formuliert, nämlich das größte gleichseitige Dreieck zu finden, welches das gegebene Dreieck umschreibt. Es stellt sich dann heraus, daß aus der Lösung der dualen Aufgabe eine Lösung der Ausgangsaufgabe gefunden werden kann. Weiterhin ist die Höhe des umschreibenden Dreiecks immer kleiner als die Minimalsumme der Abstände, das heißt, wir können den Wert der gesuchten Minimalsumme zwischen zwei Schranken einschließen. Schließlich folgert man aus dem Zusammenfallen der Höhe des umschreibenden gleichseitigen Dreiecks mit der Summe der Entfernungen von einem Punkt zu den Ecken des Ausgangsdreiecks, daß die Lösung beider Aufgaben gefunden ist. Eine moderne – also nicht geometrische – Darstellung der Fasbender-Dualität findet man bei Kuhn [41].

3.2 Ein Zwischenspiel: Carl Friedrich Gauß

Besonderes Interesse verdient ein Beitrag von Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855). Gauß stand mit dem Altonaer Astronomen Heinrich Christian Schumacher (1780 –1850) in regem Briefwechsel. Am 19. März 1836 fragte Schumacher bei Gauß an wegen eines scheinbaren Paradoxons [32, X1, S. 459]. Wenn man die Fermatsche Aufgabe für vier Punkte formuliert, die ein konvexes Viereck bilden, dann ist der Lösungspunkt gerade der Schnittpunkt der beiden Diagonalen. Schumacher argumentierte nun so: Wenn man die oberen beiden Punkte A und B in Abbildung 6 längs der gestrichelten Linien nach oben verschiebt, dann wandert der Schnittpunkt der beiden Diagonalen ebenfalls nach oben. Im Extremfall, wenn man die beiden Punkte in den Punkt F verschiebt, dann befindet sich der Schnittpunkt der beiden Diagonalen ebenfalls im Punkte F, aber der Torricelli-Punkt liegt im vorliegenden Falle (die Winkel bei C, D und F sollen kleiner sein als 120^o) im Inneren des Dreiecks CDF.

In einem Brief vom 21. März löst Gauß zunächst das „Paradoxon" auf. Er schreibt für den Fall, daß zwei der drei Eckpunkte des Vierecks zusammenfallen

> ... so erfordert Geist und Buchstabe der *mathematischen* Aufgabe, als solcher, dass Sie dann *zweimahl* zählen, ... wo sich die allgemeine Auflösung noch immer als richtig ausweiset.

Mit anderen Worten, in dem von Schumacher zitierten Falle muß man beim Zusammenfallen von A und B mit F der Verbindungsstrecke des Torricelli-Punktes mit dem Punkte F das doppelte Gewicht zuweisen.

Gauß führt dann noch weiter aus, und dies ist das eigentlich Interesante:

> Ist bei einem 4 Eck nicht von der stricten mathematischen Aufgabe, wie sie oben ausgesprochen wird, sondern von dem kürzesten Verbindungssystem die Rede, so werden mehrere einzelne Fälle von einander unterschieden werden müssen, und es bildet sich so eine recht interessante mathematische Aufgabe, die mir nicht fremd ist, vielmehr habe ich bei Gelegenheit einer Eisenbahnverbindung zwischen Harburg, Bremen, Hannover, Braunschweig sie in Erwägung genommen und bin selbst auf den Gedanken gekommen, dass sie eine ganz schickliche Preisfrage für unsere Studenten bei Gelegenheit abgeben könnte.

Gauß weist dann darauf hin, daß man bei vier Punkten verschiedene Konfigurationen des kürzesten verbindenden Netzwerks berücksichtigen müsse. In Abbildung 7 wird ein Rechteck der Länge 4 und der Höhe 3 (in willkürlichen Einheiten) untersucht. Man könnte alle diese Punkte auf triviale Weise durch ein Netzwerk verbinden, indem man etwa den linken unteren Punkt mit dem linken oberen, diesen mit dem rechten oberen und schließlich den rechten oberen mit dem rechten unteren verbindet. Dies wäre ein Netzwerk ohne Zusatzpunkt und hätte die Gesamtlänge $3+4+3=10$. Löst man diese Aufgabe im Sinne von Fermat, fügt also einen zusätzlichen Punkt ein, dann ist die Gesamtlänge der Verbindungsstrecken gerade das Doppelte der Diagonallänge, also ebenfalls 10.

Wie man in Abbildung 7 erkennt, hat die linke Konfiguration die minimale Länge der Verbindungswege. Das Besondere an dieser Aufgabe ist, daß hier zwei Aufgaben zu lösen sind, eine Aufgabe der Kombinatorik, das heißt, es ist festzulegen, wieviele zusätzliche Punkte einzuführen sind und wie diese mit den gegebenen Punkten zu verbinden sind. Hat man sich hierauf festgelegt, dann erhält man eine Aufgabe vom Fermatschen Typ. Daß hier in den letzten beiden Beispielen zwei zusätzliche Punkte gesucht werden, und nicht nur einer, spielt keine entscheidende Rolle. Es erübrigt sich zu sagen, daß in den zusätzlich eingeführten Punkten auch wieder die 120^o-Bedingung eine Rolle spielt, die wir von den Abschnitten 1.3 und 2.1 kennen. Man hat sich daran gewöhnt, diese Aufgabe als *Steinersches Problem* zu bezeichnen, was den historischen Tatsachen nicht gerecht wird, die Bezeichnung *Gauß-Problem* wäre korrekter. Das Steiner-Problem hat eine erhebliche Bedeutung in Theorie und Praxis, da es einmal zu den „schweren“ Problemen gehört – dies liegt an dem kombinatorischen Anteil der Aufgabe – und da es eine große Anzahl von wichtigen Anwendungen gibt – neben Anwendungen in der Logistik auch bei der Leiterplattenoptimierung [10].

Was die Eisenbahnverbindung zwischen Harburg, Bremen, Hannover und Braunschweig anbelangt, so weist Gauß in seinem Brief lakonisch daruaf hin, daß bei dieser Aufgabe ein ausgearteter Lösungstyp vorliegt. Das kürzestmögliche Verbindungsnetzwerk dieser drei Städte ergibt sich aus der Lösung der Fermat-Aufgabe für Harburg, Bremen und Hannover mit einer zuätzlichen Direktverbindung von Hannover nach Braunschweig (Abbildung 8). Die beiden Lösungstypen der Abbildung 7 treten hier nicht auf. Man kann die von Gauß angegebene Lösung so interpretieren, daß der Typ der im linken Teilbild der Abbildung 7 dargesetllten Lösung vorliegt, wobei der untere zusätzliche Punkt mit der Position von Hannover zusammenfällt. Wenn man versucht, den Typ des rechten Teilbilds zu realisieren, dann fallen die beiden zusätzlichen Punkte im Torricelli-Punkt zusammen.

In einem Kurzartikel führte Christoph Pöppe als Beispiel ein optimales Verbindungsnetz zwischen Leipzig, Gera, Chemnitz und Zwickau an [60]. Hier ist es so, daß die kürzeste Verbindung durch den *minimalen spannenden Baum*, das heißt, ohne zusätzliche Knotenpunkte durch den Weg Leipzig – Gera – Zwickau – Chemnitz mit einer Länge von 119.17 km gegeben wird. Die Städteverbindung über den Torricelli-Punkt benötigt 126.00 km, führt man zwei Steiner-Punkte ein, dann wird die Gesamtstrecke zwar etwas kürzer, nämlich 124.60 km, ist aber immer noch länger als diejenige durch den minimalen spannenden Baum.

Diese Beispiele verdeutlichen die große Anzahl der möglichen Phänomene die bei der allgemeineren Aufgabe von Steiner schon im Falle von vier Städten auftreten können.

Generell könnte man versuchen, die Aufgabe durch eine „Analogrechenmaschine“ zu lösen. Dazu klebt man zwei Plexiglasplatten vermittels senkrecht zu den beiden Platten angebrachter Stifte aneinander und taucht diese Anordnung in eine Seifenlösung. Die Seifenhaut stellt sich so ein, daß die Gesamtlänge der Verbindungsstrechen minimiert wird – allerdings nur *lokal*. Wir könnten also in Abbildung 7 beide Lösungen durch das Seifenmodell erhalten. In einem Übersichtsartikel haben Marshall W. Bern und Ronald L. Graham als Beispiel die optimale Verbindung von 29 Städten der USA vermittels eines Seifenexperiments und mit einem exakten Algorithmus berechnet [10].

Der „Seifencomputer“ liefert „ganz gute“ Lösungen, aber nicht immer die beste Lösung.

Die zahlreichen Varianten, die die Steinersche Aufgabe bietet, machen sie in der Unterhaltungsmathematik sehr beliebt (siehe etwa den bereits zitierten Artikel von Bern und Graham [10], den Artikel von Gardner [31] oder das Buch *100 Aufgaben* von Hugo Steinhaus [69, 71]). In diesem Buch erscheint die Aufgabe als die Aufgaben 72 und 73.

Es gibt eine große Anzahl von Anwendungen der allgemeinen Steinerschen Aufgabe, etwa das Design integrierter Schaltkreise, die Bestimmung des Evolutionsstammbaums einer Gruppe von Organismen [9] oder die Minimierung des Materialverbrauchs für Telephon-, Pipeleine- oder Straßennetze [10].

Wir wollen uns hier wieder der bescheideneren Aufgabe von Fermat zuwenden.

3.3 Anwendung in den Wirtschaftswissenschaften

Im neunzehnten Jahrhundert begann auch noch eine andere Entwicklung. Die Volkswirtschaftslehre war Anfang des neunzehnten Jahrhunderts eine qualitative Wissenschaft, und es begann der Einzug quantitativer Methoden, also der Mathematik. Johann Heinrich von Thünen (1783 – 1850) hatte anhand der Modellvorstellung des „isolierten Staates“ [77] ein Modell der Preisbildung landwirtschaftlicher Güter entwickelt, welches auf Ringe einheitlicher Bodennutzung um ein Zentrum führt, die sogenannten *Thünenschen Ringe*. Besonders bemerkenswert ist Wilhelm Launhardt (1832 – 1918). Er war von 1869 bis zu seinem Tode Professor für Straßen- Eisenbahn- und Brückenbau an der Polytechnischen Schule zu Hannover und publizierte im Jahre 1885 ein Buch über *mathematische Begründung der Volkswirtschaftslehre* [47], welches – wie der Herausgeber der Neuauflage von 1963, Erich Schneider aus Kiel bemerkt – zu seinem Lebzeiten nicht verstanden wurde und daher ohne Einfluß blieb.

Es ist recht eindrucksvoll, zum Vergleich ein anderes Werk über Volkswirtschaftslehre zu betrachten, welches achtzehn Jahre vor Launhardtds Buch erschienen war, nämlich der erste Band des *Kapitals* von Karl Marx. Marx wird von Freunden und Gegnern als „Mathematiker“ apostrophiert, so bezeichnet ihn Friedrich Engels im Vorwort zur zweiten Auflage von 1885 des *Anti-Dühring* als einen „gründlichen Mathematiker“ [24, S. 10]. Eugen von Böhm-Bawerk charakterisiert 1896 das Buch von Marx als „ein . . . Ballast von schwieriger Dialektik und von ermüdenden, mit mathematischen Rüstzeug arbeitenden Deduktionen‘ [29, S. 7]. Von Gustav Schmoller wird Marx im seinem Buch von 1900 durchaus im abwertenden Sinne als „mathematisch spekulativer Kopf“ bezeichnet (nach [29, S. 10]).

Sieht man sich dagegen Marx’ *Kapital* einmal gründlich an, so wird man Mathematik vermissen, wenn man von den zahlreichen Zahlenbeispielen einmal absieht, die wenig mit Mathematik zu tun habem. Einzig im ersten Band des *Kapitals*, im fünften Abschnitt findet man als sechzehntes Kapitel *Verschiedne Formeln für die Rate des Mehrwerts* [51, S. 553 – 556]. In dieser „Formelsammlung“ versteigt sich Marx allenfalls bis zum Dreisatz, und dieses Niveau war schon zur Zeit der alten Ägypter erreicht worden. Auch in den von ihm nicht veröffentlichten *Mathematischen Manuskripten* [52] in denen Marx versucht, eine „dialektische“ Begründung der Analysis zu legen, offenbart sich eine generelle Unkenntnis des Autors der Mathematik seiner Zeit.

Vor diesem Hintergrund ist es evident, daß Launhardts Buch keinen Einfluß auf seine Zeitgenossen haben konnte. Es ist sogar fraglich, ob es heute von vielen Volkswirtschaftlern gelesen wird.

Im Jahre 1882 publizierte Launhardt eine Arbeit über optimale Standortwahl [46], in dem er von folgender Situation ausging:

> Bei Braunschweig werde ein Eisenerz gewonnen, dessen Verhüttung unter Benutzung der von Dortmund zu beziehenden Kohlen geschehen soll. Hierbei wird angenommen, daß das produzierte Roheisen an einen noch nicht festgelegten Ort zu liefern sei. Zu den drei gegebenen Orten möchte man nun den Standort des Hochofens bestimmen. Dabei sollen aus je 100 Einheiten Erz und 80 Einheiten Kohlen 32 Einheiten Roheisen entstehen. Die Transportkosten seien den transportierten Massen und den zu transportierenden Entferungen proportional. Wo sollte dann der Hochofen stehen, damit beim Betrieb die Gesamtkosten minimal werden?

Diese Publikation ist besonders interessant. Sie ist die erste Arbeit, in der eine konkrete Standortaufgabe untersucht wird. Besonders lesenswert ist die mathematische Herleitung der Resultate, die zeigt, daß Launhardt ein sehr origineller Mathematiker war.

