π, die Bibel und die Cheopspyramide

Ulrich Eckhardt
Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik
— Optimierung und Approximation —
Bundesstraße 55
20 146 Hamburg
E–Mail: Eckhardt@math.uni-hamburg.de

Inhaltsverzeichnis

Vortrag am 24. November 2006 im Rahmen der Ringvorlesung „Spektrum der Wissenschaftsgeschichte“ an der Universität Hamburg.

1 Einleitung

Ein Kreis ist eine Figur, die durch ihren Radius r (und natürlich durch ihren Mittelpunkt) eindeutig festgelegt ist als die Menge aller der Punkte, die von dem Mittelpunkt den Abstand r haben. Häufig benutzt man zur Festlegung eines Kreises seinen Durchmesser $d = 2 \cdot r$. Wir haben alle in der Schule gelernt, daß für jeden Kreis gilt

$$\text{Umfang} = 2\pi r = \pi d,$$

wobei π eine Zahl bedeutet, die (näherungsweise) den Wert

$$\pi = 3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 41971\ \ldots$$

hat. Weiterhin wissen wir aus der Schule, daß der Flächeninhalt eines Kreises gegeben ist durch die Formel

$$\text{Flächeninhalt} = \pi r^2 = \frac{\pi}{4} d^2.$$

Auch hier tritt wieder die gleiche Zahl π auf.

Wir sind kulturell überformt („verbildet“ oder „mißgebildet“) – etwa durch unsere Lehrer, das heißt, wir haben das Staunen verlernt. Ein Ziel dieses Vortrags wird sein, in Ihnen Zweifel an diesem Schulwissen zu wecken. Wie es Sokrates in Platons *Menon* vorführt, muß man, um zum Wissen zu gelangen, erst einmal einsehen, daß man nichts weiß. Sokrates faßt das Ergebnis seines „Tierversuchs“ an einem Sklaven wie folgt zusammen [41, I, S. 433]:

> Zuerst wußte er zwar nicht, welches die Seite eines achtfußigen Vierecks sei, wie er das auch jetzt noch nicht weiß. Aber damals glaubte er doch sie zu wissen und antwortete dreist fort als ein Wissender, ohne sich im mindesten in Verlegenheit zu sehen. Nun aber sieht er sich bereits in Verlegenheit, und wie er es nicht weiß, so bildet er sich auch nicht mehr ein, es zu wissen.

Ich stelle also erst einmal einige „naive“ Fragen:

- Wieso ist π, das Verhältnis von Umfang zu Durchmesser, unabhängig von der Größe eines Kreises?
- Warum taucht beim Umfang und bei der Fläche die gleiche Konstante π auf?
- Warum ist die Zahl π für alle Zeiten, Orte, Kulturen ... gleich?

Zu letzterer Frage sei der große Mathematiker, Logiker und Philosoph Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848–1925) zitiert. Er schreibt in einem ähnlichen Zusammenhang [19, S. 23] (leicht abgewandelt von mir):

> ... und daß ein Astronom sich scheut, seine Schlüsse auf längst vergangene Zeiten zu erstrecken, damit man ihm nicht einwende: »Du rechnest da mit der Zahl π; aber die Zahlvorstellung hat ja eine Entwickelung, eine Geschichte! Man kann zweifeln, ob sie damals schon so weit war. Woher weißt du, daß in jener Vergangenheit diese Zahl schon den gleichen Wert hatte? Könnten die damals lebenden Wesen nicht $\pi = 4$ gehabt haben, aus dem sich erst durch natürliche Züchtung im Kampf ums Dasein der heutige Wert von π entwickelt hat, der seinerseits vielleicht dazu bestimmt ist, auf

> demselben Wege sich zu $\pi = 3$ fortzubilden?« Est modus in rebus, sunt certi denique fines![1]

Vielleicht sollten wir uns an den Rat aus einem Kriminalroman halten:

> Approach your problem from the right end and begin with the answers. Then one day, perhaps you will find the final question.
>
> The Hermit Clad in Crane Feathers in R. van Gulik's The Chinese Maze Murders.

Bevor wir uns nun der – inzwischen hoffentlich schon ein wenig geheimnisvollen – Zahl π zuwenden, drei Zitate. Zuerst lassen wir eine Frau zu Wort kommen, die Wissenschaftsjournalistin Margret Wertheim [64, S. 7]. Sie schreibt, ich möchte fast sagen, poetisch, über ihre Begegnung mit π:

> Mit zehn Jahren hatte ich in einer Mathematikstunde ein Erlebnis, das ich nur als eine mystische Erfahrung beschreiben kann. Wir behandelten den Kreis, und unser Lehrer gab uns Gelegenheit, das Geheimnis dieser einzigartigen Form selbst zu ergründen: die Zahl π. Fast alles, was es über den Kreis zu sagen gibt, kann man mit Hilfe von π beschreiben, und in meiner kindlichen Naivität hatte ich das Gefühl, gerade ein großes Geheimnis des Universums entschlüsselt zu haben. Wohin ich auch blickte, überall entdeckte ich Kreise, und sie alle ließen sich letztendlich auf diese eine geheimnisvolle Zahl zurückführen. π steckte in der Form der Sonne, des Mondes und der Erde; in Champignons, Sonnenblumen, Orangen und Perlen; in Rädern, Zifferblättern, Tellern und der Wählscheibe des Telefons. π faßte alle diese Dinge zusammen und ging gleichzeitig über sie alle hinaus. Ich war wie verzaubert, als ob jemand einen Schleier gelüftet und mir den Blick geöffnet hätte auf ein wunderbares Reich jenseits der wahrnehmbaren Dinge. Seit diesem Tag möchte ich mehr wissen über die mathematischen Geheimnisse dieser Welt.

Als zweiten Zeugen rufe ich Umberto Eco auf. In seinem Roman *Das Foucaultsche Pendel* schreibt er [13, S. 9]:

> Ich wußte – doch jeder hätte es spüren müssen im Zauber dieses ruhigen Atems –, daß die Periode geregelt wurde durch das Verhältnis der Quadratwurzel der Länge des Fadens zu jener Zahl π, die, irrational für die irdischen Geister, in göttlicher Ratio unweigerlich den Umfang mit dem Durchmesser eines jeden möglichen Kreises verbindet, dergestalt, daß die Zeit dieses Schweifens einer Kugel von einem Pol zum andern das Ergebnis einer geheimen Verschwörung der zeitlosesten aller Maße war – der Einheit des Aufhängepunktes, der Zweiheit einer abstrakten Dimension, der Dreizahl von π, des geheimen Vierecks der Wurzel und der Perfektion des Kreises.

Zum Schluß noch ein Zitat eines Physikers, des Nobelpreisträgers Eugene Paul Wigner (1902–1995). Er schrieb einen Artikel mit dem Titel *The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences*. Der Artikel beginnt mit einer kleinen Geschichte [65]:

> There is a story about two friends, who were classmates in high school, talking about their jobs. One of them became a statistician and was working on population trends.

[1] Es ist ein Maß in den Dingen, es gibt doch feste Grenzen, Horaz, Satiren I, 1, 106.

> He showed a reprint to his former classmate. The reprint started, as usual, with the Gaussian distribution and the statistician explained to his former classmate the meaning of the symbols for the actual population, for the average population, and so on. His classmate was a bit incredulous and was not quite sure whether the statistician was pulling his leg. "How can you know that?" was his query. "And what is this symbol here?" "Oh," said the statistician, "this is pi." "What is that?" "The ratio of the circumference of the circle to its diameter." "Well, now you are pushing your joke too far," said the classmate, "surely the population has nothing to do with the circumference of the circle."

Was Wigner hier beschreibt, ist die überraschende Tatsache, daß π in der Mathematik unerwartet immer wieder an den unterschiedlichsten Stellen auftritt. Hierbei möchte ich mich mit dem Zitat begnügen, dies ist wahrhaftig „ein weites Feld".

2 Was ist eine wissenschaftliche Aussage?

Sowohl auf dem Gebiete der Mathematik – speziell wenn es um π geht – als auch auf dem Gebiete der Ägyptologie gibt es ein breites Spektrum von Veröffentlichungen, welches sich von „offiziellen" wissenschaftlichen Publikationen in renommierten Fachzeitschriften bis hin zu Büchern und Artikeln erstreckt, die offenbar wenig Anspruch auf Seriosität erheben.

Es gibt in der Wissenschaft gewisse „Spielregeln", an die man sich halten sollte, wenn man sich wissenschaftlich äußert. Diese Regeln haben sich bewährt, das spricht für sie. Ihre Einhaltung ist nicht zwingend, man kann sie als heuristische Prinzipien verstehen. Man kann die Regeln natürlich verletzen, und zahlreiche wertvolle Beiträge der Wissenschaft verdanken ihre Existenz Regelverletzungen, jedoch darf man nicht erwarten, daß derlei von der Wissenschaft freudig aufgenommen wird. Es ist ähnlich wie beim Schachspiel. Wenn man darauf besteht, daß der Springer auch einmal quer über das ganze Feld galoppieren darf, dann ist dies natürlich möglich, nur sollte man vor Beginn des Spiels ankündigen, daß man derlei vorhat – und man sollte das Spiel dann nicht „Schach" nennen.

Ich gebe hier nur zwei Regeln an. Die erste geht auf Wilhelm von Ockham (oder William von Occam; 1286 (?) – 1347 (1349 ?)) zurück. Sie besagt, daß von zwei Hypothesen gleicher Erklärungskraft diejenige vorgezogen werden sollte, die die einfachere ist. Man formuliert dieses Prinzip gern in der Form eines Ausspruchs, der Ockham zugeschrieben wird, aber sicher nicht von ihm stammt: *entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem*, das heißt, neue Begriffe, Parameter oder Hilfsgrößen sollten nur dann eingeführt werden, wenn dies unbedingt notwendig erscheint. Dies hat nichts mit der „Wahrheit" einer Hypothese zu tun, es ist einfach zweckmäßiger, Hypothesengebäude spartanisch auszustatten, man vermeidet damit insbesondere unübersichtliche Folgerungen, die nur noch schwer kontrollierbar bleiben.

Eine weitere Regel bei der wissenschaftlichen Forschung geht auf Karl Popper zurück. Nach seiner Definition gehört zu einer wissenschaftlichen Theorie unbedingt deren *Falsifizierbarkeit*, das heißt, es muß jeweils mindestens ein *experimentum crucis* geben, dessen negativer Ausgang die Theorie als falsch erweist. Für die Einsteinsche Relativitätstheorie war dies etwa die Messung der Lichtablenkung im Schwerefeld der Sonne. Für die Psychologie ist derartiges nicht denkbar. Dieses Säurebad der Falsifizierbarkeit ist für Popper entscheidend, und er schreibt darüber [43, S. 113]:

> Aber es ist scharf genug, um eine Unterscheidung zu machen zwischen vielen physikalischen Theorien einerseits und metaphysischen Theorien, wie zum Beispiel der Psychonanalyse und dem Marxismus (in seiner gegenwärtigen Form) andererseits.