Anfang des zwanzigsten Jahrhunderts, im Jahre 1909, erschien ein Buch des Nationalökonomen Alfred Weber (1868 – 1958) [79]. Alfred Weber war von 1904 bis 1907 Professor in Prag gewesen, einer seiner Doktoranden hieß Franz Kafka. In Prag hatte Weber mit dem bedeutenden Mathematiker Georg Alexander Pick (1859 – 1942) zusammengearbeitet. Pick war ein überaus vielseitiger Mathematiker. Als Albert Einstein 1911 nach Prag kam, schloß er sich unter seinen Kollegen nur Georg Pick an, mit dem er musizierte und lange gemeinsame Spaziergänge unternahm [2, S. 53]. Pick war eine bedeutende Autorität auf dem Gebiete der Differentialgeometrie, und genau dieses Gebiet war es, welches Einstein zur Vollendung der Allgemeinen Relativitätstheorie benötigte. Es ist bemerkenswert, daß sich Pick und Einstein allem Anschein nicht über dieses Thema ausgetauscht haben. Man muß auch zur Kenntnis nehmen, daß Einstein sehr eigenwillig sein konnte, und insbesondere der Mathematik gelegentlich mit erheblichen Vorbehalten gegenübertrat. Erst als Einstein wieder in Zürich war, hat er mit der Hilfe seines ehemaligen Studienfreundes Marcel Grossmann sich mit der Differentialgeometrie befaßt [2, S. 79].

Georg Pick steuerte zu Webers Buch [79] einen mathematischen Anhang bei. Das Buch selbst hat mit Mathematik nur wenig zu tun, und Picks Beitrag ist durchaus „konventionell“, das heißt, er enthält nichts Neues, jedoch eine ansprechende und zweckmäßige Darstellung des zu seiner Zeit Bekannten. Zur Veranschaulichung der Variation der erforderlichen Transportkosten mit der Änderung des Torricelli-Punktes führt er die Isodapanen, also Linien gleicher Gesamttransportkosten, ein. Pick erwähnt auch eine Vorrichtung von Pierre de Varignon (1654 – 1722). Varignon hatte diese Vorrichtung dazu benutzt, um das Parallelogramm der Kräfte zu illustrieren. Der Apparat besteht aus einem Kreisring mit Teilung, auf dem man drei Rollen präzise einstellen kann. Über die Rollen führen Fäden, an denen Gewichte befestigt sind. Die Enden der drei Fäden sind in einem Knoten zusammengeführt wie in dem eingangs erwähnten „Schulbeispiel“ von Hugo Steinhaus. Genau im Zentrum des Kreisrings befindet sich ein spitzer Dorn. Bei gegebenen Positionen zweier der Rollen und der dazu gehörenden Gewichte muß die dritte Rolle und das dritte Gewicht so gewählt werden, daß der Knoten sich genau über dem Dorn befindet. In dieser Position herrscht Kräftegleichgewicht. Dieser Apparat führt im Falle von drei gegebenen Punkten **nicht** auf das „Schulbeispiel“, denn innerhalb des Kreisrings ist eben nur die zentrale Markierung durch den Dorn angebracht, es fehlen Möglichkeiten, die Position des Knotens zu bestimmen. Der Apparat ist so angelegt, daß eine bestimmte Position – nämlich die zentrale – mit Hilfe des Dorns *eingestellt* wird. Der Varignonsche Apparat spielt in der Folge eine mehr oder weniger unheilvolle Rolle in der wirtschaftswissenschaftlichen Literatur. Pick weist immer wieder auf die Notwendigkeit hin, Fälle mit mehr als drei gegebenen Punkten zu untersuchen [79, S. 225, 234 f.]. Offenbar war ihm jedoch nicht bekannt, daß der Fall mit vier Punkten bereits 1779 von Graf Giulio Carlo de' Toschi di Fagnano (1682 – 1766) [12, S. 485] gelöst worden war [27]. Noch für Gauß und Schumacher war dieser Fall vollkommen „klar“ und keiner weiteren Erörterung wert. Pick schreibt (S. 235): „... lassen sich doch schon im nächst höheren Falle des

Vierecks nicht mehr so einfache Konstruktionsregeln angeben wie beim Dreieck. Um so mehr ist erwähnenswert, daß wenigstens das mechanische Modell auch noch in allen höheren Fällen (entsprechend abgeändert) funktioniert.“

Das Leben von Georg Pick endete tragisch: Nachdem er die Universität Prag im Jahre 1929 aus Altersgründen verlassen hatte, siedelte er nach Wien über. Im Alter von 80 Jahren wurde er in das Ghetto Theresienstadt deportiert, wo er drei Jahre später im Jahre 1942 starb. Einen Lebenslauf von Georg Pick findet man in der Artikelserie *Kollegen in einer dunklen Zeit* von Maximilian Pinl [58].

Zurück zu dem Buch von Weber. Es wird heutzutage als der Beginn der mathematischen Wirtschaftstheorie angesehen – sofern man das Buch von Launhardt ignorieren will. Das manchmal recht naseweise Internet will wissen „Dort entwickelte er eine Theorie des industriellen Standorts, die überholt ist“ [80]. Als eine Quelle wird in dem zitierten Wikipedia-Artikel ein Weblink auf eine etwas ungelenke Hausarbeit der Universität Münster genannt. Man findet dort die Aussage: „Die genaue Bestimmung des optimalen Produktionsstandortes in bezug auf die Transportkosten kann entweder mathematisch durch ein Kräfteparallelogramm oder mechanisch durch den ... Vargnon'schen Apparat erfolgen.“ Diese Schreibung des Varignonschen Apparats wird in der Arbeit durchweg benutzt. Der Autor geht offenbar davon aus, daß nur der Fall von drei gegebenen Punkten interessant sei, ansonsten hilft ein „Kräfteparallelogramm“ wenig.

Das Buch von Weber beginnt mit kräftigen Worten [79, S. III]:

> Dieser erste Teil ist propädeutisch. Er bringt Theorie; nicht bloß dies, er enthält sogar »reine« Theorie, d. h. von jeder näheren Wirklichkeit absehende; und er traktiert sie zudem mathematisch, – doppeltes Verbrechen, das ich schwer empfinde. Denn wenn auch theoretisches Arbeiten heute wieder in Deutschland in Aufnahme kommt, so doch im ganzen nicht grade so abstraktes, wie es hier getrieben wird. Die eigentlich strenge Abstraktion ist – bei den Reichsdeutschen wenigstens – doch auch heute noch »tabu«. Wenn aber schon einmal Theorie getrieben werden soll, (man möchte die Vorliebe dafür angesichts gewisser mißglückter Erscheinungen ja allerdings manchmal zum Teufel wünschen) so ist als *eine* ihrer Formen auch diejenige nötig, die die Abstraktion auf die Spitze treibt. Sie ist sogar – leider, kann man sagen – fast überall der notwendige Ausgangspunkt für eine leidlich fundierte endliche gedankliche Umspannung der ganzen Mannigfaltigkeit des Lebens.

Im Gegensatz zu dieser vollmundigen Ankündigung macht Weber dann von der Mathematik nur äußerst sparsam Gebrauch. Insbesondere gibt Weber keine konkreten durchgerechneten Beispiele an, seine Bilder sind recht hübsch, aber eher illustrierend als von echter Bedeutung. Besonders bemerkenswert erscheint mir eine Bemerkung von Weber im Vorwort der zweiten Auflage von 1922:

> ... mir war bei Abfassung der 1. Auflage die Arbeit von Launhardt über »die Bestimmung des zweckmäßigsten Standortes einer gewerblichen Anlage« (Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1882) durch ein bei mir liegendes Versehen unbekannt geblieben. Sie behandelt ein Teilproblem der Transportorientierung (die optimale Transport-Standortslage eines isoliert gedachten Produktionsprozesses mit ausschließlich lokalisierten Materialien) *auch* unter Verwendung des Gedankens, daß man sich Materiallagerkomponenten und Konsumortskomponente wie Kräfte zu denken habe, die sich am Standort das Gleichgewicht halten müssen. Dieser Gedanke wird in mathematisch-geometrische Konstruktionen hineinverfolgt, deren technische

> Zweckmäßigkeit für gewisse Fälle nicht bestritten werden soll, die mir aber für den Aufbau einer allgemeinen Theorie des gewerblichen Standorts doch keine Basis von genügender Breite zu bieten scheinen. Ich habe deswegen von einer Einfügung dieser mathematischen Konstruktionen in den Text und einer Auseinandersetzung mit ihnen abgesehen. Sie würde tatsächlich mehr in das Gebiet des Mathematikers als das des Nationalökonomen fallen.

Also: Mathematik schon, aber nicht wirklich! Um eine Kostprobe der Weberschen Überlegungen zu bieten, sei folgende Stelle aus dem Buche zitiert [79, S. 109 f.]:

> Zur Veranschaulichung von dessen[2] Bedeutung einige Beispiele: die Korsettfabrikation hat einen Arbeitskoeffizienten von ca. 1 500 Mk., die Steingutwarenindustrie von etwa 55 Mk., die Rohzuckerherstellung (aus Rüben) von 1.30 Mk. 10 % Arbeitskostenersparnisse an irgend einem Platz bedeuten nach diesen verschiedenen ≫Koeffizienten≪ 150 Mk., 5.50 Mk. und 0.13 Mk. Ersparnisse pro Standortstonne. Das heißt: bei einem angenommenen Tonnenkilometersatz von 5 Pfg. stellen sie eine Deviationsmöglichkeit von 3000 Km. für die Korsettherstellung, 110 Km. für die Steingutarbeit und 2.6 Km. für die Rohzuckerproduktion her. Die ganze himmelweit verschiedene Orientierungsweise der drei Industrien liegt exakt in diesen Zahlen.

Diese Betrachtungsweise ist überzeugend und auf diese Weise läßt sich das Verhalten mancher modernen Firma bei der Standortwahl verstehen.

4 Die Entwicklung vor und nach dem Zweiten Weltkrieg

4.1 Die Methode von Weiszfeld

Im Jahre 1937 erschien in der japanischen Zeitschrift *Tôhoku Mathematical Journal* ein Artikel des Ungarn Endre Weiszfeld (Vazsonyi). In diesem Artikel wurde die Fermatsche Aufgabe für n gegebene Punkte untersucht. Weiszfeld dachte nicht einmal im Traum an irgendeine Anwendung, er bezog sich auf einen Artikel von Rudolf Sturm aus dem Jahre 1884 [73] und untersuchte die Aufgabenstellung als eine „rein“ mathematische Aufgabe. Er gibt in seiner Arbeit drei verschiedene Beweise für die Existenz einer Lösung der allgemeinen Aufgabe an. Von diesen drei Beweisen ist der erste der für uns interessanteste. Die Idee des Beweises ist recht einfach. Wir gehen dazu von den Bedingungsgleichungen (2) für die Lösung der Fermatschen Aufgabe aus:

$$\begin{aligned} w_1 \cdot \frac{x - x_1}{d(P, P_1)} + w_2 \cdot \frac{x - x_2}{d(P, P_2)} + w_3 \cdot \frac{x - x_3}{d(P, P_3)} &= 0, \\ w_1 \cdot \frac{y - y_1}{d(P, P_1)} + w_2 \cdot \frac{y - y_2}{d(P, P_2)} + w_3 \cdot \frac{y - y_3}{d(P, P_3)} &= 0. \end{aligned}$$

[2] Des Arbeitskoeffizienten = auf das Standortsgewicht der Industrie bezogene Arbeitskostenmasse; S. 61: Das Gesamtgewicht, das in einer Standortsfigur zur Produkteinheit bewegt werden muß, wollen wir in der Folge als ≫*Standortsgewicht*≪ der betreffenden Industrie bezeichnen – U. E.

Wir nehmen an, es sei eine Näherungslösung $P^{(0)}$ bekannt. Wir setzen dann im Nenner anstelle $d(P, P_i)$ den Näherungsausdruck $d(P^{(0)}, P_i)$ für $i = 1, 2, 3$. Das so modifizierte Gleichungssystem

$$\begin{aligned} w_1 \cdot \frac{x - x_1}{d(P^{(0)}, P_1)} + w_2 \cdot \frac{x - x_2}{d(P^{(0)}, P_2)} + w_3 \cdot \frac{x - x_3}{d(P^{(0)}, P_3)} &= 0, \\ w_1 \cdot \frac{y - y_1}{d(P^{(0)}, P_1)} + w_2 \cdot \frac{y - y_2}{d(P^{(0)}, P_2)} + w_3 \cdot \frac{y - y_3}{d(P^{(0)}, P_3)} &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

läßt sich sehr leicht lösen. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= \frac{\dfrac{w_1 x_1}{d(P^{(0)}, P_1)} + \dfrac{w_2 x_2}{d(P^{(0)}, P_2)} + \dfrac{w_3 x_3}{d(P^{(0)}, P_3)}}{\dfrac{w_1}{d(P^{(0)}, P_1)} + \dfrac{w_2}{d(P^{(0)}, P_2)} + \dfrac{w_3}{d(P^{(0)}, P_3)}}, \\ y^{(1)} &= \frac{\dfrac{w_1 y_1}{d(P^{(0)}, P_1)} + \dfrac{w_2 y_2}{d(P^{(0)}, P_2)} + \dfrac{w_3 y_3}{d(P^{(0)}, P_3)}}{\dfrac{w_1}{d(P^{(0)}, P_1)} + \dfrac{w_2}{d(P^{(0)}, P_2)} + \dfrac{w_3}{d(P^{(0)}, P_3)}}. \end{aligned}$$

Der auf diese Weise gewonnenen Punkt $P^{(1)} = \left(x^{(1)}, y^{(1)}\right)$ hat die Eigenschaften:

1. Die Berechnung von $x^{(1)}$ und $y^{(1)}$ ist denkbar einfach. Auf der rechten Seite stehen ausschließlich Größen, die bei der Berechnung bekannt sind: Die Koordinaten der Punkte P_i, die Gewichte w_i und die Koordinaten des Punktes $P^{(0)}$

2. Ganz analog zur Berechnung von $P^{(1)}$ aus $P^{(0)}$ berechnet man $P^{(2)}$ aus $P^{(1)}$, $P^{(3)}$ aus $P^{(2)}$ und so weiter.

3. Es ist stets

$$\begin{aligned} & w_1 d\left(P^{(1)}, P_1\right) + w_2 d\left(P^{(1)}, P_2\right) + w_3 d\left(P^{(1)}, P_3\right) \leq \\ \leq \quad & w_1 d\left(P^{(0)}, P_1\right) + w_2 d\left(P^{(0)}, P_2\right) + w_3 d\left(P^{(0)}, P_3\right), \end{aligned}$$

   das heißt, die neu erhaltene Näherung $P^{(1)}$ ist – was die gesamte Weglänge anbelangt – besser (genauer: nicht schlechter) als die Ausgangsnäherung $P^{(0)}$.

4. Bezeichnet man mit P^* die Lösung der Fermatschen Aufgabe (1), dann wird der Abstand der r-ten Interierten $P^{(r)}$ von P^* mit wachsendem r beliebig klein. Man drückt dies in der Mathematik wie folgt aus:

$$\lim_{r \to \infty} P^{(r)} = P^*.$$

5. Die *Konvergenz* $P^{(r)} \longrightarrow P^*$ liefert eine Methode, um die Lösung „praktisch“ mit beliebiger Genauigkeit zu bestimmen. Es darf allerdings nicht verschwiegen werden, daß die Konvergenzgeschwindigkeit nicht besonders groß ist. H. Voß konnte zeigen, daß die Konvergenz *linear* ist [78], und die Erfahrung belegt diese Tatsache. Lineare Konvergenz hat eine Anzahl von Nachteilen, so daß sie in der numerischen Mathematik als nicht gerade wünschenswert gilt.

6. Es sind hierbei natürlich noch Sonderfälle zu untersuchen, etwa den Fall, daß die Lösung P^* oder – noch schlimmer – daß eine der Iterierten $P^{(r)}$ mit einem der gegebenen Punkte P_i zusammenfällt. In einem solchen Falle sind die Weiszfeldschen Gleichungen (2) singulär, liefern also zunächst keine sinnvolle Aussage. Weiszfeld hat diese Sonderfälle eingehend diskutiert und Abhilfen dafür angegeben.

7. Es bereitet überhaupt keine Schwierigkeiten, die Methode von Weiszfeld zu verallgemeinern. Man kann mehr als drei Punkte berücksichtigen, man kann Situationen behandeln, in denen mehr als ein Punkt gesucht wird etc. Der „Trick“ ist immer der gleiche: Man ersetzt einen Wurzelausdruck der Form $\sqrt{q(x)}$ durch einen Quotienten $\dfrac{q(x)}{\sqrt{q(x^{(0)})}}$, wobei $x^{(0)}$ eine Näherung für die Lösung bedeutet.

Man kann ohne Übertreibung sagen, daß Weiszfelds Arbeit völlig ohne Wirkung geblieben ist. Im Jahre 1937 hätte die Berechnung der Lösung einer solchen Aufgabe vermittels der Methode einen unzumutbaren Aufwand verursachen können, insbesondere auch bedingt durch die „langsame“ lineare Konvergenz. Erst als leistungsfähige Rechner vorhanden waren konnte man die Methode ernsthaft als numerisches Verfahren in Erwägung ziehen.

4.2 Die Nachkriegsrenaissance der Aufgabenstellung

Ende der fünfziger und Anfang der sechziger Jahre des zwanzigsten Jahrhunderts lebte die Aufgabe von Fermat wieder auf. Seltsamerweise gab es eine Anzahl von Autoren, die die Methode von Weiszfeld anscheinend unabhängig voneinander und fast gleichzeitig wieder entdeckten.

William Miehle, 1958 Miehle behandelte in seiner Arbeit [53] eine mechanische Vorrichtung zur Minimierung eines Kommunikationsnetzwerks mit 62 vorgegebenen Punkten, die durch 18 Kommunikationszentren verbunden sind. Er gab an, daß die Vorbereitung – also die Anpassung der Vorrichtung an die gegebenen Daten – etwa eine Stunde Zeit benötigte. Als Alternative untersuchte er eine Lösung der Aufgabenstellung mit einem „Seifenblasencomputer“ und berichtete, daß damit nicht immer das absolute Minimum der Verbindungswege gefunden wurde. Schließlich hat Miehle die Weiszfeld-Methode wiederentdeckt, allerdings ohne eine Konvergenzaussage zu finden.

Harold W. Kuhn und R. E. Kuenne, 1962 Von diesen beiden Autoren wird Weber genannt [43]. Sie entdecken ebenfalls die Weiszfeldsche Methode neu – ebenfalls ohne Beweise.

Kurt Eisemann, 1962 Eisemann [23] bringt die Aufgabe von Fermat als *Problem* in der sehr renommierten Zeitschrift *SIAM Review*. Er erwähnt verschiedene Spezialfälle und gibt ein mechanisches Modell – den Varignonschen Apparat, allerdings ohne Namensnennung – sowie den „Seifenblasencomputer“ an. Eine „numerische“ Lösungsmethode wird nicht gegeben. Er schreibt vielmehr:

> While this is a somewhat celebrated problem and appears simple, there are not, apparently, very good methods for its solution, expecially for large n. Since this problem becomes increasingly important in an economic context, better methods are needed.

Leon Cooper, 1963 Cooper bringt – im Gegensatz zu Miehle – eine recht gute Darstellung der historischen Entwicklung [16], kennt allerdings Weiszfeld nicht. Er bezieht sich auf C. J. Friedrich[3] und Walter Isard[4] als diejenigen, die Webers Theorie in den USA fortgeführt haben. Auch er entdeckt die Weiszfeldsche Methode neu, allerdings ebenfalls ohne Konvergenzbeweis.

[3] C. J. Friedrich: Alfred Weber's Theory of the Location of Industries. University of Chicago Press, Chicago, 1929.

[4] Walter Isard: Location and Space–Economy, 1956.

Es fällt auf, daß in den Jahren 1958 bis 1963 die Aufgabe von Fermat plötzlich wieder „in Mode“ kam und daß es eine Reihe von Autoren gegeben hat, die die Weiszfeldsche Methode wiederentdeckt haben. Sie haben sämtlich „das Rad neu erfunden“, allerdings eine recht kleines Rad mit Ecken!

Besondere Erwähnung verdient ein Aufsatz von Harold W. Kuhn [40]. Harold W. Kuhn ist einer der bekanntesten Vertreter der „Pioniergeneration“ der Optimierer. Auf ihn geht der sogenannte *Kuhn-Tucker-Satz* zurück. Er war „von Hause aus“ reiner Mathematiker, der sich mit Konvexitätstheorie befaßt hat. Im Jahre 1963 hatte in Budapest ein *International Colloquium on Applications of Mathematics to Economics* stattgefunden. Man muß sich zum Verständnis des folgenden die damalige Situation vor Augen halten:

> Drei Jahre nach dem Tode von Stalin im Jahre 1953 kam es im Jahre 1956 zu dem Aufstand in Ungarn. Im Jahre 1961 war in Berlin die Mauer gebaut worden, der Oktober 1962 stand im Zeichen der Kuba-Krise. Chruschtschows Position war um 1963 schon recht angeschlagen, im Oktober 1964 wurde er durch Leonid Breschnew abgelöst.

Bei aufmerksamen Lesen des Tagungsbandes kann man immer wieder Bezüge auf diese sehr gefährliche und turbulente Zeit finden. Man hatte in Budapest noch lange nicht vergessen, daß der Ungarn-Aufstand erst sieben Jahre zurück lag.

In dieser Situtation sprach Kuhn über die Aufgabenstellung, einen optimalen Standort zu finden. Er brachte ein „praktisches“ Beispiel in seinem Vortrag, nämlich für 24 ukrainische Städte ein Versorgungszentrum zu finden, wobei jede Stadt mit einer Zahl gewichtet werden soll, die der Bevölkerungszahl proportional ist. Die Daten dieser Aufgabe sind in Tabelle 2 angegeben.

Tabelle 2: Locations and Weights for Major Ukraine Cities

City	x_i	y_i	w_i	City	x_i	y_i	w_i
Minsk	54	28	0.012	Zhdanov	47	38	0.007
Lvov	50	24	0.010	Stalino	48	37	0.016
Kishinev	47	28	0.005	Makayevka	48	38	0.008
Odessa	46	31	0.014	Gorlovka	48	38	0.007
Nikolaev	47	32	0.005	Taganrog	47	39	0.005
Kherson	47	33	0.004	Krasnodar	45	39	0.007
Sevastopol	45	34	0.004	Rostov	47	40	0.014
Simferopol	45	34	0.004	Shakhty	48	40	0.004
Krivoi Rog	46	34	0.009	Kadiyevka	49	39	0.004
Dneprodzerhinsk	48	35	0.004	Kharkov	41	37	0.021
Dnepropetrovsk	48	35	0.015	Kiev	50	31	0.026
Zaporozhe	48	36	0.010	Gomel	52	31	0.004

An dieser Tabelle fällt einiges auf:

1. x_i ist die geographische (nördliche) Breite, y_i ist die östliche Länge, jeweils gerundet auf einen Grad. Das bedeutet, daß es schon von der Datenlage her auf einhundert Kilometer nicht ankommt. Kuhn hat mit diesen Daten offenbar gerechnet, das heißt, er hat nicht die

Summe der Euklidischen Entfernungen minimiert, sondern eine andere Summe, bei der in Ost-West-Richtung eine andere Maßeinheit benutzt wird als in Nord-Süd-Richtung.

Die angegebenen Gewichte sind die Anteile der Bevölkerungszahlen unter den 100 bevölkertsten Städten der Sowjetunion. Auch hier sind die Zahlenwerte sehr rüde gerundet.

2. Minsk ist keine ukrainische Stadt, sie ist die Hauptstadt von Weißrußland. Gomel gehört ebenfalls zu Weißrußland.
3. Ebenso gehört Kishinew nicht zur Ukraine, sondern ist Hauptstadt von Moldawien.
4. Die Städte Krasnodar, Schachty, Rostov (am Don) und Taganrog gehören nicht zur Ukraine, sondern zu Rußland.
5. Die Stadt Stalino heißt seit 1961 Donezk (bis 1924 hieß sie Jusowka).
6. Die bekannte und wichtige ukrainische Stadt Charkow wurde von Kuhn – nach den angegebenen geographischen Daten – in die Türkei verlegt.

Kuhn wählt als Startpunkt den Schwerpunkt bezüglich der angegebenen Gewichtsfaktoren und gibt vier Iterierte an (siehe Tabelle 3).

Tabelle 3: Die von Kuhn angegebenen Ergebnisse

	x_i	y_i
$\mathbf{P}^0$	47.48	34.36
$\mathbf{P}^1$	47.51	35.74
$\mathbf{P}^2$	47.64	35.51
$\mathbf{P}^3$	47.62	35.35
$\mathbf{P}^4$	47.60	35.32

Wenn man die Angaben von Kuhn nachprüft, stellt sich heraus, daß das erste Zahlenpaar, also der Schwerpunkt der Städte, korrekt ist. Dies deutet darauf hin, daß Kuhn in der Tat die vorliegenden Daten benutzt hat, also die gerundeten Werte und auch die fehlerhafte Angabe bezüglich Charkow. Wenn man die Iterierten der Weiszfeld-Methode nachrechnet, erhält man abweichende Resultate, nämlich $x_4 = 47.67$ und $y_4 = 35.09$. Hierbei wurde mit den Originaldaten gerechnet. Korrigiert man den Fehler in der Position von Charkow, dann erhält man als Grenzwert $x_\infty = 48.45$ und $y_i = 34.98$.

In dem genannten Artikel wird Weiszfeld nicht erwähnt. Die Beweise sind noch recht dürftig, und die Monotonie (Eigenschaft 2. oben) wird nicht bewiesen, sondern nur vermutet. Kuhn schreibt [40, S. 241]:

> Properties of this iterative scheme seem difficult to establish. In particular, although no counterexample is known, no proof has yet been established for the crucial *conjecture*
>
> $$F(\mathbf{P}') < F(\mathbf{P}) \qquad \text{for all } \mathbf{P}.$$
>
> The inequality has been satisfied in all examples which have been calculated to date.

Erst im Jahre 1973 scheint Kuhn Kenntnis erhalten zu haben von der Weiszfeldschen Arbeit [42]. Gleichsam als Entschuldigung für seine recht laxe Behandlung des Themas schreibt er: „Although the same algorithm has been rediscovered several times (see, for example, [16], [43] or [53]). there seems to be no completely correct treatment in the literature."

Diese Häufung von Wiederentdeckungen der Methode von Weiszfeld in nahezu gleichzeitigen Artikeln wird durch eine Geschichte erklärt, die ich einem der führenden Forscher auf diesem Gebiet verdanke, für deren Wahrheit ich mich allerdings nicht verbürgen kann:

> Während des Zweiten Weltkriegs und nach diesem wurde in England und in den USA das *Operations Research* als eine „wissenschaftliche" Methode zur Lösung von militärischen Aufgabenstellungen entwickelt. Neben anderen Methoden wurde auch die Standortoptimierung auf die militärische Logistik angewandt. Dieser Hintergrund wird ganz deutlich in dem Artikel von Miehle [53].
>
> Es wird nun behauptet, daß im Pentagon Planspiele gemacht wurden über den Einsatz von Superbomben. Ein Problem dabei ist die Bestimmung des optimalen Abwurfpunktes. Man kann diese Aufgabenstellung als Standortoptimierungsaufgabe formulieren: Das Produkt „Zerstörung" soll so auf verschiedene Ziele verteilt werden, daß die gesamte Zerstörung maximal ist, und das heißt, daß die Summe der Wege von Abwurfpunkt zu den einzelnen Zielen minimal ist, wobei angenommen wird, daß die Wirkung einer solchen Bombe proportional zur Entfernung abnimmt.
>
> Es heißt, daß ungefähr Anfang der sechziger Jahre die dazu entwickelten Methoden vom Pentagon „deklassifiziert" wurden, was die Häufung der entsprechenden Publikationen erklären würde. Es zeigte sich dabei auch – und dies scheint für Militärforschung typisch zu sein – daß das Rad an verschiedenen Stellen neu erfunden wurde.
>
> Was Kuhn anbelangt, so wird behauptet, daß er aus seiner Schreibtischschublade eine alte „Denksportaufgabe" für die Tagung in Budapest hervorgezogen habe und den Kontext einfach weggelassen habe. Dies erklärt auch die offenbaren Schlampereien der Arbeit recht gut.
>
> Sollte diese Geschichte wahr sein, dann ist sie jedenfalls ein gutes Beispiel für unüberbietbaren Zynismus und sehr schlechten Geschmack!