Daneben gibt es noch eine ganze Reihe weiterer Kriterien, vermittels derer man recht scharf wissenschaftliche Aussagen charakterisieren kann. Eines davon ist die *Konsistenz* wissenschaftlicherr Aussagen. Wir hatten an dem Zitat von Wigner gesehen, daß π an zahlreichen unerwarteten Stellen in der Mathematik auftritt, zum Beispiel in der Versicherungsmathematik. Wenn jemand aus irgendwelchen Gründen den oben angegebenen Wert von π für falsch hält und einen anderen Vorschlag macht, dann müßte er die Mathematik fast völlig neu schaffen. Diesen Aufwand scheut man in der Mathematik, sofern nicht ausgezeichnete Gründe vorliegen (es ist genau das Gegenteil der Fall). Man kann andererseits davon ausgehen, daß die Versicherungen einem solchen Vorschlag zur Änderung von π unverzüglich folgen würden, wenn dadurch ihr Gewinn vergrößert würde. Das heißt, wenn jemand einen solchen Vorschlag machen möchte, dann sollte er versuchen, eine Versicherung zu überzeugen und nicht seine Zeit mit den Mathematikern verschwenden.

Ein weiteres untrügliches Kennzeichen nicht seriöser Beiträge ist deren Sprache. Eine polemisierende Sprache, eine emotionale Argumentation deuten auf Schwäche der Argumente hin. Typisch ist auch eine Polemik gegen die Universitätswissenschaft oder gegen Professoren. Man findet derlei bei Friedrich Engels und Wladimir Iljitsch Lenin genauso wie bei modernen Weltverbesserern.

Es gibt zahlreiche „Amateurmathematiker“, die mathematische Institute belagern mit „Beweisen“, die zeigen sollen, daß ein Kreis quadrierbar, das heißt allein mit Hilfe von Zirkel und Lineal in ein flächengleiches Quadrat überführbar sei. Nicht ganz äquivalent ist die Aussage, daß π eine rationale Zahl sei. Man hat so seine liebe Not mit solchen Personen. Die „Entdeckung“ die dann eloquent und unter Zuhilfenahme komplizierter Diagramme und unverständlicher Texte vorgetragen wird, beruht immer auf einer Verletzung der „Spielregeln“. Hat man den Punkt gefunden, an dem vom Pfad der Mathematik abgewichen wird, dann wird der Verfasser, ein neues, ungleich komplizierteres Diagramm entwickeln, und in diesem Wettstreit kann man nur verlieren! Underwood Dudley hat einen launigen Artikel über solche Begegnungen, die jeder Mathematiker kennt, geschrieben [12].

Ein Gebiet, auf dem sich ebenfalls zahlreiche Amateure tummeln, ist die Ägyptologie, wobei die ägyptischen Pyramiden und unter ihnen die Cheopspyramide eine herausragende Rolle spielen. Ich glaube, daß das Gewicht aller Bücher, die über die Cheopspyramide gechrieben wurden, deren Gewicht weit übersteigt! Bekannt sind zum Beispiel die zahlreichen Publikationen von Erich von Däniken, speziell natürlich auch ein Buch über die Cheopspyramide [10]. In diesem Buch wird insbesondere die Hypothese vertreten, die Cheopspyramide wäre gar nicht von Cheops gebaut worden, sondern Cheops hätte die Pyramide bereits vorgefunden. Bei von Däniken sind es natürlich die Atlanter, die die Pyramide erbauten und in ihr die Summe alles ihres Wissens verwahrten. Es wird in diesem Zusammenhang auch der biblische Henoch genannt, der Sohn von Kain (Gen 4,17) und Vater von Methusalem (Gen 5,21), der ein Alter von 365 Jahren erreichte. Diese Tatsache – die Koinzidenz der Jahre des Henoch mit der Anzahl der Tage des Jahres – prädestinierte ihn für zahlreiche mystische Deutungen, hinzu kam, daß er nicht einfach starb, sondern von Gott „hinweggenommen“ wurde und nicht mehr gesehen ward (Gen 5,24). Es gibt zum Beispiel auch unter den Qumran-Schriften Henoch-Texte [3, S. 96ff], also ist genügend Spielraum für allerlei Theorien vorhanden – sofern man nicht gleich Henoch – sein Verschwinden deutet darauf hin – mit Außerirdischen in Verbindung bringen möchte.

Eines der Indizien für die genannte Hypothese ist, daß Cheops selbst in seinen Inschriften sich niemals auf die Pyramide bezogen hat, stattdessen erwähnt er vergleichsweise belanglose Restaurierungen und Neubauten von Tempeln. Nun hatte Howard Vyse in seiner Kampagne 1836/37 in den sogenannten Entlastungskammern der Cheopspyramide Inschriften mit Cheops' Namen gefunden. Von verschiedenen „Nichtwissenschaftlern“ wurde dann eben schlichtweg behauptet, diese Inschriften wären Fälschungen.

Wir haben hier zwei typische Verstöße gegen die beiden genannten Prinzipien. Durch die Hypothese „Atlanter“ (beziehungsweise „Henoch“ oder „Raumfahrer“) werden zahlreiche neue unbekannte Parameter eingeführt, die allesamt nicht kontrollierbar sind und der Hypothese eine Geschmeidigkeit geben, die sie gegen jeden ernsthaften Widerlegungsversuch resistent macht. Man kann diese hypothetischen Atlanter nach Belieben mit überlegenem Wissen, höchstenwickelter Technik, mit Motiven und Zielen ausstatten. Die Antlanterhypothese ist aus dem gleichen Grunde auch nicht falsifizierbar. Das gleiche gilt für Verschwörungstheorien – hier die Fälschungstheorie – die ebenfalls grundsätzlich nicht falsifizierbar sind. Ein schönes Beispiel einer solchen Theorie, die sich aus einem Journalistenspaß zu einer tödlichen Bedrohung entwickelt, ist Gegenstand des erwähnten Buches von Umberto Eco [13]. Diese Überlegungen haben natürlich nichts mit dem Wahrheitsgehalt der Theorien von Herrn von Däniken zu tun, es ist nur so, daß auf diesem unsicheren Boden Wissenschaft im beschriebenen Sinne nicht mehr betreibbar ist. Gegenüber den fulminanten ad-hoc-Hypothesen und den faszinierenden Kombinationen von Fakten, Überlieferungen, Mythen und eben auch wissenschaftlichen Erkenntnissen ist die nüchterne Aussage eines Wissenschaftlers „wir wissen es nicht“ natürlich recht farblos.

Überhaupt haben wir es mit der Geschichte sehr schwer. Als Folge des Entropiesatzes – was in der Geschichte einmal verloren ist, bleibt verloren – gibt es notwendigerweise eine Unzahl von Fakten, die wir nicht wissen können oder aber falsch interpretieren. Ich möchte Sie bitten, gemeinsam mit mir das Exposé einer kleinen Science-Fiction-Geschichte zu entwerfen. Wir stellen uns vor, die Menshheit habe sich selbst ausgerottet, auf der Erde gibt es nach einigen Jahrhunderten oder auch Jahrtausenden kaum noch Spuren menschlicher Betätigung. Da landet ein Forschungsschiff mit Außerirdischen. Diese haben nicht viel Zeit, einige Wissenschaftler, die zufällig an Bord sind, beginnen mit Ausgrabungen. Die Ausbeute ist dürftig:

A. Ein Mathematiklehrbuch aus der Zeit, da in den Schulen noch die „Mengelehre“ grassierte. Das Buch ist stark beschädigt. Auf einigen Seiten sind noch Reste der Seitennumerierung erkennbar.

B. Reste eines technischen Nachschlagewerks, in dem die gebräuchlichen Maße erklärt sind. Man findet in ihm einige wichtige Formeln und den Wert von π auf vier Dezimalstellen.

C. Die Reste eines Verkehrsschildes. Auf ihm kann man gerade noch die Aufschrift „20 km“ entziffern (Tatsächlich findet man auf älteren Verkehrsschildern noch eine Entfernungsangabe anstelle einer Geschwindigkeitsangabe, moderne Verkehrsschilder begnügen sich einfach mit der Angabe einer Zahl).

D. Ein Tamagotchi, das allerdings durch Hitzeeinwirkung völlig deformiert ist.

E. Ein Notizblock im US-amerikanischen ARCH-Format.

Nachdem diese Objekte geborgen sind, befassen sich die Wissenschaftler der Außerirdischen intensiv damit. Ein Student X schreibt eine umfangreiche Dissertation über das Objekt A. Er kommt darin zu dem Schluß, daß die Bewohner der Erde sich auf einem recht primitiven Niveau der Zivilisation befunden haben müssen. Sie hätten keinen präzisen Zahlbegriff besessen, größere Zahlen seien ihnen unbekannt gewesen. Für den Umgang mit kleineren Zahlen hätten sie sich geometrischer Objekte veschiedener Formen, Farben und Größen bedient. Der bekannte Professor Y schreibt eine gelehrte Abhandlung über das Fundobjekt B. Darin legt er dar, daß auf der Erde zwei verschiedene Zivilisationen existierten, eine Sklavenzivilisation und eine Herrenzivilisation. Während die Sklaven sich auf der beschränkten Zivilisationsstufe befanden, die in X's Dissertation beschrieben worden sei, hätten die Herren sehr wohl mit Zahlen und sogar mit abstrakten Begriffen umgehen können, sie hätten sogar eine grobe Vorstellung von π gehabt. Er versäumt nicht, darauf hinzuweisen, daß dem jungen Herrn X offenbar die Seitenzahlen in Objekt A entgangen seien, die doch einen deutlichen Hinweis darauf lieferten, daß neben den primitiven Nutzern des Buchs auch Wesen existieren mußten, für die diese Seitennummern gedacht waren. Ein dritter Gelehrter, der Wissenschaftler Z, kommt zu dem Ergebnis, die Herrenzivilisation habe komplexe Religionsvorstellungen gehabt. So vermittle Fundobjekt C nach Ausweis von Objekt B, welches der gelehrte Kollege Y so eingehend analysiert habe, eine Entfernunginformation. Offenbar habe es die Bedeutung, daß in einem Umkreis von 20 km um die Fundstelle ein heiliger Bezirk gewesen sei. Z führt weiter aus, daß Objekt D offenbar rituelle Bedeutung besitze. Eine genaue Analyse habe nämlich ergeben, daß es im Inneren bemerkenswert regelmäßige Strukturen aufweise. Da aber kein vernünftiger Gebrauch des Objekts denkbar sei, müsse es sich um einen Kultgegenstand handeln. Auf Objekt E werde ich noch zurückkommen.

Wir sollten uns immer vor Augen halten, daß wir uns bei der Beschäftigung mit der altägyptischen Geschichte in der Situation der drei außerirdischen Wissenschaftler befinden. Da wir nur sehr unvollkommen über den Alltag und die Vorstellungswelt der Bewohner Altägyptens informiert sind, besteht ständig die Gefahr gründlichen Mißverstehens.