5 Die Situation heute

Die mathematischen Modelle und Methoden zur Standortoptimierung haben sich inzwischen etabliert. Es gibt Lehrbücher (etwa [30, 54]) und Zeitschriften sowie Tagungen zu diesem Thema. Auch heute noch gibt es „Pragmatiker" und „Konservative" unter den Wirtschaftswissenschaftlern. Erstere rechnen konkrete Beispiele aus, weil dies ja sehr einfach ist und auf jeden Fall Erkenntnis liefert, auch wenn die berechnete Lösung sich als unbrauchbar erweisen sollte, letztere begründen jeweils sehr gelehrt, daß man solche Aufgabenstellungen nicht rechnen kann, da eben die Umwelt zu komplex ist. Prominentester Vertreter der letztgenannten Richtung ist Walter Isard, der zahlreiche Arbeiten über *Regional Science* geschrieben hat (siehe etwa [37, 7, 39, 38]). Er gilt als der Neubegründer der Theorie Webers ([16]: „Isard restates the Weberian theory"). Allerdings findet man in seinen Publikationen kaum Formeln. In dem Artikel über *Standorttheorie* in Wikipedia heißt es [67, S. 2]:

> 1956 erweiterte Walter Isard Webers Standortheorie um Andreas Predöhls Substitutionsprinzip und wertete damit die Standortentscheidung zu einer Substitutionsentscheidung zwischen Produktionsfaktoren in einem allgemeinen Gleichgewichtsmodell um.

> David M. Smith erweiterte diese Theorie um ein variables Kostenmodell, so dass im Rahmen eines Totalmodells alle raumabhängigen Kosten und Erlöse der Unternehmen betrachtet werden können. Smith führte auch Aspekte wie unternehmerisches Können, Regionalpolitik und regionale Steuern in das Modell ein.

Man fragt sich, auf welche Weise das „unternehmerische Können" mathematisch modellierbar ist. Weiter heißt es in dem gleichen Text über Allan Preds Theorie:

> - Informationsstand und Unternehmerleistung einerseits und Qualität der Standortentscheidung andererseits sind mit hoher Wahrscheinlichkeit stark positiv korreliert.
> - Unternehmer mit gleichem Informationsstand und gleicher Informationsnutzungskapazität können aufgrund persönlicher Präferenzen, oder auch aufgrund von Zufällen, unterschiedliche Standorte wählen.

So formuliert, verdünnt sich die Theorie ins Unverbindliche!

5.1 Eine persönliche Geschichte

Anfang der siebziger Jahre leitete ich eine Arbeitsgruppe in der Kernforschungsanlage Jülich. Unsere Aufgabe war, Benutzer aus der Kernforschungsanlage, aber auch aus Fremdfirmen, mathematisch zu beraten. Eines Tages kam ein Kollege aus der *Programmgruppe Systemforschung und Technologische Entwicklung* zu mir. Diese Programmgruppe hatte die Aufgabe, Szenarien insbesondere im Umfeld der Energieversorgung zu entwickeln und zu analysieren. Hierbei spielte naturgemäß der Hochtemperaturreaktor, der in Jülich entwickelt worden war, eine besondere Rolle. Dieser Kernreaktor war bei weitem das effizienteste und sicherste Produkt auf diesem Gebiet, allerdings kam er nie richtig zum Einsatz. Der Kollege aus der Programmgruppe schilderte mir ein Projekt der Gruppe, bei dem er sich Hilfe von uns versprach. Es handelte sich darum, die Entwicklung der Energiegewinnung durch Kernreaktoren im Kontext des Energiebedarfs verschiedener Firmengruppen zu prognostizieren. Es ist bekannt, daß beispielsweise die Norddeutsche Affinerie einen enormen Strombedarf hat, aber auch Firmen der Großchemie entwickeln einen beachtlichen Energiehunger [65]. Man wollte nun in einem Energiemodell für die Bundesrepublik Deutschland und auch für die EWG untersuchen, auf welche Weise man Angebot und Nachfrage zusammenführen könne. Eine solche Aufgabenstellung führt natürlich auch auf Standortoptimierungsaufgaben.

Leider mußte ich unmittelbar nach diesem Gespräch sehr plötzlich und für eine lange Zeit ins Krankenhaus. Nachdem ich dort wieder halbwegs Herr meiner Entscheidungen war, versuchte ich die geistig nicht unbedingt anregende Atmosphäre des Krankenhauses durch Mathematik etwas für mich zu beleben. Dabei dachte ich darüber nach, wie ich die Standortoptimierungsaufgabe lösen würde. Natürlich entdeckte ich alsbald – ich hatte ja keinerlei Zugang zu Bibliotheken oder sontigen Informationsquellen – aufs neue die Weiszfeldsche Methode. Dabei gelang mir ein hübscher kleiner neuer Konvergenzbeweis, der etwas aufwendig war, aber half, das komplizierte Konvergenzverhalten der Methode besser zu verstehen.

Als ich nach langer Zeit wieder an meinen Arbeitsplatz zurückkam, rief ich bei der „Programmgruppe" an. Die Reaktion war kühl und verhalten, man teilte mir mit, daß man das Problem selbst schon gelöst habe. Ich hatte gewisse Zweifel, die ich allerdings bei mir behielt, denn nach meiner Einschätzung war mathematische Kompetenz nicht die bemerkenswerteste Eingenschaft der Mitarbeiter der Programmgruppe. In der bereits zitierten Arbeit [65] findet man auf Seite 86:

> Die geometrischen und analytischen Kriterien für die Bestimmung des kostenminimalen Standortes im Dreieck sind bereits von Launhardt [46] und Weber [79] beschrieben worden. Ebenso können die analytischen Optimalkriterien für ein vieleckiges Polygon beschrieben werden [43].[1] Allerdings ist für das vieleckige Polygon bis heute noch kein Rechenverfahren gezeigt worden, das zu mathematisch exakten Lösungen führt. Es liegen jedoch ökonomisch brauchbare Näherungslösungen vor, z. B. die Anwendung des Varignonschen Apparates.

Abgesehen von den sprachlichen Unstimmigkeiten (*Polygon* heißt *Vieleck*) stimmt hier alles nicht so ganz. Wie zahlreiche Nichtmathematiker unterscheidet der Autor zwischen „exakten“ Verfahren und „Näherungsverfahren“. Diese Unterscheidung ist in aller Regel nicht sinnvoll, offenbar versteht der Autor unter einem „exakten“ Verfahren ein geometrisch–konstruktives Verfahren, welches seiner Natur nach eben nicht wirklich exakt ist, seine Anwendung würde ein ideales Lineal und einen idealen Zirkel voraussetzen. Daß man etwa mit der Weiszfeldschen Methode einen beliebigen Grad der Genauigkeit (im Rahmen der Fähigkeiten des verwendeten Rechners) erreichen kann, scheint den Autor nicht zu beeindrucken. Mit dem Varignonschen Apparat kann man nur Aufgaben lösen, bei denen die gegebenen Standorte auf der Periperie eines Kreises liegen. Dies läßt sich nur bei drei gegebenen Standorten „ohne Einschränkung der Allgemeinheit“ voraussetzen. Für die allgemeine Aufgabenstellung benötigt jedoch der Varignonsche Apparat erhebliche Umbauten!

Wie dem auch sei, ich hatte jetzt eine schöne Lösung, aber keine Aufgabe mehr dazu. Für einen Wissenschaftler sind Ideen so gut wie „bares Geld“, und die Münze, mit der wir handeln, sind Publikationen. Ich konnte aber schlechterdings keine Arbeit schreiben, die etwa mit den Worten beginnt: „Die folgende Aufgabenstellung trat **nicht** auf bei der Standortoptimierung von Hochtemperaturreaktoren.“

Nun sollte für die erste (und leider letzte) Installation eines Hochtemperaturreaktors ein *Naturzugkühlturm* errichtet werden, auch dies eine hochinteressante Konstruktion. Der Kühlturm sollte als *Seilnetzkonstruktion* ausgeführt werden, eine zu dieser Zeit neuartige und auch mathematisch interessante Bauweise, die übrigens in dem sogenannten *Olympiazeltdach* in München am spektakulärsten realisiert wurde [3]. Nun ist ein Seilnetzkühlturm keine Minimalfläche, aber es gibt enge Verwandtschaften. Auf jeden Fall ist eine Minimalfläche ebenfalls ein nichtlineares Konstrukt, also überlegte ich, ob man mit dem Weiszfeldschen Ansatz auch Minimalflächen berechnen könne.

Eine Minimalfläche wird mathematisch dadurch beschrieben, daß man eine Funktion $u(x, y)$ sucht, die auf einem Gebiet B der Ebene definiert ist, so daß gilt

$$\int_B \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}\, dx\, dy \longrightarrow \text{ Minimum.}$$

($u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$). Dabei muß u noch gewisse „Randbedingungen“ erfüllen. Ohne hier auf Einzelheiten einzugehen, ist klar, wie man das Weizfeldsche Verfahren anwenden kann. Man nimmt an, man hätte eine Näherungslösung $u^{(0)}(x, y)$ und betrachtet die Aufgabenstellung

$$\int_B \frac{1 + u_x^2 + u_y^2}{\sqrt{1 + (u_x^{(0)})^2 + (u_y^{(0)})^2}}\, dx\, dy \longrightarrow \text{ Minimum.}$$

[1] Nur Eisenbahnfrachten wurden berücksichtigt.

Eine solche Aufgabe ist aber eine Standardaufgabe der numerischen Mathematik. Sie führt auf eine der einfachsten linearen partiellen Differentialgleichungen, dem sogenannten *Dirichlet-Problem*. Für Aufgabenstellungen dieser Art gibt es eine große Anzahl von sehr komfortablen Softwareprodukten, so daß die Lösung für den Anwender keinerlei Schwierigkeiten bereitet.

Ich arbeite „eigentlich" auf dem Gebiet der Optimierung, und so versuchte ich eine Modifikation der Aufgabenstellung. Was geschieht, fragte ich mich, wenn man unter die Minimalfläche ein Hindernis, etwa eine Kugel, einführt, so daß die Minimalfläche durch dieses Hindernis etwas nach oben gedrückt wird. Es wird sich dann auf dem Hindernis ein Kontaktgebiet ausbilden, in welchem die Minimalfläche das Hindernis berührt, und außerhalb dieser Kontaktfläche bildet sich eine „freie" Minimalfläche aus (siehe Abbildung 9). Eine solche Aufgabenstellung nennt man eine *freie Randwertaufgabe* (eigentlich: Aufgabe mit freiem Rand), und es zeigte sich, daß man auch solche Aufgaben mit der Weiszfeldschen Methode behandeln kann.

Ich schrieb eine kleine Arbeit über meine Resultate [22]. Wenn man an „Impact Factors" glaubt, dann handelte sich es dabei um eine sehr wichtige Publikation. Ohne es zu wissen, hatte ich gleich mehrere mathematische „Moden" bedient:

- Minimalflächen waren zu der Zeit in Mode. Dies hatte mit der Raumfahrt zu tun. Dort gibt es zwar keine Minimalflächen, aber im schwerefreien Zustand wird die Oberfläche von Flüssigkeiten durch Kapillarkräfte geformt, und diese lassen sich auf ganz ähnliche Weise mathematisch modellieren, wie auch Minimalflächen [63]. Im Jahre 1975 erschien ein umfangreiches Buch von Johannes C. C. Nitsche [55] zu diesem Thema.

- Freie Randwertaufgaben begannen gerade in dieser Zeit, das Interesse der angewandten Mathematiker auf sich zu ziehen. Obwohl die vorliegende Aufgabenstellung zu den einfachsten gehört, war sie eine der ersten wirklich gerechneten Aufgabenstellungen für eine nichtlineare Aufgabe.

- Ich hatte für die Lösung der Aufgabe sogenannte „finite Elemente" verwendet. Dies war zwar nicht ganz neu, aber erweckte immerhin noch das Interesse der Kollegen.

- Ein „technisches" Detail interessierte die Fachwelt besonders. Wir hatten in Jülich die Möglichkeit, Bilder direkt auf Mikrofilm zu schreiben. Damit konnten wir leicht und schnell Bilder hoher Qualität erzeugen. Dies war Mitte der siebziger Jahre nicht selbstverständlich, und zahlreiche Kollegen, die mich auf meine Arbeit ansprachen, hatten den Text nicht gelesen, sondern waren nur durch die schönen Bilder beeindruckt worden.

Um die Geschichte abzuschließen: Es wurde seinerzeit von der *Programmgruppe* eine Studie erstellt, in der die Frage untersucht wurde, an welchen Standorten man zweckmäßigerweise eine Anzahl von Kernreaktoren – meines Wissens 40 – aufstellen sollte. Diese Botschaft kam genau zum falschen Augenblick in die Öffentlichkeit. Inzwischen hatte sich – Mitte der siebziger Jahre – eine sehr starke Anti-Kernenergiebewegung etabliert, und die Stimmung war einer rationalen Diskussion nicht förderlich. Die Vorschläge der Studie gelangten in die Presse, und das Resultat war, daß es in der Bundesrepublik Deutschland über Nacht 40 neue Anti-Kernenergie-Aktivitäten gab. Damals wie heute hatte man nichts gegen Kernenergie an sich, aber wenn schon, dann in Persien oder in Nordkorea, aber nicht vor der Haustür!

Ich hatte also Glück gehabt, daß mich mein Krankenhausaufenthalt „aus dem Spiel" gebracht hatte. Wäre mein Name mit der Reaktorstudie verknüpft gewesen, dann hätte es für mich einen gewissen Erklärungsnotstand gegeben!