3 Der Schreiber Ahmose

Vor etwa 3 500 Jahren legte ein ägyptischer Schreiber Rohrpinsel und Tuschegefäße zurecht. Er breitete eine Papyrusrolle aus und begann, sie zu beschreiben. Die Papyrusrolle ist in „hieratischer“ Schrift beschrieben, das ist die zur Hieroglyphenschrift gehörige Schreibschrift, die später durch die „demiotische“ Schrift abgelöst wurde. Während hieratische Papyri noch einigermaßen lesbar sind, gilt dies für demiotische Schriften nur sehr eingeschränkt. Es war übrigens etwa um die gleiche Zeit, als man hier in Nebra die Himmelsscheibe rituell bestattete [36]. Die Papyrusrolle des Ahmose ist unter dem Namen „Papyrus Rhind“ bekannt. Sie hatte ursprünglich eine Länge von 543 cm und eine Breite von 33 cm. Zwei Teile der Rolle sind unter den Inventarnummern BM10058 und BM 10057 im Britischen Museum zu bewundern, ein kleines Zwischenstück befindet sich in stark fragmentiertem Zustand im Brooklyn Museum in New York (no. 37.1784E). Eine sehr schöne Buchausgabe über diesen Papyrus mit 24 farbigen Bildtafeln wurde von Gay Robins und Charles Shute publiziert [48]. Die Papyrusrolle beginnt mit den Worten:

> Genaues Rechnen. Einführung in die Kenntnis aller existierenden Gegenstände und aller dunklen Geheimnisse. Dieses Buch wurde geschrieben im Jahre 33, im vierten Monat der Überschwemmungsjahreszeit unter seiner Majestät dem König von Ober- und Unterägypten A-user-Re, mit Leben versehen, in Anlehnung an eine ältere Schrift aus der Zeit des Königs von Ober- und Unterägypten Ny-maat-re. Ah-mose hat die Abschrift angefertigt.

Wir kennen also den Namen des Schreibers und wissen auch ziemlich genau das Datum der Entstehung des Papyrus. Der König Auserre (Apophis) war der vorletzte König der 15. oder Hyksos-Dynastie und regierte von 1590–1549 v. Chr.[2]. Demnach dürfte der Schreiber seinen Papyrus im Jahre 1557 v. Chr. abgefaßt haben. Die Hyksos waren Fremdherrscher, sie hatten

[2]Die Regierungsdaten ägyptischer Könige sind nach Beckerath [2] angegeben

allerdings Ägypten nicht militärisch erobert, sie waren, wie man heute zu sagen pflegt, Ägypter mit „Migrationshintergrund“. Man weiß, daß Joseph, dessen Geschichte in Genesis 37–50 oder in der zwölften Sure des Koran oder aber in Thomas Manns Romantrilogie beschrieben wird, ein solcher Einwanderer war, und man kann sich vorstllen, daß er zu der Zeit, von der wir hier sprechen, nach Ägypten kam. Es besteht aber auch die Möglichkeit, daß er, wie Thomas Mann es beschreibt, unter der 18. Dynastie zur Amarna-Zeit in Ägypten lebte.

Der ebenfalls im Papyrus erwähnte Ny-maat-re (Nymare) oder Ammenemês III (1844–1797) war der sechste König der 12. Dynastie. Sein Andenken war noch zur Herodots (490 – 425 (420) v. Chr.) Zeit lebendig, Herodot belegt ihn mit dem Namen Moiris. Er war einer der bedeutendsten Herrscher des Mittleren Reiches. Das Alte und das Mittlere Reich bedeuteten in der Vorstellung der Ägypter die Blüte ägyptischer Macht und ägyptischer Kultur, also die „gute alte Zeit“.

Der Papyrus des Ahmose stellt eine Sammlung von 84 „Aufgaben“ dar. Bei einem Teil dieser Aufgaben handelt es sich um Rechentabellen, die für die tägliche praktische Arbeit des Schreibers unentbehrlich waren. Die sogenannte „Lederrolle“ scheint ebenfalls eine solche Tabellensammlung zu sein, die aus Zweckmäßigkeitgründen auf ein dauerhafteres Material geschrieben wurde [62, S. 34, Figur 5]. Zwei der Aufgaben des Papyrus des Ahmose haben mit dem eigentlichen Text nichts zu tun, sie sind später hinzugefügt worden. Wir wollen uns zwei Aufgaben des Papyrus einmal näher ansehen. Aufgabe 79 hat den folgenden lakonischen Wortlaut (Übersetzung nach Annette Imhausen [29, S. 89–91, 305]):

Häuser	7
Katzen	49
Mäuse	343
Emmer-Ähren	2 301
Hekat (Kornmaße) à 100	16 807
Summe	19 607

Ein Hausinhalt.	
·	2801
2	5602
4	11 204
Summe 19 607	

Zunächst einmal entdeckt man in der linken Spalte eine gewisse Regelmäßigkeit. In der ersten Zeile findet sich die Zahl 7, in der zweiten Zeile die Zahl $49 = 7 \times 7$, in der dritten Zeile $343 = 49 \times 7$. Man würde für die vierte Zeile $2\ 401 = 343 \times 7$ erwarten, in der Tat steht dort aber 2 301. Es erscheint plausibel, daß Ahmose sich hier einfach verschrieben hat, wie dies in dem Papyrus nicht selten vorkommt, denn in der nächsten Zeile steht dann wieder $16\ 807 = 2\ 401 \times 7$. In der Schlußzeile schließlich hat man dann die Summe $19\ 607 = 16\ 807 + 2\ 401 + 343 + 49 + 7$. Was soll diese Aufstellung bedeuten? Es scheint, hier haben wir eine Lösung ohne die dazugehörige Aufgabe. Glücklicherweise findet man eine ähnliche Aufgabe – mit etwas anderen „Personen der Handlung“ – in dem Buch *Liber abbaci* des Leonardo da Pisa (Fibonacci; um 1180? – vielleicht nach 1241) und in einem englischen Kindergedicht des 18. Jahrhunderts:

As I was going to St. Ives,
I met a man with seven wives;
Every wife had seven sacks,
Every sack had seven cats,
Every cat had seven kits.
Kits, cats, sacks, and wives,
How many were going to St. Ives?

Interessant ist, daß die Katzen mehr als drei Jahrtausende überlebt haben – und daß in dem Gedicht der Mann nicht mitgezählt wird! Man kann übrigens – ich meine, typisch britisch – dem kleinen Gedicht auch eine andere Interpretation geben: Offenbar kommt die ganze Karawane von Kätzchen, Katzen, Säcken und Frauen der Erzählerin beziehungsweise dem Erzähler des Gedichts entgegen, da sie oder er ihr ja „begegnet". Also lautet eine richtige Antwort: „eine Person ging nach St. Ives".

Damit könnte man den dazugehörigen Aufgabentext etwa wie folgt rekonstruieren [29, S. 90]):

> Gegeben sind 7 Häuser, in jedem befinden sich 7 Katzen, jede Katze frißt 7 Mäuse, jede Maus frißt 7 Ähren, jede Ähre enthält 7 Getreidekörner. Zu berechnen ist die Summe der genannten Dinge.

Während in der linken Spalte die Lösung explizit berechnet wird, gibt Ahmose in der rechten Spalte einen zweiten Lösungsweg an, der von einigen Autoren als ein Hinweis auf eine verblüffend moderne Art der Behandlung zu sein scheint (man vergleiche jedoch [29, S. 91]). Wir wollen dem aber hier nicht weier nachgehen.

Uns befremdet hierbei, daß wir „Körner, Ähren, Mäuse, Katzen, Häuser" aufaddieren sollen. Wir haben doch in der Schule gelernt, daß man nicht „Äpfel zu Birnen addieren darf". Nun, wir addieren hier lediglich Zahlen, der „Dimensionseinwand" hat mit Mathematik nichts zu tun, eher schon mit Physik. An dieser Aufgabenstellung sehen wir schon die Schwierigkeiten, die der Entzifferung solcher Texte entgegenstehen: Wir kennen nicht den kulturellen Kontext, die Papyrusinschriften sind mit zahlreichen Fehlern durchsetzt, die zum Teil zu heftigen wissenschaftlichen Kontroversen geführt haben, und hinzu kommt, daß Papyrus im Laufe der Zeit – wir sprechen immerhin von Jahrtausenden – zur Versprödung neigt. Häufig fehlt ausgerechnet an einer entscheidenden Stelle ein Papyruskrümel.

Wir betrachten noch eine zweite, lebensnahere „praktische" Aufgabe aus dem Papyrus Rhind. In Aufgabe 56 wird die Steigung einer Pyramide berechnet. Hierbei wird nicht ein Winkel angegeben, sondern – ganz ähnlich wie bei den Gefälleangaben auf Verkehrsschildern – ein Streckenverhältnis, nämlich das Verhältnis der halben Länge der Grundlinie zur Höhe der Pyramide (vgl. Abbildung 1). Mathematisch gesprochen gibt Ahmose anstelle des Steigungswinkels dessen Cotangens an, während auf unseren Verkehrsschildern der Tangens benutzt wird.

Bevor wir uns jedoch dem Text zuwenden, sind einige Bemerkungen zum Verständnis angebracht. Zunächst einmal rechneten die Ägypter nicht mit „echten" Brüchen, sonderen mit sogenannten Stammbrüchen, das heißt, mit Brüchen, deren Zähler 1 ist, also $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\cdots$. Dieser Brauch, den Stammbrüchen eine Sonderrolle zuzuweisen, hat sich über Jahrtausende erhalten. Die Tatsache, daß unsere Sprache ein besonderes Wort für Stammbrüche besitzt, ist ein Erbe, welches wir den Ägyptern verdanken. Für „echte" Brüche wie $\frac{180}{250}$ gab es in der ägyptischen Sprache keine Bezeichnung, das heißt, sie waren für den Ägypter nicht denkbar (Eine Ausnahme bildete der Bruch $\frac{2}{3}$, für den es ein eigenes Zeichen gab). Man stellte alle solchen Brüche als Summen von Stammbrüchen dar. Betrachten wir das genannte Beispiel: Wir können unterstellen, daß der ägyptische Schreiber bei der Division von 180 durch 250 den gemeinsamen Faktor 10 erkannte und dementsprechend „kürzte". Die Aufgabe würde dann lauten, ganze Zahlen $n_1, n_1, \cdots$ zu finden, so daß gilt

$$\frac{18}{25} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \cdots ,$$

oder, in der Denkweise des Ägypters,

$$18 = 25 \cdot \frac{1}{n_1} + 25 \cdot \frac{1}{n_2} + 25 \cdot \frac{1}{n_3} + \cdots .$$

Eine Möglichkeit zur Lösung dieser Aufgabe ist es, zuerst die kleinste Zahl n_1 zu finden, so daß $25 \cdot \frac{1}{n_1}$ gerade noch kleiner als 18 ist. Man sieht sofort, daß dies die Zahl 2 ist. Nun betrachtet man die Aufgabe

$$18 - 25 \cdot \frac{1}{2} = 25 \cdot \frac{1}{n_2} + 25 \cdot \frac{1}{n_3} + \cdots$$

oder, wenn man mit 2 durchmultipliziert,

$$36 - 25 = 11 = 50 \cdot \frac{1}{n_2} + 50 \cdot \frac{1}{n_3} + \cdots .$$

Wenn man noch die Schreibweise $\frac{1}{n} = \overline{n}$ einführt, die bei den Ägyptologen verbreitet ist, erhält man schließlich die Darstellung $180 : 250 = \overline{2} + \overline{5} + \overline{50}$. Es soll noch angemerkt werden, daß im Papyrus kein Pluszeichen steht, die Darstellung des Ergebnisses ist also $\overline{2}\ \overline{5}\ \overline{50}$.

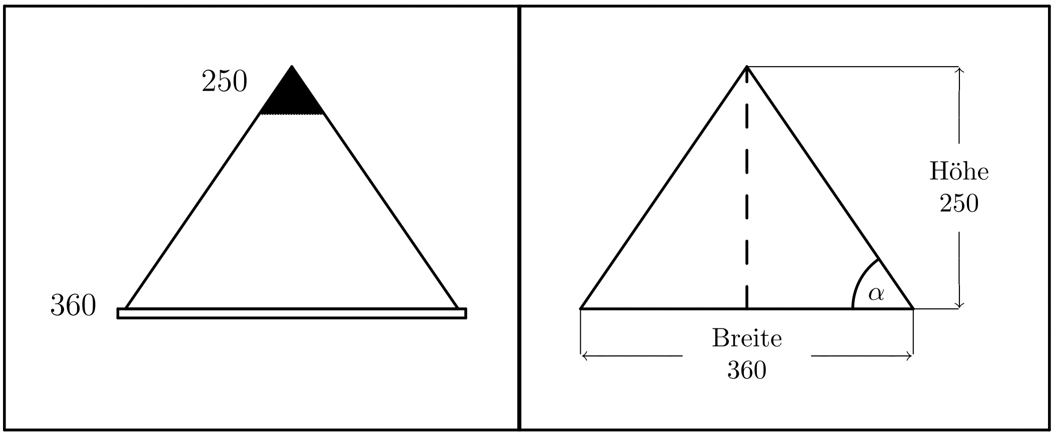

Abbildung 1: Skizze zur Berechnung der Steigung einer Pyramide.

Links nach Ahmose, rechts mit modernen Bemaßungen. Dem „seked" des Ahmose entspricht der mit 7 multiplizierte Cotangens des Winkels $\alpha = 54.246^o$.

Nun zum Text. Die einleitenden Worte (hier fettgedruckt) wurden von Ahmose in roter Farbe gechrieben. Dies bedeutet nur, daß eine neue Aufgabe beginnt:

Methode des Berechnens
einer Pyramide (mit) 360 als Grundkante
und 250 als Höhe von ih[r].
Du sollst mich ihren *sqd* wissen lassen!
Dann berechnest du die Hälfte von 360.
Dann resultiert 180.
Dann dividierst du 180 durch 250.
Dann resultiert $\overline{2}\ \overline{5}\ \overline{50}$ einer Elle.
Eine Elle sind 7 Handbreit.
Dann multiplizierst du (es) mit 7.

	$\cdot$	7		
\	$\overline{2}$	3	$\overline{2}$	
\	$\overline{5}$	1	$\overline{3}$	$\overline{15}$
\	$\overline{50}$	$\overline{10}$	$\overline{25}$	

Ihr *sqd* ist 5 $\overline{25}$ Handbreiten.

Die Längenangaben im Text verstehen sich in ägyptischen Ellen. Eine ägyptische (große) Elle hat (hier) etwa die Länge von 52.5 cm. Nach Berechnung der Steigung $180 : 250 = \overline{2} + \overline{5} + \overline{50}$ multipliziert Ahmose noch mit 7. Die ägyptische Elle hatte 7 Handbreiten zu je 7.5 cm. Es ist wohl in allen Kulturen üblich gewesen, Abmessungen in „anschaulichen" Maßeinheiten darzustellen. Dabei waren Ellen, Handbreiten und Fingerbreiten (vier Fingerbreiten ergeben eine Handbreite) gebräuchlich. Für überschlägige Messungen führte ein jeder die entsprechenden Maßstäbe bei sich. zudem vermeidet man bei Benutzung der Maßeinheit „Handbreite" für das Resultat die unbequeme Bruchzahl. Deshalb war es üblich, Neigungen von Pyramiden, Dämmen und anderen Bauten in „Handbreit Rücksprung pro Höhenelle" anzugeben. Dies mag für uns ungewohnt erscheinen, für einen angelächsischen Ingenieur, der es gewohnt ist, bei Baustählen den Durchmesser in Zoll und die Länge in Yard anzugeben, ist dies ganz natürlich. Ahmose hat also noch $\overline{2} + \overline{5} + \overline{50}$ mit 7 zu multiplizieren. Er weiß, daß $7 \cdot \overline{2} = 3 + \overline{2}$ ist und $7 \cdot \overline{5} = 1 + \overline{3} + \overline{15}$. Etwas schwieriger ist die Berechnung von $7 \cdot \overline{50}$. Hier multipliziert Ahmose offenbar das soeben erhaltene Resultat $7 \cdot \overline{5}$ mit $\overline{10}$ und erhält $\overline{10} + \overline{30} + \overline{150} = \overline{10} + \overline{25}$. Mit dem oben angedeuteten systematischen Algorithmus hätte er die Zerlegung $7 \cdot \overline{50} = \overline{8} + \overline{100} + \overline{200}$ gefunden. Wir sehen übrigens hier, daß die Zerlegung eines Bruches in Stammbrüche nicht eindeutig ist. Die Steigung der Pyramide ist also insgesamt

$$\underbrace{3 + \overline{2}}_{7\times\overline{2}} + \underbrace{1 + \overline{3} + \overline{15}}_{7\times\overline{5}} + \underbrace{\overline{10} + \overline{25}}_{7\times\overline{50}}$$

Dieser Ausdruck muß noch vereinfacht werden. Ein wichtiger Bestandteil der – für unsere Begriffe sehr harten – Ausbildung zum Schreiber befähigte Ahmose dazu, die Stammbrüche geeignet zusammenzufassen und dann das Endresultat $5 + \overline{25}$ anzugeben.

Die Neigung, ausgedrückt in „Handbreit Rücksprung pro Höhenelle" hatte bei den Ägyptern die Bezeichnung *sqd* oder *seked*. In moderner Schreibweise ist der Wert $5 + \overline{25}$ gerade der Cotangens des Steigungswinkels, und dieser beträgt hier 54.246^o. Man sollte vielleicht darauf hinweisen, daß das Resultat dieser Aufgabe nicht unbedingt der altägyptischen „Praxis" entsprechen muß, das heißt, diese Aufgabe scheint eine Aufgabe der „reinen Mathematik" im praktischen Gewand zu sein. $\frac{1}{25}$ Handbreit entspricht 0.3 cm. Es ist unwahrscheinlich, daß man im Alten Ägypten mit einer solchen Genauigkeit im „Alltag umzugehen gewohnt war. Robins und Shute merken dazu an [48, S. 48]: „It is likely that this problem was intended as an exercise rather than to reflect a real situation, since the evidence from surviving pyramids is that the stone–masons cut the facing stones in quarters of a *seked*, not in twenty–fifth, which would probably not have been possible."

Man kennt aus der über dreitausenjährigen Geschichte Altägyptens nur etwa ein gutes Dutzend mathematische Dokumente (siehe Tabelle 1). Unter diesen ist der Papyrus des Ahmose der am vollständgsten erhaltene und umfangreichste Text. Daneben kennt man noch eine Anzahl von alltäglichen Texten, Urkunden, Abrechnungen, Aufstellungen von Rationen und Material, in denen mathematische Aufgaben gelöst werden, so daß man mit aller gebotenenen Vorsicht – man denke an unsere kleine Science-Fiction-Geschichte – Rückschlüsse auf die Art und Weise, in der in Ägypten Mathematik betrieben wurde, ziehen kann.

4 Das älteste Gewerbe der Welt

Vor etwa 10 000 Jahren änderte sich die das Leben des Menschen auf dramatische Weise. In verschiedenen Teilen der Welt fand ein Prozeß statt, der an unterschiedlichen Stellen mit unterschiedlicher Geschwindigkeit und auf unterschiedliche Weise verlief und den man als die *neolithische Revolution* bezeichnet. Dieser Vorgang war dadurch gekennzeichet, daß der Mensch begann, Pflanzen zu kultivieren und Tiere zu domestizieren. Damit änderte sich nicht nur die Situation des Menschen total und unwiderruflich, es gibt sogar Anzeichen dafür, daß schon damals durch die Eingriffe des Menschen das Klima beeinflußt worden ist [49].

Dieser folgenreiche Prozeß wird in poetischer Form in der Geschichte von Jakob und Esau geschildert (Gen 25–32). Esau, von Aussehen „ganz rauh wie ein Fell“ (Gen 25,25), „wurde ... ein Jäger und streifte auf dem Felde umher, Jakob aber ein gesitteter Mann und blieb bei den Zelten.“ (Gen 25,27). Esau war Jakob körperlich weit überlegen, aber auf die Dauer war es immer Jakob – der Name bedeutet *der Hinterlistige* (Gen 27,36) – welcher die Konflikte zu seinem Gunsten entschied.

	Bauer	**Jäger**
Existenzform	Seßhaftigkeit	Freiheit
Wirtschaftsform	produzierend	aneignend
Recht	Gesetze	Talionsrecht
Kunst	monumental	transportabel
Architektur	Siedlungsbau	—
Religion	Jenseitsglaube	Jagdzauber
Sozialstruktur	Siedlungen	Gruppen
Zeitempfinden	Planung	Zufall

Existenzform Mit dem Übergang zur Seßhaftigkeit gewann der Mensch Sicherheit und verlor an Freiheit. Der Gegensatz des Seßhaften zum Nichtseßhaften spielt in der Gechichte bis zum heutigen Tage eine wichtige Rolle. Im Alten Ägypten war ein Grund für die Bildung einer Zentralmacht die Abwehr der räuberischen Nomaden. In Grimmelshausens *Simplizissimus* wird der stete Kampf des „freien“ Marodeurs und des seßhaften Bauern eindrucksvoll geschildert. Auch hier ist der Bauer als Einzelner im Nachteil, auf die Dauer jedoch der Sieger. In den USA und Australien wurde die verächtliche Bezeichnung *Squatter* für den seßhaften Bauern benutzt (*to squat* = kauern, hocken). Auch in heutiger Zeit setzt sich der Jäger vom Nichtjäger durch eine eigene Sprache, durch besondere Rituale, durch eine eigene Tradition und „Ethik“ (Fuchsjagden!) ab. Die Jagd galt als Privileg des Adels, und der ewige Kampf des „Jägers“ gegen den (bäuerlichen) Wilderer ist Gegenstand zahlreicher Geschichten und Filmproduktionen. Die „Safariromantik“. die für ein zahlungskräftiges Publikum geschaffen wird, ist nur noch ein schwacher Abglanz der traditionellen Jagdgebräuche einer privilegierten Schicht.