6 Fazit

Wir haben eine Flaschenpost auf dem langen Weg von 1646 bis zum heutigen Tage über 362 Jahre verfolgt. Dabei haben wir gesehen, auf welch komplizierte Weise die Aufgabe von Fermat immer wieder neu gestellt und immer wieder neu gelöst worden ist. Cieslik schreibt dazu „However, the history of the problem is a bit murky.“ [15, S. 2]. Wir haben gesehen, wie sich im Laufe der Zeit der Begriff der „Lösung“ gewandelt hat, von der geometrischen Lösung, die einen hohen ästhetischen Reiz und sehr viel unmittelbare Überzeugungskraft hat bis zum numerischen Verfahren, dessen Resultat, von einem Computer geliefert, man einfach akzeptieren muß. Wir haben auch gesehen, wie sich die Aufgabe von Fermat zwischen „reiner“ Mathematik – als eine Frage wissenschaftlicher Neugier ohne jeden Bezug zum Alltagsleben – und angewandter Mathematik – als eine Frage, deren Beantwortung sehr unterschiedliche Folgen im Alltag haben kann – entwickelt hat.

Ich habe versucht, Ihnen zu zeigen, daß einerseits die Mathematik „zeitlos“ ist – ihre Resultate sind nach allem was wir wissen in jedem denkbaren Universum gültig und sie waren bereits vor dem Urknall in einem Platonischen Sinne „vorhanden“ und „richtig“. Auf der anderen Seite besitzen auch mathematische Ergebnisse einen Zeitwert, wie ich durch eine persönliche Geschichte zu zeigen versuchte. Ein Resultat, welches zur rechten Zeit erscheint, und sei es auch noch so unsauber ausgeführt, hat Wirkung, während ein Resultat zur falschen Zeit eben als Flaschenpost durch die Ozeane treibt. Das vollständige und „handwerksgerechte“ Resultat von Weiszfeld kam zum falschen Zeitpunkt, die äußerst mangelhaften Ergebnisse von Miehle, Cooper, Kuhn und Kuenne erschienen zur rechten Zeit – es gab einen wachsenden Bedarf und es gab die ersten Rechenanlagen, so daß es einfach wurde, Aufgabenstellungen dieser Art „eben mal“ zu rechnen.

Wir haben auch gesehen, daß mathematische Resultate neutral sind, es gibt keine „böse“ oder „gute“ Mathematik, es gibt nur bösen oder guten Gebrauch, den man von Mathematik machen kann. Im Falle der Standortoptimierungsaufgabe kann man vermittels exakt des gleichen Verfahrens und unter Verwendung exakt der gleichen Zahlen einmal ausrechen, wo man zweckmäßigerweise einen Rettungshubschrauber plazieren sollte, der Menschenleben rettet, zum anderen kann man den optimalen Abwurfpunkt einer Bombe ermitteln, die das Ziel hat, Menschenleben zu vernichten.

Ein Gesichtspunkt verdient noch Erwähnung: Mathematik ist „rezyklierbar“. Wir hatten dies gesehen am Beispiel der Standortaufgabe für Kernreaktoren: Als sich herausstellte, daß die ursrpünglich intendierte Anwendung obsolet geworden war, ließ sich leicht eine völlig andere praktische Situation finden, für die die entwickelte Lösung passend war. Ich sollte vielleicht erwähnen, daß es in der Tat eine sehr große Anzahl von solchen Situationen gibt, auf die das Standortmodell und auch das Weiszfeldsche Verfahren „passen“.

Die Hintergrundanekdote über die „Wiederentdeckungen“ der Weiszfeldschen Methode nach dem zweiten Weltkrieg ist – wenn sie denn wahr sein sollte – ein schönes Beispiel für die Probleme mit militärischen Forschungsprojekten. Ein solches Projekt steht unter einem eigenen Gesetz, welches nicht das Gesetz der wissenschaftlichen Forschung ist.

- In aller Regel sind die Ergebnisse militärischer Forschung geheim. Das hat zur Folge, daß die für wissenschaftliche Forschung so wichtige Kommunikation mit der Fachwelt unterbleibt.

- Die Kommunikation wissenschaftlicher Ergebnisse auf Tagungen und in wissenschaftlichen Publikationsorganen ruft vor allem die Kritik der für das betreffende Fachgebiet kompetenten Kollegen hervor. Sich dieser Kritik zu stellen ist ein wichtiges Korrektiv der Forschung.

- Kommunikation verhindert Parallelforschung und bietet die Chance, Synergien auszunutzen. Wir hatten gesehen, daß mindestens drei Forschergruppen anscheinend unabhängig voneinander auf diesem Gebiet zu ähnlichen Resultaten gelangt waren.
- Die Geheimhaltung und damit die Ausschaltung kompetenter Kritik führt häufig dazu, daß die Forscher ihre Fähigkeit zur Selbstkritik verlieren. Die auffallend „schlampige“ Darstellung von Kuhn [40] scheint ein Indiz dafür zu sein, daß die Arbeit in einem solchen geschützten Biotop entstanden ist.
- Die Geheimhaltung bewirkt häufig auch, daß die Resultate solcher Forschung entweder ganz verschwinden oder aber erst dann publik werden, wenn sie schon mehr oder weniger bekannt oder aber an anderer Stelle bereits entwickelt worden sind. Auch hierfür gibt es sehr eindrucksvolle Beispiele.
- Der praktische Nutzen militärischer Forschung ist begrenzt. Insbesondere bei Aufgabenstellungen aus den Wirtschaftswissenschaften fällt immer wieder auf, daß es eine sehr große Anzahl von Einflußgrößen gibt, die man entweder nicht kennt oder die von den Beteiligten und Betroffenen sehr individuell gehandhabt werden. In einem militärischen Biotop kann man störende Einflußgrößen und individuelle Besonderheiten weitgehend durch Befehle und Verordnungen ausschalten. Einer häufig zitierten Anekdote zufolge hat es für die Ausarbeitung optimaler Diätpläne – eine klassische Anwendung der linearen Optimierung – nur zwei funktionierende Einsatzmöglichkeiten gegeben: Die Ernährung von Soldaten und von Vieh. Beide haben gemeinsam, daß sie sich nicht beschweren können.

Im Gegensatz zu dem – üblicherweise falsch zitierten – Ausspruck von Heraklit ist eben der Krieg **nicht** „Vater aller Dinge“[5].

Vielleicht zum Schluß noch eine Anmerkung. Wir hatten gesehen, daß es unter den Anwendern einen erheblichen Widerstand gegeben hat, was die Mathematik anbelangt. Diese feindliche Reaktion auf die Mathematik ist wohl universell. Wenn Goethe gegen Newtons Farbenlehre emotional und unangemessen polemisierte, so war es die Mathematisierung, die Goethe an Newton mißfiel. Goethe hat sich an verschiedenen Stellen zur Mathematik geäußert, er wußte, daß ihm die Mathematik nicht zugänglich war, er wußte auch, daß man ohne Mathematik nicht sehr weit kommt in den Naturwissenschaften, und das Bewußtsein dieses Zwiespaltes hat ihn immer wieder zu manchmal recht ungerechten Ausfällen veranlaßt.

Im neunzehnten Jahrhundert befaßte sich Friedrich Engels auch mit der Mathematik. Er schrieb in seinem Artikel *Maß der Bewegung — Arbeit (1880/1881)* [25, S. 106] über ein Buch von Thomson (Lord Kelvin) und Tait: „Das Denken ist im Buch dieser beiden Schotten verboten, es darf nur gerechnet werden.“ Diese – zumindest zurückhaltende – Einstellung – „Rechnen“, also Mathematik, als Gegensatz zum „Denken“ – von Engels über die Rolle der Mathematik in der Physik wurde von Lenin in seinem Buch *Materialismus und Empiriokritizismus* übernommen. Er bezieht sich dabei auf den konservativen Physikhistoriker Abel Rey und schreibt [48, S. 329 f.]:

> Die abstrakten Fiktionen der Mathematik haben gewissermaßen eine spanische Wand aufgerichtet zwischen der physikalischen Realität und der Weise, wie die Mathematiker die Wissenschaft von dieser Realität verstehen.
>
> . . .

[5] Nach Capelle [13, Fünftes Kapitel, Herakleites von Ephesos, S. 135]: „Der Kampf ist der Vater von allem, der König von allem; die einen macht er zu Göttern die andern zu Menschen, die einen zu Sklaven, die andern zu Freien“ (29 fr. 53).

> Die Krise der Physik besteht in der Eroberung der Physik durch den Geist der Mathematik.
>
> ...
>
> Der große Erfolg der Naturwissenschaft, die Annäherung an so gleichartige und einfache Elemente der Materie, deren Bewegungsgesetze sich mathematisch bearbeiten lassen, läßt die Mathematiker die Materie vergessen, »Die Materie verschwindet«, es bleiben nur Gleichungen.

Inzwischen hat man sich in der Physik mit der Mathematik abgefunden. In den Wirtschaftswissenschaften ist dieser Prozeß der Aussöhnung mit der Mathematik noch längst nicht abgeschlossen. Einen schönen Beitrag zum diesem Thema fand man im Jahre 1992 in der *Wirtschaftswoche* [50]. Der Untertitel lautet: „Der Siegeszug der Gleichungen führt die Wirtschaftswissenschaften ins Abseits und zerstört die Berufschancen der Volks- und Betriebswirte.“

ANHANG

Geometrische Konstruktion einer Lösung

Warnung!

Dieser Abschnitt enthält Mathematik.
Sein Inhalt ist für das Verständnis des Textes **nicht** erforderlich.
Personen mit Überempfindlichkeit gegen Mathematik sollten nicht weiterlesen.

Wir wollen nun einen Blick auf eine der zahlreichen geometrischen Lösungen der Fermatschen Aufgabe werfen. Zum einen ist es interessant, die geometrische Methode kennenzulernen, die leider in unseren Schulen nur noch rudimentär gelehrt wird. Dies ist umso bedauerlicher, als in zahlreichen Anwendungen bildhafte Information verarbeitet werden muß, und hierfür geometrische Methoden außerordentlich hilfreich sein können. Zudem bildet die Geometrie einen sehr ästhetischen Zugang zur Mathematik. Ein weiterer Grund für unseren geometrischen Abstecher ist, daß sich dabei interessante und überraschende Bezüge zur geometrischen Optik ergeben werden.

Wir gehen also aus von der folgenden Situation: Gegeben seien drei Punkte P_1, P_2 und P_3 in der Ebene. Gesucht ist ein Punkt P, so daß die Summe der Entfernungen von P zu den P_i minimal wird.

Wir lassen uns durch das physikalische Modell der Reflexion eines Lichtstrahls inspirieren. Heron von Alexandria war ein Mathematiker und „Praktiker“, der gegen Ende des ersten nachchristlichen Jahrhunderts lebte. In seinen *Katoptrika* beschrieb er die Gesetze der Reflexion des Lichtes an ebenen und gekrümmten Flächen. Es ist interessant, daß unter den Manuskripten Fermats über Maxima und Minima auch zwei über die Brechung des Lichtes zu finden sind [19, S. 170 *Analysis ad refractiones* und S. 173 *Synthesis ad refractiones*].

Wir betrachten zunächst den einfachsten Fall, die Reflexion eines Lichtstrahls an einer Ebene, beziehungsweise im Zweidimensionalen an einer Geraden. Ein Lichtstrahl, der vom Punkte P_3 nach Reflexion an einer Geraden zum Punkte P_2 läuft (Abbildung 10.a)), wird nach dem bekannten Fermatschen Prinzip den kürzesten Weg von P_3 nach P_2 einschlagen, der die spiegelnde Gerade trifft. Nun kann man diese Minimierungsaufgabe sehr leicht vermittels eines kleinen Tricks elementar lösen (man siehe etwa die sehr schöne Darstellung in dem Buche von Steinhaus [70, S. 119 f.]). Wenn man den Punkt P_2 an der Geraden spiegelt, dann erhält man das Spiegelbild P_2'. Bei der Spiegelung bleiben Längen erhalten, wir können also die die Aufgabe auch so formulieren: Welches ist der kürzeste Weg von P_3 nach P_2'? Dieser ist aber bekannt, seit Euklid weiß man, daß die Verbindungsstrecke $\overline{P_3P_2'}$ von P_3 und P_2' den gesuchten kürzesten Weg realisiert. Spiegelt man den Teil dieser Geraden, der von dem Schnittpunkt P mit der spiegelnden Geraden zu P_2' führt, wieder zurück, dann ändern sich die Längen nicht und man erhält den kürzesten Weg von P_3 über P nach P_2. Man sieht unmittelbar, daß die drei Winkel φ_1, φ_2 und φ_3 in Abbildung 10.a) gleich sein müssen. φ_2 ist aus φ_1 durch Spiegelung entstanden, also ist $\varphi_2 = \varphi_1$. Weiterhin sind φ_2 und φ_3 als Scheitelwinkel sich schneidender Geraden einander gleich. Es ist also in der Tat $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi$. Damit sind aber auch die beiden mit α bezeichneten Winkel gleich, denn sie ergänzen sich jeweils mit einem der Winkel φ zu 90^o. Wir haben also als Bedingung für den optimalen Strahlenverlauf bei Reflexion an einer Geraden erhalten, daß der Einfallswinkel im Reflexionspunkt gleich dem Ausfallswinkel sein muß. Dies ist aber das aus der geometrischen Optik bekannte Sneliusssche Gesetz (Willebrord Snellius, 1580 – 1636).