Wirtschaftsform In verschiedenen Teilen der Welt, ganz besonders im Alten Ägypten, wurde es notwendig, die Bewässerung als Gemeinschaftsaufgabe zur organisieren. Im ägyptischen Flußtal hing der Erfolg der Landwirtschaft völlig von den jährlich eintretenden Nilüberschwemmungen ab, und von zehn Nilüberschwemmungen sind kaum drei befriedigend [8, S. 247], es sind also neben Kanalisierungs- und Dammbauarbeiten auch noch präzise Planungen und eine straffe Organisation erforderlich, um die wenig ergiebigen Überschwemmungen auszugleichen. Hierin liegt vermutlich die Wurzel der in der Bibel berichteten Erzählung des Traumes Pharaos von den sieben fetten und den sieben mageren Kühen beziehungsweise von den sieben dicken und den sieben dünnen Ähren (Gen 41). Die Geschichte von Joseph kann man, wenn man nicht in der Bibel nachlesen mag, in der zwölften Sure des Korans – allerdings in orientalisch ausgeschmückter Form – oder aber – poetisch erhöht – in der Romantetralogie Thomas Manns nachlesen. Ein weiteres Kennzeichen des Übergangs zur Seßhaftigkeit ist der Handel, der aus dem Güteraustausch innerhalb der einzelnen Siedlungsverbände entstand.

Kunst und Architektur Schon im Paläolithikum findet man Belege künstlerischer Tätigkeit des Menschen (vgl. etwa [40]). Jedoch handelt es sich hier durchweg um Kleinkunst etwa um Verzierungen von Jagdgeräten, ein Jäger wird sich nicht mit großformatigen Kunstwerken belasten. Durch die Seßhaftwerdung entwickelte sich die Architektur, die Lehmbaukunst, die Zimmermannskunst und die Steinarchitektur. Keramik begann eine wichtige Rolle – ganz besonders für die heutigen Archäologen – zu spielen. Zahlreiche neolithische Kulturen entwickelten irgendwann eine Monumentalarchitektur, beispielsweise die Megalithstruktur von Stonehenge, die etwa 2500 bis 2000 v. Chr. errichtet wurde oder aber die ägyptischen Pyramiden, deren erste, die Stufenpyramide des Djoser in Sakkara etwa um 2600 v. Chr. erbaut wurde, und natürlich die Cheopspyramide in Gizeh (ca. 2500 v. Chr.). Diese gewaltigen Bauten stellen Identitätssymbole dar, die auch insbesondere feindlichen Stämmen Macht und Stärke signalisierten (vgl. dazu die Ausführungen von Mendelssohn [37]). Man denkt an den biblischen „Turmbau zu Babel". Im Alten Testament heißt es in Gen 11,4: „...und sprachen: Wohlauf, laßt uns eine Stadt und einen Turm bauen, dessen Spitze bis an den Himmel reiche, damit wir uns einen Namen machen; denn wir werden sonst zerstreut in alle Länder."

Religion Für den Jäger und Sammler war eine einfache Religion typisch, deren wesentlichster Bestandteil der Jagzauber war. Diese magische Religion wurde durch eine Fruchtbarkeitsreligion abgelöst. Durch die Bebachtung des Werdens und Vergehens in der Natur, der zyklischen Abfolge der Jahreszeiten bildete sich die Vorstellung eines Weiterlebens nach dem Tode aus. Eine Bestattungskultur kam auf und die Rolle der Frau änderte sich. Dies sehen wir in der Geschichte Jakobs. Dort stehen Jakob und seine Mutter Rebekka, die die neue Lebensform repräsentieren, gegen Esau und seinen Vater Isaak.

Sozialstruktur Der Seßhafte bedarf einer komplizierten Organisation für die Bearbeitung des Bodens, für die Bewässerung, aber auch zur Abwehr räuberischer Nomaden. Deshalb entwickelt er eine komplexe Sozialstruktur, es entstehen politische und geistliche Führungsschichten. Eine Folge der Intensivierung des Landbaus ist eine Bevölkerungsexplosion. Für das Zusammenleben werden Gesetze notwendig, und die Namen der Gesetzgeber (etwa Hammurapi, Moses oder Solon) leben im Gedächtnis der Menschen fort. Dies läßt sich auch gut in der Bibel verfolgen: Moses ersetzt das einfache und unkomplizierte Talionsrecht des Nomaden (Ex 21,24, Lev 24,20, Dtn 19,21) durch das Mosaische Recht, insbesondere den Dekalog (Ex 20, Dtn 5), welcher schlicht fordert *Du sollst nicht töten* und komplizierte Regeln für das konfliktfreie Zusammenleben einführt.

Zeitempfinden Der Jäger und Sammler lebt für den Augenblick, er kann keine Pläne für die Zukunft machen, da er völlig von der Natur, also vom unvorhersehbaren Zufall abhängig ist. Dagegen besteht für den Bauern die Notwendigkeit des Vorausplanens, er muß zum Beispiel den rechten Zeitpunkt für die Aussaat bestimmen, und ein Fehler kann für ihn fatal sein. Diese Aufgabe erfordert die Aufstellung eines auf dem Sonnenjahr basierenden Kalenders und damit eine Beschäftigung mit der Astronomie. Im Alten Ägypten allerdings wurde der Zeitpunkt der Aussaat durch die Nilschwelle festgelegt, so daß die ägyptische Astronomie bei weitem nicht so hoch entwickelt war wie in anderen Kulturen. Das Monument von Stonehenge und die Himmelsscheibe von Nebra [36] zeigen, daß in anderen Kulturen ein erheblicher Aufwand getrieben wurde, um die Jahreszeiten und damit die Zeiten für Saat und Ernte festzulegen.

Der seßhafte Bauer muß sein Handeln an einem mentalen Modell der Zukunft ausrichten. Er darf beispielsweise unter keinen Umständen das Saatgut für das nächste Jahr aufbrauchen, auch dann nicht, wenn dies für ihn momentan eine bittere Einschränkung bedeutet. In der Geschichte von Jakob und Esau wird sehr schön geschildert, wie Esau hungrig von der Jagd heimkommt. Nicht jeder Jagdausflug ist eben erfolgreich. In dieser Situation verkauft er sein Erstgeburtsrecht an Jakob für ein Linsengericht (Gen 25, 29–34). Der Jäger zieht den momentanen Vorteil einem zukünftigen vor.

Ebenso wie der seßhafte Bauer die Zukunft entdeckt, forscht er auch in der Vergangenheit. Für ihn ist die Voraussage der Jahreszeiten und des Wetters überlebenswichtig, und er versucht, aus der Vergangenheit Vorhersagemodelle zu finden. Diese werden etwa in Bauernregeln niedergelegt.

Uns interessiert hier, daß die Seßhaftwerdung die Beschäftigung mit der Mathematik zwingend notwendig machte. Bereits lange vor der Erfindung der Schrift wurden Methoden der Zählung und der Planung erfunden. So wurden Zählmethoden für Vieh eingeführt, welche einen bemerkenswert hohen Abstraktionsgrad aufwiesen [50], und frühe Methoden der „Buchhaltung“ waren im Zweistromland gebräuchlich (vgl. etwa auch die Bücher von Ifrah [26, 27]). In einem prädynastischen ägyptischen Grab wurden „Etiketten“ gefunden, die Art und Menge von Grabbeigaben angaben – die Beigaben selbst haben sich im Laufe der Jahrtausende zersetzt [28].

Übrigens reicht der Umgang mit Zahlen bis ins Paläolithikum zurück. Man hat zwei Knochen gefunden die Ritzzeichen aufweisen, welche man nur als Zahlendarstellungen interpretieren kann. Der sogenannte Ishango-Knochen aus Afrika dürfte ein Alter von 11 000 Jahren haben [39, S. 15ff], und der Wolfsknochen von Dolni Vestonice (Tschechoslowakei), der 1937 gefunden wurde, dürfte sogar 20 000 bis 35 000 Jahre alt sein [26, S. 82f] (vgl. auch Absolon [1]).

Man kann also feststellen, daß lange vor der Erfindung der Schrift der Mensch mit Zahlen umzugehen wußte. Die Mathematik – speziell die Wirtschaftsmathematik – darf man daher mit Recht als das älteste Gewerbe der Welt bezeichnen. Lange bevor also Königslisten und Heldenepen niedergeschrieben wurden, hat man Frachtbriefe, Warenbegleitscheine und Zählungsresultate niedergelegt.

5 Die Cheopspyramide

Eine besondere Herausforderung für die planerischen Fähigkeiten des Menschen stellen Großbauten dar, wie etwa die Megalithbauten in Mitteleuropa oder eben die ägyptischen Pyramiden. Die Logistik und Planung eines solchen Bauwerks wäre auch für eine heutige Baufirma eine höchst anspruchsvolle Herausforderung. Wir lesen schon im Lukasevangelium (Lk 14, 28–32):

> Denn wer ist unter euch, der einen Turm bauen will und setzt sich nicht zuvor hin und überschlägt die Kosten, ob er genug habe, um es auszuführen?
>
> damit nicht, wenn er den Grund gelegt hat und kann’s nicht ausführen, alle, die es sehen, anfangen, über ihn zu spotten,
>
> und sagen: Dieser Mensch hat angefangen zu bauen und kann’s nicht ausführen.
>
> Oder welcher König will sich auf einen Krieg einlassen gegen einen andern König und setzt sich nicht zuvor hin und hält Rat, ob er mit Zehntausend dem begegnen kann, der über ihn kommt mit Zwanzigtausend?
>
> Wenn nicht, so schickt er eine Gesandtschaft, solange jener noch fern ist, und bittet um Frieden.

Wir wollen nur einige Aspekte der Konstruktion der Pyramide betrachten. Erstaunlich ist die große Genauigkeit, mit der die Abmessungen der Pyramide festgelegt wurden. Diese Genauigkeit hat immer wieder zu Spekulationen Anlaß gegeben, auch durchaus ernsthafte Ägyptologen haben sich in ihrer Begeisterung zu allzu kühnen Hypothesen verleiten lassen. Ich beziehe mich bei meinen Angaben auf die Bücher von Edwards [14] und Stadelmann [57], beides anerkannte Forscher auf dem Gebiet der ägyptischen Pyramiden. I. E. S. Edwards ist Direktor der ägyptischen Abtielung des Britischen Museums. Rainer Stadelmann ist Direktor am Deutschen Archäologischen Institut Kairo. Er hat sich insbesondere mit der Roten Pyramide des Snofru in Dahschur befaßt.

Nivellierung des Untergrundes Der Baugrund wurde für den Pyramidenbau mit einer erstaunlichen Präzision geebnet. Nach Edwards [14, S. 175] weicht die Umrißlinie der Standfläche der Cheops-Pyramide um nur 1.5 cm von der Horizontalen ab. Für diese unvorstellbare Genauigkeit wurden verschiedene mögliche Vorgehensweisen der antiken Baumeister in Betracht gezogen. So gibt Edwards an, das Gelände wäre zu dem Zwecke der Nivellierung mit niedrigen Wällen aus Nilschlamm umgeben und dann mit Wasser geflutet worden. Dies scheint äußerst aufwendig und für den erstrebten Zweck nicht eben optimal zu sein [57, S. 252]. Nach Stadelmann [57, S. 253] hat man sich eines einfachen Instruments, der Setzwaage, zu diesem Zwecke bedient. Die Setzwaaage besteht aus einem Lot, welches an einem Gestell befestigt ist, so daß man die Richtung des Lotes bezüglich des Gestells auf einer Skala ablesen kann (vgl Abbildung 2). Dieses Instrument hat die schöne Eigenschaft, daß es „selbstkalibrierend“ ist, das heißt, man kann einen möglicherweise vorhandenen Fehler in der Konstruktion dadurch kompensieren, daß man das ganze Gerät um seine vertikale Achse um 180^o dreht und die Messung wiederholt. Es ist durchaus möglich, vermittels einer Setzwaage – und natürlich mit gehöriger Sorgfalt – die angegebene Genauigkeit zu erreichen.

Die Setzwaage spielt in der ägyptischen Weltanschauung eine herausragende Rolle. Sie wird häufig als Metapher für die rechte Weltordnung gebraucht. Beispielsweise charakterisiert in der Geschichte *Der redekundige Oasenmann* [25, S. 15] der Oasenmann einen Zustand, in dem die Weltordnung gestört ist, mit den Worten „Eine Waage, die schiefsteht, ein Lot, das fehlgeht, . . . “ und im Totengericht, im sogenannten „negativen Sündenbekenntnis“ heißt es [25, S. 122] „[ich habe] das Lot der Standwwage nicht verschoben.“ In der neueröffneten Ägypten-Ausstellung des Museums für Völkerkunde findet man in einer Sammlung von Amuletten auch eines in Form einer Setzwaage. Übrigens: Auch in der Bibel wird das Bleilot an als eine Metapher für das Gericht Gottes verwendet, so etwa in Am 7,7 „Er ließ mich abermals schauen, und siehe, der Herr stand auf der Mauer, die mit einem Bleilot gerichtet war, und er hatte ein Bleilot in seiner Hand.“ oder in Jes 34,11: „. . . sondern Rohrdommeln und Igel werden’s [Edom, U.E.] in Besitz nehmen, Nachteulen und Raben werden dort wohnen. Und er wird die Meßschnur darüber spannen, daß es verwüstet werde, und das Bleilot werfen, daß es öde sei.“

Ausrichtung nach den Himmelsrichtungen Die vier Seiten der Cheopspyramide sind äßerst präzise nach den Himmelsrichtungen ausgerichtet. Die Abweichungen betragen nach Edwards [14, S. 175]:

Nordseite	$2' \, 28''$ südlich von Westen
Südseite	$1' \, 57''$ südlich von Westen
Ostseite	$5' \, 30''$ westlich von Norden
Westseite	$2' \, 30''$ westlich von Norden

Diese Präzision mag unvorstellbar erscheinen. Eine berechtigte Frage ist, wie man die Ausrichtungen der Kanten heute mit einer solchen Präzision bestimmen kann. Wir werden auf diese Frage alsbald zurückkommen. Zu den Winkelangaben ist zu bemerken, daß die Ägyptologen die etwas antiquierte Winkeldarstellung in (Bogen-) Grad, Minuten und Sekunden bevorzugen. Ein Bogengrad ist der 360. Teil des Vollkreises, eine Bogenminute ($1'$) ist der 60. Teil eines Grads und eine Bogensekunde der 60. Teil einer Minute. Die Dicke eines menschlichen Haares, am ausgestreckten Arm gehalten, erscheint unter einem Winkel von einem Drittel einer Bogenminute bis zu einer Bogenminute. Die Dicke eines Streichholzes in der gleichen Position überdeckt etwa

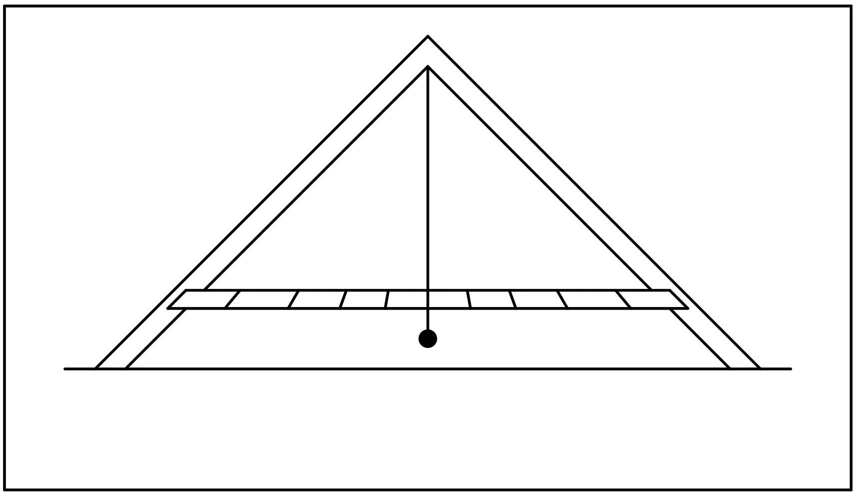

Abbildung 2: Die Setzwaage

zehn Bogenminuten, eine Bleistiftdicke etwas über zwanzig Bogenminuten. Man weiß, das von der antiken Astronomie bis zu Kopernikus (1473 – 1543) die maximale Meßgenauigkeit bei etwa $20'$ lag, also bei einer Bleistiftdicke. Vor diesem Hintergrund mag die Ausrichtung der Cheopspyramide in der Tat unglaublich erscheinen. Jedoch schon Tycho Brahe (1546 – 1601) konnte die Genauigkeit seiner Messungen auf den Wert von einer Bogenminute – also einer Haaresbreite – steigern. Hierzu benutzte er als einzige „Geheimwaffen“ äußerste Sorgfalt und Meßgeräte, die mit höchster damalig erreichbarer Präzision gefertigt und in ihren Abmessungen ausßergewöhnlich groß waren, auf jeden Fall Mittel, die den Alten Ägyptern ebenfalls zur Verfügung standen.

Für die präzise Bestimmung der Nordrichung wurden ebenfalls verschiedene Hypothesen vorgeschlagen. Es erscheint einsichtig, daß eine solche Genauigkeit allein durch astronomische Methoden erreichbar ist, und dies wird auch von ägyptischen Texten, die die Zeremonie der Tempelorientierung beschreiben, nahegelegt (vgl. [14, S. 178]). Eine Ausrichtung am Polarsten wäre zu ungenau, selbst wenn man davon absieht, daß zu Cheops' Zeiten kein spektakulärer Stern dem Himmelspol nahe stand. Es gibt jedoch überzeugende Hypothesen, auf welche Weise man mit der gewünschten Präzision die Ausrichtung nach Norden bewerkstelligen kann [14, S. 179]. Eine besonders hübsche und interessante Theorie wurde unlängst von Kate Spence [56] vorgeschlagen.

Hat man die Nordrichtung gefunden, dann bestimmt man die Richtungen der noch verbleibenden Seiten durch Errichtung eines rechten Winkels auf der schon bestimmten Nord-Süd-Richtung. Auch für die Präzision, mit der die rechten Winkel realisiert wurden, gibt es verschiedene Erklärungen. Eine davon bezieht sich auf das „magische Dreieck“. So weist zum Beispiel der bedeutende Mathematikhistoriker Moritz Cantor [7, S. 49, 96, 105f] darauf hin, daß in ägyptischen Bauten – wie auch in der Bibel – das Seitenverhältnis 3 : 4 relativ häufig auftritt. Er wertet dies als Indiz dafür, daß die antiken Baumeister den Satz von Pythagoras nutzten. Ein Dreieck mit den Seitenverhältnissen 3 : 4 : 5 ist nämlich rechtwinklig, und Cantor hält es für naheliegend, daß die antiken Baumeister mit Seilen, die Knoten in entsprechenden Abständen hatten, rechte Winkel festlegten (vgl. auch [34]). Eine solche Vorgehensweise würde voraussetzen, daß die Alten Ägypter den Satz von Pythagoras mindestens für den genannten Spezialfall gekannt hätten. Hierfür gibt es aber keinerlei Belege. Zudem wäre ein solches Vorgehen sehr ungenau. Um auf unsere kleine Science-Fiction-Geschichte zurückzukommen: Das US-amerikanische ARCH-Format hat ein Seitenverhältnis von 3 : 4. Unsere außerirdischen Forscher könnten daraus schließen, daß die

Erdbewohner eine vage Kenntis des Satzes von Pythagoras gehabt und vermittels dieses Satzes ihre Paperformate rechtwinklig zugeschnitten hätten.

Wie schon van der Waerden anmerkt [62, S. 18], ist es viel einfacher und weitaus genauer, die aus der Schule bekannte Konstruktion eines rechten Winkels mit Zirkel und Lineal zu benutzen. Ebenso ist es möglich, einen rechten Winkel vermittels eines geeigneten Winkelmaßes („Geodreieck“) festzulegen. Ein solches Gerät hätte ebenfalls den Vorteil, selbstkalibrierend zu sein. Man müßte nämlich lediglich die Messung mit dem um 90^o gedrehten Instrument wiederholen und dann aus den beiden erhaltenen Richtungen den Mittelwert bilden. Übrigens: In der erwähnten Amulettsammlung des Museums für Völkerkunde findet sich auch ein rechter Winkel.

Seitenlängen Die Seitenlängen der Großen Pyramide sind ebenfalls von den antiken Baumeistern mit einer unvorstellbar hohen Präzision festgelegt worden. Nach Messungen des bekannten Ägyptologen Flinders Petrie aus der Zeit von 1880–1882 und moderneren Messungen von J. H. Cole (1925) [14, S. 74] betragen die Seitenlängen:

Nordseite	230.26 m
Südseite	230.45 m
Ostseite	230.39 m
Westseite	230.36 m

Neuere Messungen durch J. Dorner [11] ergaben nach Stadelmann [57, S. 255f] die Seitenlängen:

Nordkante	230.328 m
Südkante	230.369 m
Ostkante	230.372 m
Westkante	230.372 m

Man beachte: Anscheinend wurden hier die betreffenden Längen millimetergenau vermessen!

Man mag etwas befremdet sein, wenn man diese Angaben liest. Die Cheopspyramide in ihrer heutigen Form ist eher ein „Steinhaufen“ als eine geometrisch exakte Pyramide. Insbesondere sind die Verkleidungssteine aus weißem Kalkstein, die der Pyramide ein atemberaubendes Aussehen gegeben haben müssen, fast völlig verschwunden. Nun haben aber die ägyptischen Baumeister die Ecksteine der Pyramide in präzise ausgehauene Bettungen eingefügt, und diese kann man in der Tat zentimetergenau vermessen [57, S. 111].