Wir gehen nun zur Reflexion an einem Kreis über. Die Aufgabe lautet also jetzt, den kürzesten Weg von P_3 nach P_2 zu finden, der die Peripherie eines vorgegebenen Kreises trifft (Abbildung 10.b)). Auch hier gilt das Snelliusssche Gesetz, der Einfallswinkel im Punkte P muß gleich dem Ausfallswinkel sein. Diese beiden Winkel werden gegen das Lot auf der Kreisperipherie im Punkte P gemessen, und dieses Lot ist beim Kreis gerade die Verlängerung des Radius und steht senkrecht auf der Tangente. Nun hat in der Mathematik das Snelliussche Gestz keine Beweiskraft, es kann uns höchstens als heuristische Hilfe bei der Findung eines Beweises dienen. Wir können aber umgekehrt sagen: Wenn in Abbildung 10.b) der Weg von P_3 nach P_2, welcher den Kreis trifft, so verläuft, daß der Einfallswinkel im Punkte P gleich dem Ausfallswinkel ist, dann ist durch den Streckenzug $P_3 - P - P_2$ der kürzeste Weg gegeben, denn dieser Streckenzug ist der kürzeste Weg von P_3 nach P_2, welcher die Tangentengerade trifft, wie wir gesehen haben. Der Weg liegt auf einer Seite bezüglich der Geraden, der Kreis auf der anderen. Jeder Weg von P_3 über die Kreisperipherie nach P_2 muß also die Gerade treffen. Damit ist offensichtlich jeder solche Weg länger als der angegebene Weg. Die Bedingung der Gleichheit von Einfalls- und Ausfallswinkel ist also eine *hinreichende Bedingung*, das heißt, wenn sie erfüllt ist, dann liegt ein – sogar eindeutig bestimmter – kürzester Streckenzug vor. Es stellt sich die Frage, ob man immer einen Punkt P auf der Kreisperipherie finden kann, so daß die beiden Strecken $\overline{PP_3}$ und $\overline{PP_2}$ mit dem Lot in P den gleichen Winkel bilden. Die Antwort ist „fast klar“. Für einen Punkt der Kreisperipherie auf der Verbindungsstrecke des Kreismittelpunktes mit P_3 ist der Winkel mit dem Lot offenbar gleich Null, der andere Winekel positiv. Umgekehrt ist es, wenn man von einem Punkt der Kreisperipherie auf der Verbindungsstrecke des Kreismittelpunktes mit P_2 ausgeht. Eine Stetigkeitsüberlegung zeigt dann, daß zwischen diesen beiden Punkten der Kreisperipherie ein Punkt liegen muß, für den die beiden Winkel gleich sein müssen. Eine solche Überlegung ist aber sehr modern, die Verhältnisse wurden erst in der Neuzeit – etwa durch Bernard Bolzano (1781 –1848) – mathematisch befriedigend geklärt [11]. Für unsere Zwecke genügt aber die *hinreichende* Richtung: Ist die Bedingung über Einfalls- und Ausfallswinkel erfüllt, dann hat man der Streckenzug minimaler Länge gefunden.

Angenommen, die Entfernung von dem gesuchten Punkt P zu P_1 wäre gegeben. Dann muß also P auf einem Kreis vom Radius $d(P, P_1)$ mit Mittelpunkt P_1 liegen (Abbildung 10.b)). Wenn wir einen Punkt P auf der Kreisperipherie finden, für den Ausfalls- und Einfallswinkel gleich sind, dann wissen wir, daß P die Aufgabe von Fermat löst. Die gleiche Argumentation bleibt richtig, wenn wir die Entfernung $d(P, P_2)$ beziehungsweise die Entfernung $d(P, P_3)$ kennen würden. Wir hätten dann im Punkte P den Winkel zwischen der Strecke $\overline{PP_3}$ und der Strecke $\overline{PP_2}$ nach dem Snelliusschen Gesetz halbiert. In Abbildung 10.c) wird dieser Winkel mit α bezeichnet. Analoges gilt für den Winkel β zwischen der Strecke $\overline{PP_3}$ und der Strecke $\overline{PP_1}$ sowie für den Winkel γ zwischen der Strecke $\overline{PP_1}$ und der Strecke $\overline{PP_2}$. Nun sind aber α und γ Scheitelwinkel von zwei sich schneidenden Geraden, müssen also gleich sein. Analog sind α und β gleich, also sind alle Winkel gleich. Da die Winkel 2α, 2β und 2γ sich zu einem Vollwinkel von 360^o ergänzen, erhalten wir als Bedingung an unseren Lösungspunkt P: Der Winkel zwischen der Geraden durch P und P_1 und der Geraden durch P und P_2 muß gerade 120^o betragen. Gleiches gilt für die anderen beiden Winkel (Abbildung 10.d)). Diese Bedingung wurde von Torricelli auf einem etwas anderen Wege gefunden. Ein Punkt, der bezüglich der drei gegebenen Punkte diese Bedingung erfüllt, wird als *Torricelli-Punkt* bezeichnet. Jeder Torricelli-Punkt ist offenbar Lösung der Fermatschen Aufgabe.

Wir haben jetzt die Fermatsche Aufgabe auf die folgende Aufgabe zurückgeführt: Gegeben seien drei Punkte P_1, P_2 und P_3, gesucht ist ein Punkt P, so daß je zwei der drei Strecken $\overline{PP_1}$, $\overline{PP_2}$ und $\overline{PP_3}$ einen Winkel von 120^o einschließen. Das heißt, wir müssen zu drei gegebenen Punkten den Torricelli-Punkt finden.

Für die Lösung dieser Aufgabenstellung hilft uns ein Satz aus der Elementargeometrie, der Satz vom Peripheriewinkel. Er lautet:

> Gegeben sei ein Kreis und zwei Punkte A und B auf dessen Peripherie (Abbildung 11). Die Verbindungsstrecke dieser beiden Punkte ist eine Sehne des Kreises. Die Sehne teilt die Kreisperipherie in zwei einander gegenüberliegende Teilbögen von A nach B und von B nach A.
>
> Mit einem Punkt P auf der Peripherie des Kreises bilden wir den *Peripheriewinkel* $\angle APB = \pi$. Dieser Winkel ist halb so groß, wie der *Zentriwinkel* $\angle AMB = \zeta$, der von dem Mittelpunkt M des Kreises mit den beiden Richtungen nach den Endpunkten der Sehne gebildet wird. Für jeden *Gegenwinkel* $\angle AQB = \gamma$, der von einem Punkt Q auf dem P gegenüberliegenden Teilbogen gebildet wird, gilt $\gamma = 180^o - \pi$.
>
> Es folgt, daß für eine gegebene Sehne alle Peripheriewinkel eines Teilbogens die gleiche Größe haben, ebenso alle Gegenwinkel.

In dem Falle, in dem die beiden Punkte A und B einander diametral gegenüber liegen, wenn also die Sehne zum Durchmesser des Kreises wird, ist der Zentriwinkel ein gestreckter Winkel von 180^o und wir haben die Aussage des Satzes von Thales.

Wir hatten unsere Aufgabe darauf reduziert, den Torricelli-Punkt zu drei gegebenen Punkten zu finden. Das heißt, wir müssen einen Punkt P finden, von dem aus gesehen die Richtungen zu den drei gegebenen Punkten Winkel von 120^0 einschließen. Wenn wir einen Kreis wählen, der auf seiner Peripherie zwei der gegebenen Punkte enthält und wenn wir es so einrichten, daß dessen Peripheriewinkel bezüglich der durch die beiden Punkte gegebenen Sehne einen Betrag von 60^o hat, dann hat der Gegenwinkel gerade 120^o. Einen Winkel von 60^o kann man sehr leicht konstruieren, in jedem gleichseitigen Dreieck haben alle Winkel 60^o.

> **Beweis des Satzes über den Peripheriewinkel** Der Beweis der Aussage über das Verhältnis von Peripheriewinkel zu Zentriwinkel wird üblicherweise in drei Schritten geführt, je nach Lage des Punktes P.

1. P liege gerade so, daß M auf der Strecke $\overline{PB}$ (beziehungsweise $\overline{PA}$ liegt. Die Radien $\overline{MA}$, $\overline{MB}$ und $\overline{MP}$ haben die gleiche Länge, also sind die beiden Dreiecke $\triangle PAM$ und $\triangle BMA$ gleichschenklig. Damit ist der Winkel $\angle PAM$ gleich π und der Winkel $\angle PMA = 180^o - 2\pi$, also $\zeta = 2\pi$.

Beiläufig sei angemerkt, daß man leicht (durch Winkelbilanzen in den beiden Teildreiecken) zeigen kann, daß der Winkel $\angle PAB$ ein rechter Winkel ist. Dies ist die Aussage des Satzes von Thales.

2. Wir untersuchen nun den Fall, daß die Gerade durch P und M die Strecke $\overline{AB}$ trifft. Nach dem unter 1. Bewiesenen gilt die Aussage jeweils für die Bögen AP' und $P'B$. Damit ist $\angle AMP' = 2 \cdot \angle APP'$ und $\angle P'MB = 2 \cdot \angle P'PB$. Daraus folgt die gewünschte Aussage.

3. Der Fall, daß die Gerade durch P und M die Strecke $\overline{AB}$ nicht trifft, wird analog zum zweiten Fall behandelt. Dieser Fall wird dem Leser als Übung überlassen.

Es verbleibt der Beweis der Aussage über die Gegenwinkel. Es sei Q ein Punkt auf dem Bogen $A\ B$. Wählt man den Punkt P diametral zu Q, dann ändert sich dadurch der Peripheriewinkel nicht. Da die Strecke $\overline{PQ}$ einen Durchmesser des Kreises darstellt, gilt dann $\angle QAP = \angle QBP = 90^o$ (Satz von Thales), und damit folgt die gewünschte Aussage durch eine Winkelbilanz in den beiden Dreiecken $\triangle QAP$ und $\triangle QBP$.

Literatur

[1] J. Abadie, editor. *Nonlinear Programming.* North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1967.

[2] Amir D. Aczel. *göttliche Formel. Von der Ausdehnung des Universums. Aus dem Amerikanischen von Hainer Kober.* rororo Sachbuch 60935. Rowohlt Taschenbuch Verlag, Reinbek bei Hamburg, 2002.

[3] T. Angelopoulos. Statische und dynamische Berechnung von vorgespannten Netzwerk-Konstruktionen (Olympia-Zeltdach). In J. Beyer, Herausgeber, *Finite Element Congress, Baden–Baden, 6.–7. November 1972*, S. 263–295, Stuttgart, 1972. IKO Software Service GmbH.

[4] Questions proposées. Problémes de Géométrie. *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 1:196, 1811.

[5] Questions proposées. Probléme d'analise. *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 13:247–248, 1822.

[6] Questions proposées. Problémes de trigonométrie spheériques. *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 20:64, 1829.

[7] Yasushi Asami and Walter Isard. Imperfect information, uncertaincy and optimal sampling in location theory: An initial reexamination of Hotelling, Weber and von Thünen. *Journal of Regional Science*, 29(4):507–521, 1989.

[8] C. Bajaj. The algebraic degree of geometric optimization problems. *Discrete and Computational Geometry*, 3:179–202, 1986.

[9] H.-J. Bandelt, F. Forster, B. C. Sykes, and M. B. Richards. Mitochondrial portraits of human populations using median networks. *Genetics*, 141:743–753, 1995.

[10] Marshall W. Bern and Ronald L. Graham. Das Problem des kürzesten Netzwerks. *Spektrum der Wissenschaft*, S. 78–84, März 1989.

[11] Bernard Bolzano. *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß ziwschen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege, von B. Bolzano, Weltpriester zu Prag.* Abhandlungen der königlich Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, 3. Folge, Band 5, 1. Abt. G. Haase, Prag, 1817.

[12] Moritz Cantor. *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Dritter Band: Von 1668 – 1758.* Verlag und Druck von B. G. Teubner, Leipzig · Berlin, zweite Auflage, 1901.

[13] Wilhelm Capelle, Herausgeber. *Die Vorsokratiker. Die Fragmente und Quellenberichte übersetzt und eingeleitet von Wilhelm Capelle.* Kröners Taschenausgabe, Band 119. Alfred Kröner Verlag, Stuttgart, 1968.

[14] Bonaventura Cavalieri. *Exercitationes geometricæ sex. Auctore F. Bonauentura Caualerio.* [Drucker:] Montius, Bononiae, 1647.

[15] Dietmar Cieslik. *Steiner Minimal Trees.* Nonconvex Optimization and Its Applications, Volume 23. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht / Boston / London, 1998.

[16] L. Cooper. Location–allocation problems. *Operations Research*, 11(3):331–343, May–June 1963.

[17] R. Courant and D. Hilbert. *Methoden der mathematischen Physik I, II.* Heidelberger Taschenbücher 30, 31. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 3., 2. Auflage, 1968.

[18] Richard Courant and Herbert Robbins. *Was ist Mathematik?* Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg, 1962.

[19] Pierre de Fermat. *Œvres de Fermat. Publiées par les soins de MM. Paul Tannery et Charles Henry sous les auspices du ministère de l'instruction publique.*
Tome premier. Œvres mathématiques diverses. — Observations sur Diophante. Gauthier-Villars et fils, imprimeurs-libraires du bureau des longitudes, de l'école polytechnique. Quai des Grands-Augustins, 55, Paris, 1841.

[20] A. K. Dewdney. Computer-Kurzweil: Eine neue Kollektion von Analogrechnern für Heimwerker und eine vertiefte Diskussion ihrer Stärken und Schwächen im Vergleich mit Digitalrechnern. *Spektrum der Wissenschaft*, S. 6–11, August 1985.

[21] Dippe. Über einige Aufgaben und Lehrsätze des Herrn Prof. Steiner. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 16:65–75, 1837.

[22] Ulrich Eckhardt. On a minimization problem in structural mechanics. In J. Stoer, editor, *Optimization Techniques. Proceedings of the 8th IFIP Conference on Optimization Techniques Würzburg, September 5–9, 1977, Part 2. Lecture Notes in Control and Information Sciences 7*, pages 42–50, Berlin, Heidelberg, New York, 1978. Springer-Verlag.

[23] K. Eisemann. Problem 62–11, the optimum location of a center. *SIAM Review*, 4:394–395, 1962.

[24] Friedrich Engels. *Herrn Eugen Dührings Umwälzung der Wissenschaft (≫Anti–Dühring≪).* Dietz Verlag, Berlin, 1960.

[25] Friedrich Engels. *Dialektik der Natur.* Verlag für fremdsprachige Literatur, Peking, 1976.

[26] Folke Ericsson. The Fermat–Toricelli problem once more. *The Mathematical Gazette*, 81(490):37–44, March 1997.

[27] Giulio Carlo de' Toschi di Fagnano. Problemata quaedam ad methodum maximorum et minimorum spectantia. *Nova acta eruditorum anni 1775, Lipsiae 1779*, page 281, 1779.

[28] Fasbender. Über die gleichseitigen Dreiecke, welche um ein gegebenes Dreieck gelegt werden können. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 30:230–231, 1846.

[29] *Folgen einer Theorie. Essays über >Das Kapital< von Karl Marx.* edition suhrkamp 226. Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main, 4. Auflage, 1971.

[30] R. L. Francis and J. A. White. *Facility Layout and Location: An Analytical Approach.* Prentice–Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.