Diese Abweichung von maximal 3.2 cm vom Mittelwert 230.36 m, also von nur 0.014 %, ist ebenfalls erstaunlich. Die Verwendung von Meßseilen, wie sie aus der ägyptischen Feldmessung belegt ist, scheidet aus (vgl. jedoch dazu Stadelmann [57, S. 256]). Wenn man Meßseile nicht straff spannt, dann hängen sie durch und die Messung wird ungenau. Bei allzu straffer Spannung verändert sich die Länge des Meßseils entweder elastisch oder sogar unelastisch, also bleibend. Für eine derartig hohe Präzision sind Meßseile also denkbar ungeeignet. Man muß sich vor Augen halten, daß die Meßseile von Hand aus Palmfasern oder auch aus Halfagras gefertigt waren, wie Ryan feststellen konnte [51, S. 196f]. Vorstellbar wäre eine Verwendung von Meßlatten, verbunden mit einem Höchstmaß an Sorgfalt. Meßlatten sind allerdings nicht selbstkalibrierend. In der ägyptologischen Literatur ist gelegentlich von „Gegenmessungen“ die Rede [57, S. 256] oder von „Kontrollmessungen“ der Diagonalen [14, S. 175]. Ersteres würde voraussetzen, daß man im Alten Ägypten bereits über die Fehlerrechnung verfügte, und dies ist nicht vorstellbar, die Theorie der Meßfehler wurde erst in der Neuzeit von Carl Friedrich Gauß geschaffen. Diagonalmessungen wären nur dann von Nutzen, wenn man über den (allgemeinen) Satz von Pythagoras verfügt hätte, und dies war sicher nicht der Fall. Es ist jedoch gut vorstellbar, daß die Anwendung von sauber gearbeiteten Meßlatten in Verbindung mit größtmöglicher Sorgfalt bei den Messungen zu dem genannten Resultat führen kann.

Der englische Autor John Taylor (1781–1864) publizierte im Jahre 1859 ein Buch über die Cheopspyramide [60]. In diesem Buch wird dargestellt, daß das Verhältnis des Umfangs der Pyramide an der Basis zu ihrer Höhe ziemlich gut den Wert von 2π approximiert. Diese Entdeckung griff der Astronomer Royal for Scotland Charles Piazzi Smyth (1819–1900) auf. Smyth war ein bedeutender Astronom, man hat sogar einen Mondkrater nach ihm benannt ($41^o\ 54'$ N, $3^o\ 12'$ W, 13 km Durchmesser). Smyth polemisierte – wie auch Taylor – gegen das metrische Maßsystem und stützte sich dabei auf Pyramidenmystik. Die Ergebnisse seiner Untersuchungen hat er in einem 1864 in einem Buch niedergelegt [55], welches mehrere Auflagen erlebte und seit 1880 erweitert unter einem neuen Titel erschien [54]. Er reiste 1865 nach Ägypten und vermaß die Cheopspyramide sehr sorgfältig. Die Person des Piazzi Smyth bildet die Vorlage einer Figur de Romans *Der Kampf um die Cheopspyramide* von Max Eyth (1836–1906). Max Eyth war ein Ingenieur, der unter anderem auch längere Zeit in Ägypten gearbeitet hat. Theodor Heuß schreibt über ihn

> Er ist mit den hellsten Augen durch die Kontinente gewandert und hat sich doch nie in ihnen verloren, er hat sich selber nicht in sich verloren. Die überlegene Ökonomie seines Wesens, in der Tat sich zu bewähren, in der Muse, in den Musen galt, sich zu bewahren, das gibt die schier unvergleichliche Melodie seines Lebens.

Ein Kapitel des Romans ist mit der eingangs zitierten Approximation an π auf 40 Stellen nach dem Dezimalpunkt überschrieben [18, S. 337]. Der Roman schildert mit Wärme und Ironie die Schicksale zweier „Pyramidennarren“ in Ägypten.

Spätere genauere Messungen, wie die erwähnten von Flinders Petrie und von Cole schienen die Beobachtung von Taylor immer deutlicher zu bestätigen. Wenn auch nicht auf vierzig Dezimalstellen, so doch mit einer sensationellen Genauigkeit schien die Zahl π in den Abmessungen der Pyramide festgehalten zu sein. Hierfür wurden zahlreiche Erklärungen vorgeschlagen. Wir lassen einmal Außerirdische, Atlanter oder aber die jüdischen Erzväter, insbesondere Abraham oder Henoch, beiseite und versuchen eine nüchterne Deutung zu finden.

Zunächst jedoch muß ein Punkt geklärt werden. Wir hatten gesehen, daß man die Abmessungen der Basis der Pyramide sehr präzise kennt. Wie gelangt man nun zu einem vernünftigen Wert für die Höhe, insbesondere, wenn man bedenkt, daß die Spitze der Pyramide schon längst nicht mehr existiert? Eine Möglichkeit wäre es, die Neigung der Seitenfläche zu ermitteln, also Ahmoses *seked*. Wie wir gesehen haben, läßt sich daraus die Höhe leicht ermitteln. Allgemein kann man sagen, daß von den drei Größen Länge der Basiskante, Höhe, Neigungswinkel der Seiten je zwei unabhängig gewählt werden können, die dritte ergibt sich dann nach bekannten Formeln der Geometrie beziehungsweise Trigonometrie. Da die Höhe auf keinen Fall mehr unabhängig meßbar ist, konzentrieren wir uns auf die Basislänge und den Neigungswinkel. Letzterer kann zwar auch nicht mehr unmittelbar bestimmt werden, jedoch machte schon Smyth darauf aufmerksam, daß man vermittels eines *in situ* erhalten gebliebenen Verkleidungsblocks den Neigungswinkel bestimmen könne. Dies muß allerdings unter starken Vorbehalten gesehen werden. Tatsächlich hat Smyth seinerzeit Verkleidungssteine gefunden und vermessen, allerdings nicht mit der Sorgfalt, die man heute bei Meßergebnissen erwarten muß. Die Messungen der Neigungen unterschieden sich voneinander, was nicht weiter verwunderlich ist. Bei der rüden Entfernung der benachbarten Verkleidungssteine in neuer Zeit ist es durchaus nicht ausgeschlossen, daß die wenigen erhalten gebliebenen Steine aus ihrer ursprünglichen Position gerückt wurden. Es ist überhaupt fraglich, ob jeder der Verkleidungssteine wirklich exakt die gleiche Neigung aufweist. Beispielsweise gibt

Stadelmann [57, S. 116f] an, daß die Seiten der Roten Pyramide leicht konkav sind. Die ägyptischen Baumeister kannten anscheinend die *Kurvatur* bei Bauwerken (vgl. dazu [20, 21, 22]), das heißt, sie führten gerade Linien und ebene Flächen leicht gekrümmt aus, was den Bauwerken – im Gegensatz zu Schinkels „klassizistischen" Bauten, die einen „preußischen" Eindruck erwecken – unverwechselbare Eleganz und Schwung geben. Wenn man Stadelmanns Argmenten Glauben schenkt, dann darf man auch gar nicht erwarten, daß alle Verkleidungssteine die gleiche Neigung aufweisen. Mit entwaffnender Naivität schildert Smyth, wie er aus den abweichenden Neigungsbestimmungen die „richtige" Neigung „errät", das ist dann natürlich die Neigung, die direkt zu π führt. Man darf allerdings dem fähigen Astronomen Smyth daraus keinen Vorwurf machen, denn die Theorie der Beobachtungsfehler wurde erst 1895 von Carl Friedrich Gauß (1777–1855) „erfunden".

Man findet in der ägyptologischen Literatur zahlreiche unterschiedliche Neigungsangaben. Dabei kommt allerdings häufig der Verdacht auf, der Autor habe den Neigungswinkel seiner Lieblingshypothese angepaßt. Bei Stadelmann [57, S. 111f] ist die Basislänge = 230.36 m, der Steigungswinkel = $51^o50'40''$ und die Höhe = 146.59 m. Es ist zu beachten, daß hier die Pyramidenhöhe auf 1 cm genau angegeben wird. Dies ist leicht nachvollziehbar: Stadelmann nimmt zunächst an, daß die Längen der Basisseiten einer ganzen Zahl von Ellen entsprechen, hier also 440 Ellen. Mit der angegebenen (mittleren) Länge der Basisseiten erhält man für die Elle eine Länge von 0.523 545 m. Nimmt man an, daß die Höhe der Pyramide 280 Ellen betragen habe, dann ergibt dieser Wert in der Tat die Höhe von 146.59 m. Wir werden noch sehen. auf welche Weise Stadelmann auf die 280 Ellen Höhe gekommen ist. Rätselhaft bleibt dann allerdings die Angabe für den Steigungswinkel. Aus der Höhe und der Basislänge würde sich ein Winkel von $51^o50'34''$ ergeben. Nun ist eine Angabe von Bogensekunden (auch von zehn Bogensekunden) nicht seriös, denn eine Bogensekunde Unterschied in der Steigung würde einen Unterschied in der Höhe von 1.4 mm (!) ergeben. Man darf vermuten, daß Stadelmann den Zahlenwert für die Steigung aus einer fünfstelligen Tafel interpoliert hat. Selbst ein Unterschied in der Steigung von einer Bogenminute ergäbe lediglich eine Höhendifferenz von 8.8 cm. Anders asusgedrückt: Um bei einem Verkleidungsstein der Höhe 1 m (in idealer Lage) den Steigungswinkel auf 1 Bogenminute genau zu bestimmen, müßte man dessen Abweichung von der Vertikalen auf 0.47 mm genau messen. Selbst wenn Stadelmann seiner Angabe der Neigung hinzufügt, daß der Neigungswinkel „mit größter Genauigkeit" bestimmt sei, möchte man die 40 Bogensekunden anzweifeln. Mit einiger Vorsicht darf man den Wert $51^o51'$ akzeptieren.

Dennoch verbleibt die Tatsache, daß das Verhältnis $2 \times$ Basislänge : Höhe erstaunlich nahe bei π liegt. Mit den angegebenen Zahlen von Stadelmann erhält man $2 \times 230.36 : 146.59 = 3.142\,915\,615$, und diese Zahl weicht nur um 0.042% von π ab. Stadelmann weist auch darauf hin, daß das Verhältnis der Höhe zur Basislänge dem Verhältnis des Goldenen Schnitts recht nahe kommt [57, S. 112]:

$$\frac{\text{Höhe}}{\text{Kantenlänge}} = \frac{146.59}{230.36} \approx 0.636\ 352 \approx \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618\ 034$$

Hierzu ist anzumerken, daß es nicht glaublich ist, daß den Erbauern der Cheopspyramide dieses Verhältnis bekannt war.