[31] Martin Gardner. Mathematische Spielereien: Wie man über einen Wald – am besten einen schachbrettartig angelegten Nadelwald – ein Netz auswirft, um abstrakte Bäume zu fangen. *Spektrum der Wissenschaft*, S. 4–10, August 1986.

[32] Carl Friedrich Gauß. *Werke. Zehnter Band. Zwei Abteilungen in einem Band. X1: Kleinere Veröffentlichungen, X2: Abhandlungen über Gauss' wissenschaftliche Tätigkeit auf den Gebieten der reinen Mathematik und Mechanik.* Georg Olms Verlag, Hildesheim, New York, 1973.

[33] Joseph Diaz Gergonne (?). Solutions purement géometriques des problèmes de minimis proposés aux pages 196, 232 et 292 de ce volume, et de divers autres problémes analogues; Par un Abonné. *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 1:375–384, 1811.

[34] Shay Gueron and Ran Tessler. The Fermat-Steiner problem. *The American Mathematical Monthly*, 109:443–451, May 2002.

[35] G. H. Hardy. *A Mathematician's Apology, With a foreword by C. P. Snow.* Cambridge University Press, Cambridge, 1969.

[36] Ross Honsberger. *Mathematische Edelsteine der elementaren Kombinatorik, Zahlentheorie und Geometrie. [übers. Jens Schwaiger].* Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig / Wiesbaden, 1981.

[37] Walter Isard. The general theory of location and space-economy. *Quarterly Journal of Economics*, 63(4):476–506, November 1949.

[38] Walter Isard. *History of Regional Science and the Regional Science Association International. The Beginnings and Early History.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2003.

[39] Walter Isard, Iwan J. Azis, Matthew P. Drennan, Ronald E. Miller, Sidney Saltzman, and Erik Thorbecke. *Methods of Interregional and Regional Analysis.* Regional Science Studies Series. Ashgate, Aldershot · Brookfield USA · Singapore · Sydney, 1998.

[40] H. W. Kuhn. Locational problems and mathematical programming. In András Prekopa, editor, *Colloquium on Applications of Mathematics to Economics, Budapest, 1963*, pages 235–242, Budapest, 1963. Akadémiai Kiadó, Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences.

[41] H. W. Kuhn. On a pair of dual nonlinear programs. Chapter III of [1], pages 37–54, 1967.

[42] H. W. Kuhn. A note on Fermat's problem. *Mathematical Programming*, 4:98–107, 1973.

[43] H. W. Kuhn and R. E. Kuenne. An efficient algorithm for the numerical solution of the generalized Weber problem in spatial economics. *J. of Regional Science*, 4:21–33, 1962.

[44] Thomas S. Kuhn. *The Structure of Scientific Revolutions*. International Encyclopedia of Unified Science, Vol. II, No. 2. The University of Chicago Press, Chicago & London, The University of Toronto Press, Toronto, 1962.

[45] Thomas S. Kuhn. *Die Struktur wissenschaftlicher Revolutionen*. suhrkamp taschenbuch wissenschaft, Band 25. Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main, 1976.

[46] W. Launhardt. Die Bestimmung des zweckmäßigsten Standortes einer gewerblichen Anlage. *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*, 26(3):Sp. 105–116, März 1882.

[47] Wilhelm Launhardt. *Mathematische Begründung der Volkswirtschaftslehre*. Scientia Verlag, Aalen, 1963.

[48] W. I. Lenin. *Materialismus und Empiriokritizismus. Kritische Bemerkungen über eine reaktionäre Philosophie*. Verlag für fremdsprachige Literatur, Moskau, 1947.

[49] Lhuilier. Analise d'une solution du premier des deux problèmes proposés à page 196 de ce volume. *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 1:297–301, 1811.

[50] Gerhard Maier. Schnellstraße zum Ruhm. Der Siegeszug der Gleichungen führt die Wirtschaftswissenschaften ins Abseits und zerstört die Berufschancen der Volks- und Betriebswirte. *Wirtschaftswoche*, (Nr. 7):67–68, 7. 2. 1992.

[51] Karl Marx. *Das Kapital. Kritik der politischen Ökonomie. Erster Band (= Band 23 der Werke von Marx und Engels). Buch I: Der Produktionsprozeß des Kapitals. Nach der vierten, von Friedrich Engels durchgesehenen und herausgegebenen Auflage, Hamburg, Verlag von Otto Meissner, 1890*. Dietz Verlag, Berlin, 1962.

[52] Karl Marx. *Mathematische Manuskripte. Herausgegeben, eingeleitet und kommentiert von Wolfgang Endemann*. Scriptor-Taschenbücher Sozialwissenschaften, S 10: Beiträge zur Theorie der Gesellschaft. Scriptor-Verlag, Kronberg, Ts., 1974.

[53] William Miehle. Link–length minimization in networks. *Operations Research*, 6(2):232–243, March–April 1958.

[54] Stefan Nickel and Justo Puerto. *Location Theory. A Unified Approach*. Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2005.

[55] Johannes C. C. Nitsche. *Vorlesungen über Minimalflächen*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 199. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1975.

[56] Helmut Oechslein. *Beiträge zur Berechnung von Gleichgewichtslösungen in nichtlinearen monotonen Netzwerkproblemen bei Entartung und schlechter Kondition sowie ihre Anwendung auf räumliche Interaktionsmodelle.* Dissertation, Universität Hamburg, Institut für Angewandte Mathematik, Dezember 1988.

[57] G. P. Solution des deux problèmes de trigonométrie sphérique énoncés à la pag. 64 du présent volume et de divers autres problèmes analogues. *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 20:137–151, 1829.

[58] Maximilian Pinl unter Mitarbeit von Auguste Dick. Kollegen in einer dunklen Zeit, Schluß. *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 75:166–208, 1974.

[59] Georg Pólya. *Mathematik und plausibles Schließen. Band 1. Induktion und Analogie in der Mathematik. Ins Deutsche übersetzt von Lulu Bechtoldsheim.* Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1962.

[60] Christoph Pöppe. Grenzen der Optimierbarkeit (Monatsspektrum). *Spektrum der Wissenschaft*, S. 26,29, November 1991.

[61] Querret. Autre démonstration du même théorême. *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 13:330–332, 1822.

[62] Querret. Note sur les centres de moyennes distances. *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 14:378–379, 1823.

[63] W. C. Reynolds and H. M. Satterlee. Liquid propellant behaviour at low and zero g. In H. N. Abramson, editor, *The Dynamic Behaviour of Liquids in Moving Containers, NASA Sp – 106.* Government Printing Office, Washington, D. C., 1966.

[64] P. Schreiber. Zur Geschichte des sogenannten Steiner-Weber-Problems. *Wissenschaftliche Zeitschrift der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald, Mathematisch-naturwissenschaftliche Reihe*, 35(3):53–58, 1986.

[65] Helmuth Schwarz. Modellstudie über den Einfluß des Hochtemperaturreaktors auf die Standortorientierung der Großchemie. Berichte der KFA Jülich, Jül–1184, April 1975.

[66] Thomas Simpson. *The Doctrine And Application Of Fluxions. Containing (besides what is common on the subject) a Number of New Improvements in the Theory. And The Solution of a Variety of New, and very Interesting, Problems in different Branches of the Mathematicks. By Thomas Simpson, F.R.S.* Printed for J. Nourse, opposite Catherine-street in the Strand, London, 1750.

[67] `http://de.wikipedia.org/wiki/Standorttheorie`, 27. Februar 2008.

[68] J. Steiner. Aufgaben und Lehrsätze, erstere aufzulösen, letztere zu beweisen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 13:361–364, 1835.

[69] Hugo Steinhaus. *Sto zadań.* Państwowe wydawnictwo naukowe, Warszawa, 1958.

[70] Hugo Steinhaus. *Kaleidoskop der Mathematik.* Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1959.

[71] Г. Штейнгауз. Сто задач. Перевод с польского Г. Ф. Боярской и Б. В. Боярского, Издание третье, стереотипное. «Наука», Москва, 1982.

[72] Ch. Sturm. Démonstration d'un théorème de géométrié, énoncé à la page 248 du précédent volume. *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 14:13–16, 1823.

[73] Rudolf Sturm. Ueber den Punkt kleinster Entfernungssumme von gegebenen Punkten. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 97(1):49–61, 1884.

[74] Rudolf Sturm. Existenzbeweis des Punktes kleinster Entfernungssumme von vier gegebenen Punkten. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 143:241–249, 1913.

[75] W. H. Talbot. Démonstration d'un théorème de géométrié, énoncé à la page 248 du présent volume. *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 13:329–330, 1822.

[76] Tédenat. Solution du premier des deux problèmes proposés à la page 196 de ce volume. *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 1:285–291, 1811.

[77] Johann Heinrich von Thünen. *Der isolirte Staat in Beziehung auf Landwirthschaft und Nationalökonomie, oder Untersuchungen über den Einfluß, den die Getreidepreise, der Reichthum des Bodens und die Abgaben auf den Ackerbau ausüben.* Friedrich Perthes, Hamburg, 1826.

[78] H. Voß and Ulrich Eckhardt. Linear convergence of generalized Weiszfeld's method. *Computing*, 25:243–251, 1980.

[79] Alfred Weber. *Ueber den Standort der Industrien. Erster Teil: Reine Theorie des Standorts. Mit einem mathematischen Anhang von Georg Pick.* Verlag von J. C. B. Mohr (Paul Siebeck), Tübingen, 1909.

[80] `http://de.wikipedia.org/wiki/Alfred_Weber`, 14. November 2007.

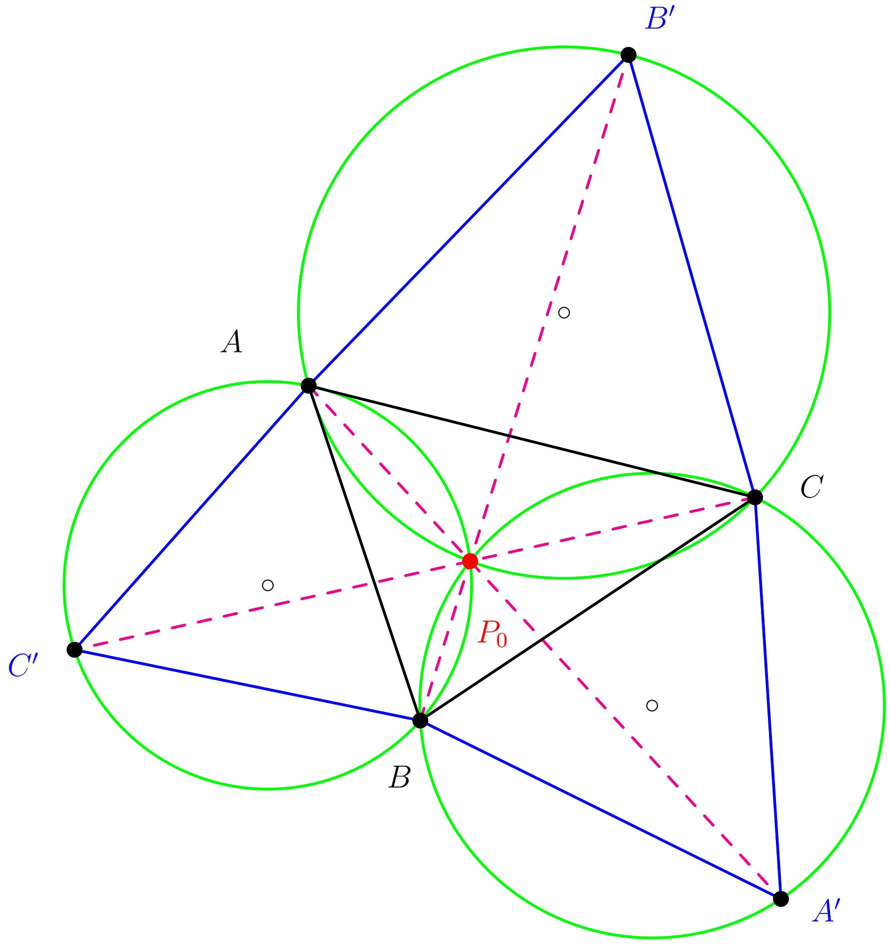

Abbildung 5: Geometrische Lösung der Fermatschen Aufgabe.

Die drei gleichseitigen Dreiecke $A'BC$, $AB'C$ und ABC' über den Seiten des Standortdreiecks ABC (schwarz) sind blau markiert, die Umkreise grün, der Torricelli-Punkt P_0 rot. Die drei Simpson-Linien sind violett eingezeichnet.

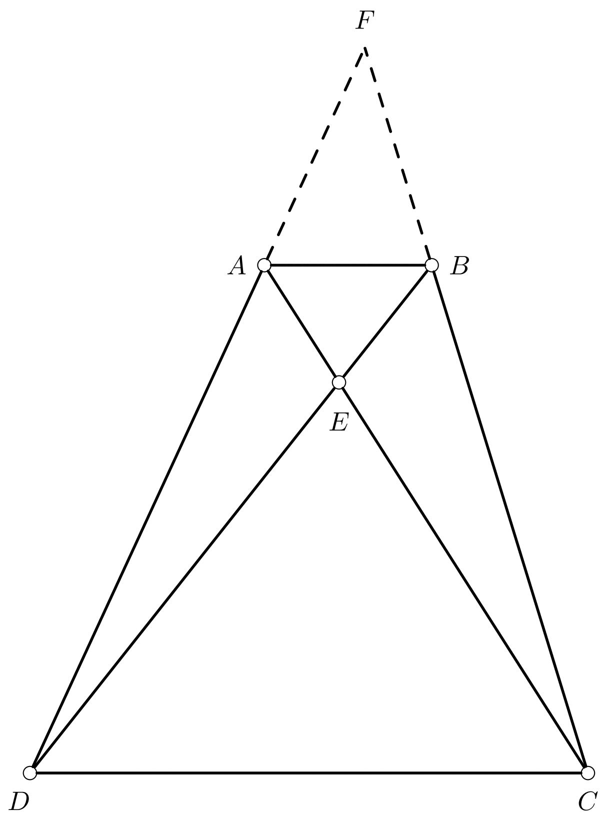

Abbildung 6: Das „Paradoxon“ von Schumacher.

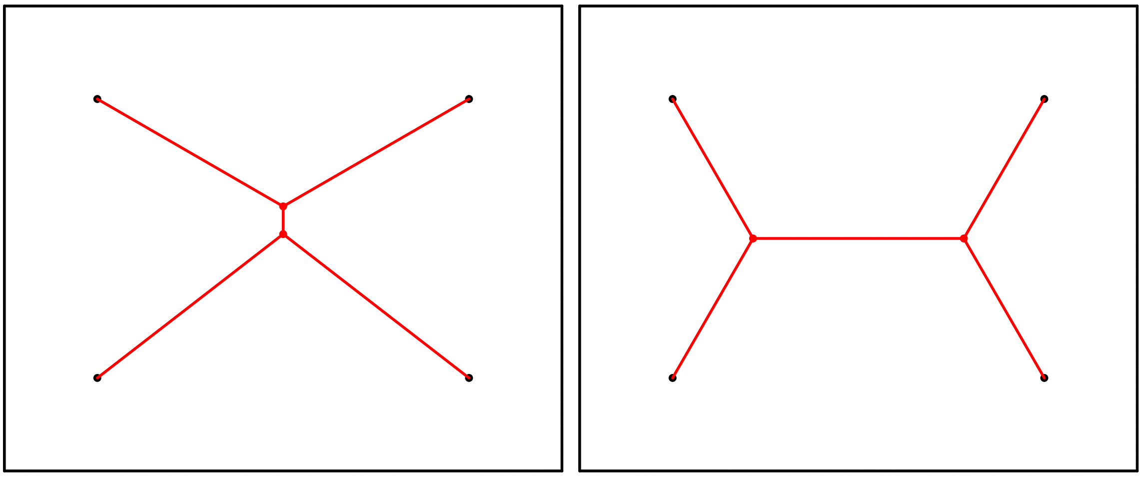

Abbildung 7: Die Aufgabe von Gauß für ein Rechteck.

Bei der Konfiguration im linken Bild ergibt sich eine Gesamtweglänge von 9.20, im rechten Bild eine Länge von 9.93.

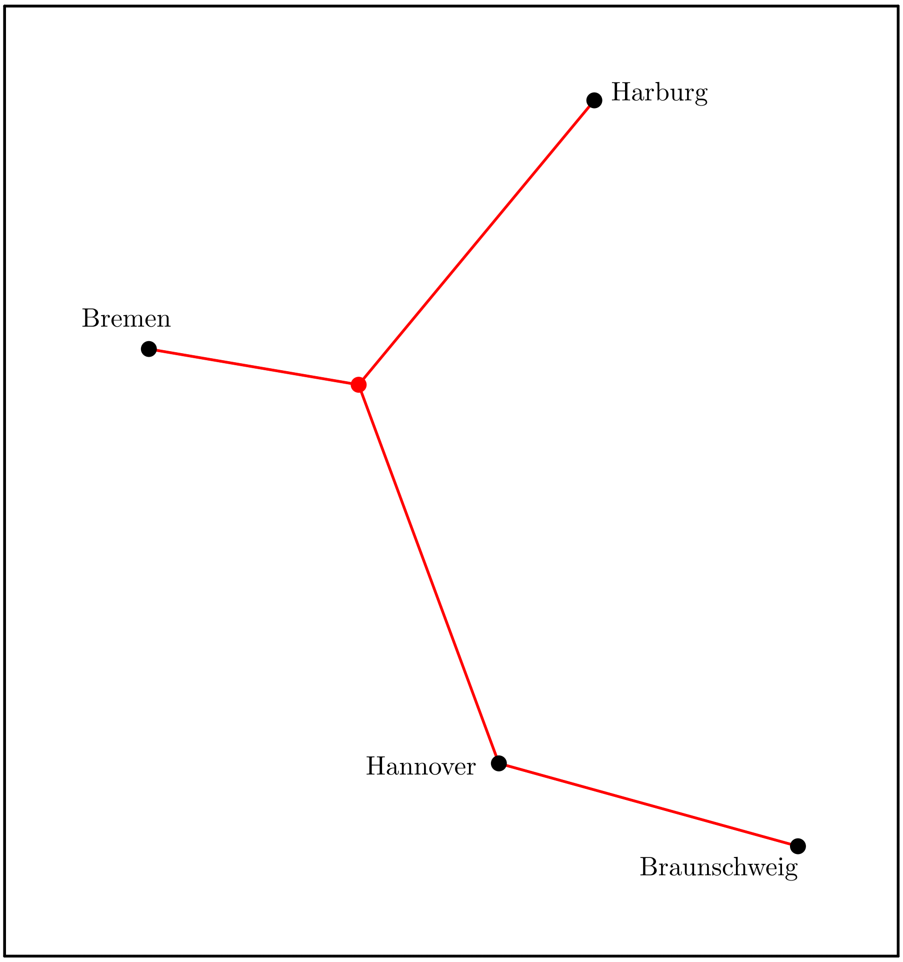

Abbildung 8: Die Aufgabe von Gauß.

Lösung nach Gauß
232.04 km

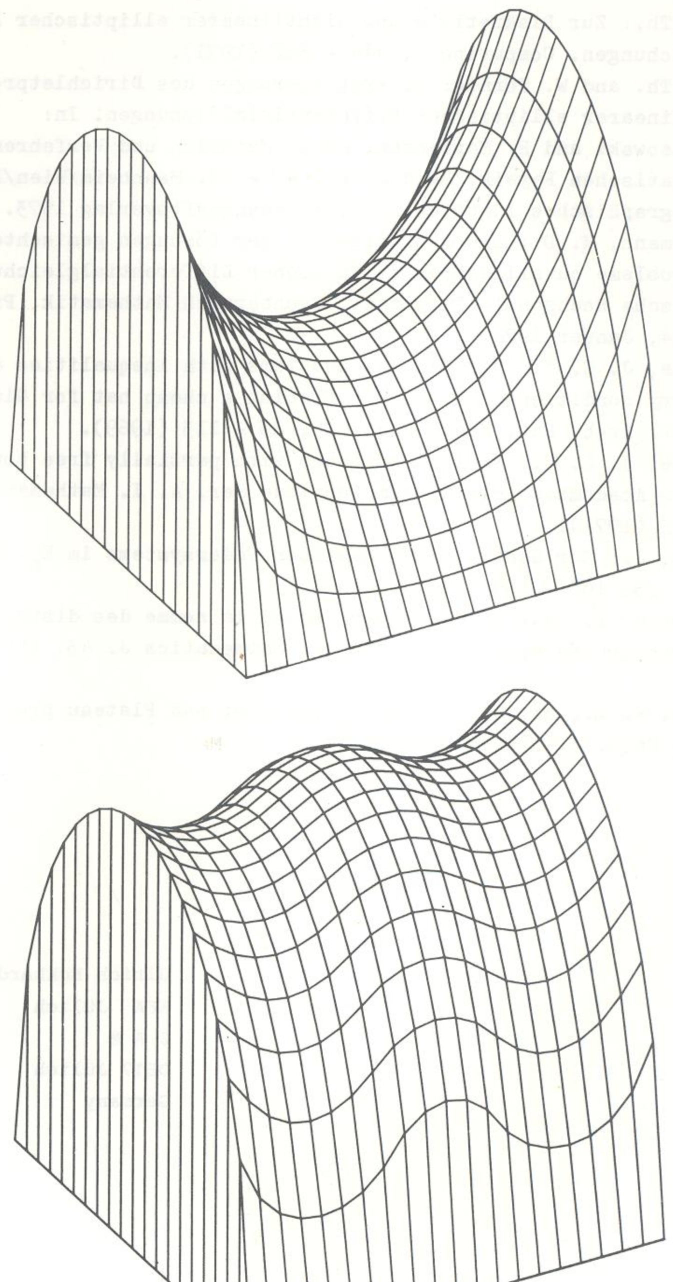

Abbildung 9: Minimalflächen.

Die obere Minimalfläche ist frei über einen Bügel gespannt. Bei der unteren ist eine Kugel als Hindernis eingeführt. Es entsteht so eine „freie Randwertaufgabe“ (nach [22]).

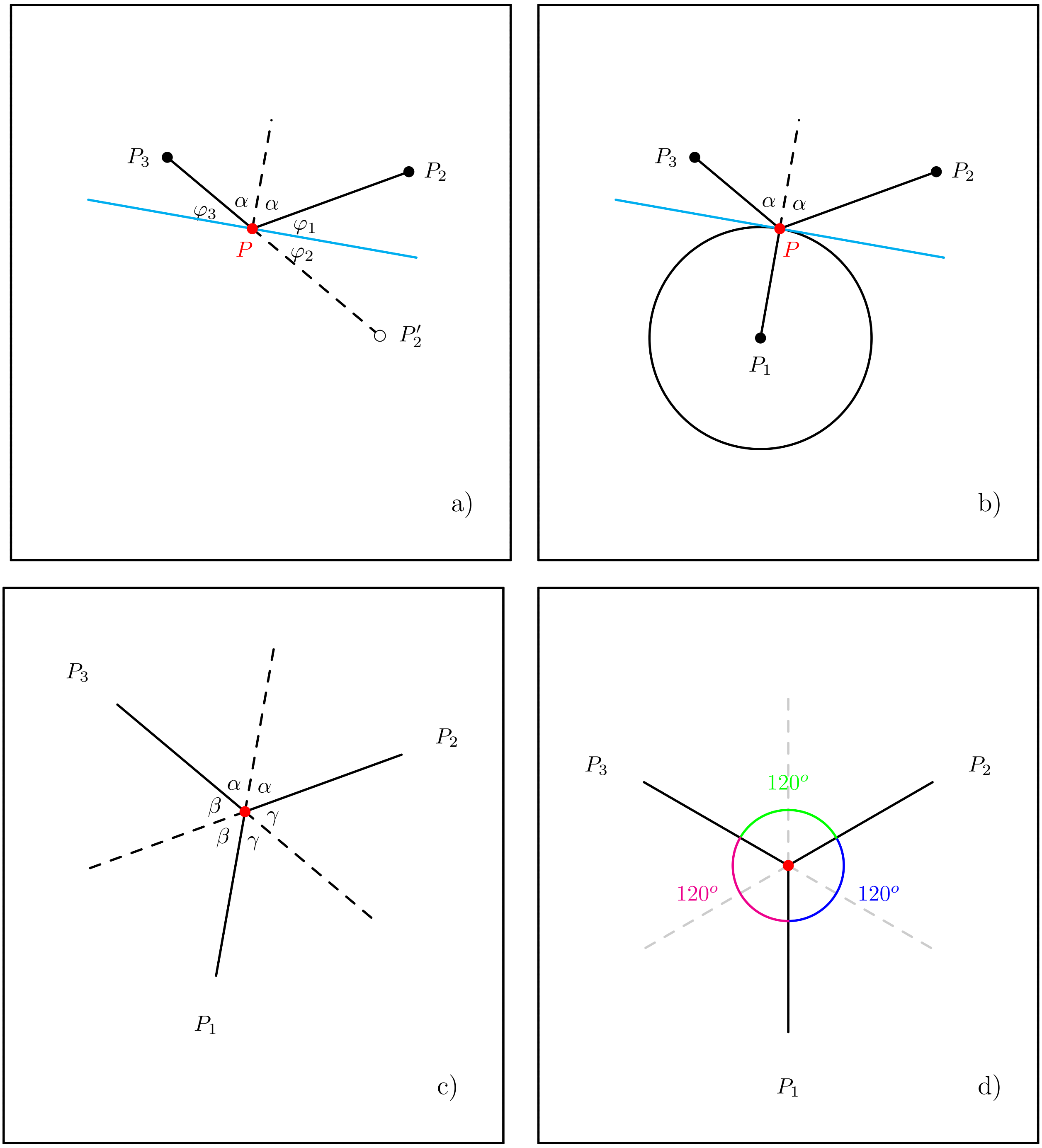

Abbildung 10: Die Winkelbedingung.

a) Reflexion an einer Geraden.
b) Reflexion an einem Kreis.
c) Die Winkel α, β und γ sind gleich.
d) Die Winkel vom Torricelli-Punkt zu den gegebenen Punkten der Fermatschen Aufgabe sind gleich 120^o.

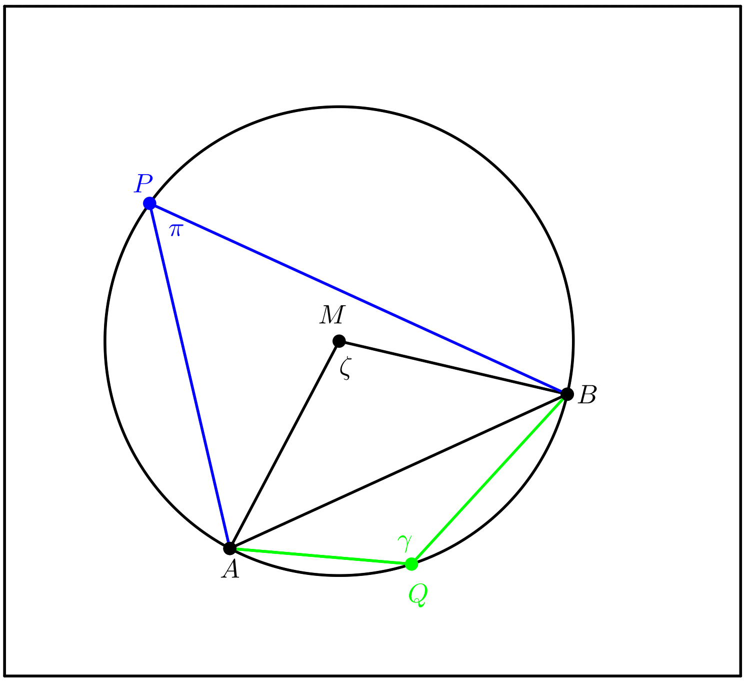

Abbildung 11: Der Satz vom Peripheriewinkel.

π ist der Peripheriewinkel
ζ ist der Zentriwinkel
γ ist der Gegenwinkel
Es ist $\zeta = 2\pi$ und $\gamma + \pi = 180^o$