Eine hübsche Idee taucht bei Blatner auf [4, S. 11]:

> Die Große Pyramide in Gise weist eine faszinierende Beziehung auf: Das Verhältnis einer Seite zur Höhe entspricht ungefähr $\pi/2$. Ägyptologen und Anhänger mystischer Lehren haben sich jahrhundertelang den Kopf zerbrochen, was dieser Umstand bedeuten und wie er zustande gekommen sein könnte, denn die Näherung ist erheblich

> besser als der Wert für Pi, der den alten Ägyptern, soweit wir wissen, bekannt war. Doch Herodot hat geschrieben, die Pyramide sei so konstruiert, daß der Flächeninhalt jeder Seitenfläche gleich der Fläche eines Quadrates sei, dessen Seitenlänge der Pyramidenhöhe entspräche. Es läßt sich zeigen, daß jede Pyramide, die diese Merkmale aufweist, damit automatisch eine Annäherung an Pi darstellt.

Es hat mir viel Mühe bereitet, dieser Angabe nachzugehen. Zuerst einmal steht derlei bei Herodot sicher nicht. Nach längerer Suche führte die Spur zu dem oben erwähnten John Taylor. Dieser hatte eine Stelle bei Herodot [23, S. 65, Buch II [124]]

> ... Aber zwanzig Jahr wurde gearbeitet an der Pyramide selbst, deren jegliche Seite ist acht Plethra[3] breit und ist vierseitig, und die Höhe ebensoviel, ...

recht großzügig ausgelegt und war so zu dem genannten Resultat gekommen. Tatsächlich ist die genannten Forderung einem Mathematiker sehr sympathisch, da sie eine dimensionslose Zahl ist und daher nur von dem Verhältnis Höhe zu Basislänge abhängt und nicht von den tatsächlichen Abmessungen (wie dies übrigens auch für das genannte Verhältnis von Basisumfang zu einem Kreis, dessen Radius die Höhe ist, gilt). Bezeichnen wir die Basislänge der Pyramide mit a, dann ist der Umfang der Basis $4a$. Aus der genannten Forderung dergibt sich in der Tat, daß das Verhältnis der Länge der Grundseite zur Höhe gleich $2 \cdot \sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{5}}} \approx 1.572\ 302\ 756$ ist, und das Doppelte dieses Wertes ist 3.144 605 512, also eine recht gute Approximation von π. Allerdings ist es wirklich schwer vorstellbar, daß zur Zeit Cheops' eine solche Berechnung angestellt werden konnte. Um den Flächeninhalt der Seitenfläche zu ermitteln, müßte man deren Höhe bestimmen. Dies geht aber nur über den Satz von Pythagoras, der den Alten Ägyptern nicht zugänglich war - unabhängig davon, daß die für die Anwendung dieses Satzes notwendige Berechnung der Quadratwurzel die numerischn Fähigkeiten eines ägyptischen Schreibers weit überstieg.

Eine auf den ersten Blick höchst attraktive Erklärung des mysteriösen Verhältnisses findet man in dem recht interessanten Buch von Mendelssohn [37, S. 85f]. Dieser gibt als Quelle den Elektroniker T. E. Conolly an. Demnach maßen die Alten Ägypter horizontale Abstände anders als vertikale. Dies ist nicht so abwegig, für uns sind zehn Meter horizontale Entfernung „nah“, 10 Meter vertikale Entfernung aber „erschreckend hoch“. Demgemäß wäre es natürlich, die Höhe in einer anderen Einheit zu messen als die horizontale Länge. Eine Spur einer solchen Denkweise findet man noch in dem angelsächsischen *fathom* (Faden), welche Maßeinheit in der Schiffahrt für Tiefenangaben (jedoch nicht für Längenangaben) benutzt wurde. Nach Conolly maßen die Ägypter horizontale Strecken durch Abrollen eines Rades, vertikale Strecken durch Anlegen von Meßlatten. Wir wissen ja, daß auch heute die Polizei bei Unfällen die Entfernungen vermittels eines Rades bestimmt. Damit wäre auf ganz natürliche Weise ein Faktor π in dem Pyramidenbau zu finden, ohne daß die Baumeister auch nur eine entfernte Ahnung von diesem Verhältnis haben mußten. Die Theorie ist sehr schön, aber nicht recht glaubwürdig. Wenn sie zuträfe, dann müßten alle – oder doch die meisten – Bauten der Ägypter ein Verältnis von vertikalen zu horizontalen Abmessungen haben, welches bis auf einen einfachen rationalen Faktor gleich π wäre. Dies ist aber sicher nicht der Fall. Mendelssohn weist selbst darauf hin [37, S. 62], daß die Chephren-Pyramide in Gizeh ein Steigungsverhältnis hat, welches anscheinend nichts mit π zu tun hat. Bei anderen Pyramiden – speziell bei der Roten Pyramide – gibt Mendelssohn einen Böschungswinkel von 43.5^o an [37, S. 56]. Es ist $\frac{3}{\tan 43.5^o} \approx 3.161\ 340\ 376$, also würde auch hier die Zahl π

[3] **Plethron** [griech. Furche]: **1.** antikes griechisches Längenmaß, 1 P. = $\frac{1}{6}$ Stadion = 100 Podes = 30.83 m (BI-Lexikon); d.h. 8 Plethra = 246.64 m.

auftauchen. Wenn auch Edwards [14, S. 186] für diese Pyramide eine Steigung von $43^o 36'$ angibt, so findet man bei Stadelmann [57, S. 89] eine Angabe von 45^o, welche man glauben möchte, da sich Stadelmann gerade mit der Roten Pyramide intensiv befaßt hat.

Wir kommen jetzt zur unspektakulärsten und damit – nach Ockham – auch wahrscheinlichsten Hypothese. In Aufgabe 56 des Papyrus Rhind hatten wir gesehen, auf welche Weise die Steigung der Seitenfläche einer Pyramide angegeben wurde. Es erscheint nicht abwegig, auch hier einmal auszurechnen, wie sich die einzelnen Steigungsangaben in altägyptischen *seked* ausdrücken. In Tabelle 2 sind für einige Steigungsangaben aus der Literatur die entsprechenden Steigungen in *seked* angegeben. Wie man sieht, lassen sich diese Steigungswerte recht zwanglos als Steigungen in *seked* interpretieren, wenn man halbe Handbreiten als Maßangaben akzeptiert.

Vor diesem Hintergrund wird auch klar, wie Stadelmann auf seine Höhenangabe für die Cheopspyramide kam. Der Wert der Basislänge von 230.36 m ist hinreichend gesichert. Die Länge der großen Elle wird in der Literatur mit etwa 52 cm angegeben (Tatsächlich scheinen zu verschiedenen Zeiten verschiedene Ellen benutzt worden zu sein). Die Länge der Basisseite wäre demgemäß $230.36/0.52 = 443$ Ellen. Offenbar nahm Stadelmann an, daß die Baislänge so gewählt wurde, daß sie einer „runden“ Anzahl von Ellen entsprach. Mit dem oben angegebenen Wert von 0.523 545 m für eine Elle käme man auf genau 440 Ellen für die Länge der Basisseite. Nun nahm Stadelmann weiterhin an, das *seked* der Pyramidenseite habe 22 Handbreiten betragen. Damit wäre das Verhältnis halber Basislänge zu Höhe wie 22 : 28, also hat man für die Höhe die angegebenen 280 Ellen. Bei der Berechnung des Winkels aus diesem Verhältnis hat Stadelmann anscheinend nicht so genau gerechnet, wie man aus der übertriegen präzisen Angabe Stadelmanns schließen möchte, der zu dem *seked* 22 gehörige Winkel ist $51^o 50' 34''$. In Tabelle 3 sind noch einmal für die wichtigsten Hypothesen für die Verhältnisse der Pyramide die entsprechenden Zahlenwerte aufgeführt, insbesondere die sich ergebenden Höhen. Sieht man von der Hypothese des Goldenen Schnittes ab, dann differieren die erhaltenen Höhenwerte um einige Zentimeter, das heißt, die Hypothesen „Herodot“, „*seked* 22“ und „Verhältnis π“ sind im Rahmen einer praktisch realisierbaren Meßgenauigkeit völlig gleichwertig. Das Ockhamsche Prinzip legt uns nahe, die einfachste Hypothese „*seked* 22“ zu akzeptieren.

Man hat aus der Cheopspyramide wahrhaft unglaubliche Dinge herausgelesen. Nicht nur den Erddurchmesser und die genaue Länge des Sonnenjahres oder die Länge de Päzessionzyklus der Erde, sogar den Weltuntergang am 20. August 1953 [37, S. 242]. In einem Artikel aus dem *Skeptical Inquirer* hat der Astrophysiker Corenlis de Jager [47, S. 28] verschiedene Abmessungen eines gewöhnlichen Fahrrades genau vermessen und gezeigt, daß eine erstaunlich große Anzahl von physikalischen Konstanten, etwa die Gravitationskonstante, die Lichtgeschwindigkeit, die Feinstrukturkonstante und noch andere in seinem Fahrrad „codiert“ sind. Ein interessanter Leserbrief zu diesem Artikel von Tom Napier weist darauf hin, daß es eigentlich schade ist, daß das *seked* 19 Finger $= 4\frac{3}{4}$ Handbreiten offenbar von den Pyramidenbauern nicht benutzt wurde. Dann wäre nämlich das Doppelte der Basisseitenlänge dividiert durch die Höhe bis auf 0.15 % gleich der Basis der natürlichen Logarithmen e gewesen, welches zu noch interessanteren Spekulationen Anlaß gegeben hätte. Nach Stadelmann [57, S. 112] hat Borchardt in einem Vortrag aus dem Jahre 1922 die Tatsache, daß das *seked* der Cheopspyramide auf π beziehungsweise den Goldenen Schnitt führt, als ein „unbeabsichtigtes Unglück“ bezeichnet, weil diese Tatsache zu den wildesten Spekulationen Anlaß gegeben hat.

6 Noch einmal Ahmose – π

Kehren wir zurück zu Ahmose! Man kann den Inhalt des Papyrus in drei Teile teilen. Ein Teil enthält Hilfstabellen, die jeder ägyptische Schreiber zur Hand haben mußte, wenn er praktisch rechnete. So wird angenommen, daß die *Lederrolle* ein solches Handbuch mit Hilfstabellen war. Es war auf Leder geschrieben, denn Papyrus hätte unter häufigem Gebrauch doch zu sehr gelitten. Ein weiterer wichtiger Teil des Papyrus Rhind sind Wirtschaftsrechnungen, insbesondere Verteilungsaufgaben, also Aufgaben, die sich mit der ungleichen Verteilung von Gütern befaßten. Ein Vorarbeiter hatte eine größere Ration zu empfangen als ein einfacher Arbeiter, und so ergaben sich recht anspruchsvolle Probleme [30]. Man ist geneigt, die Bedeutung solcher Aufteilungsaufgaben zu unterschätzen, aber wir lesen beispielsweise im Koran, 4. Sure (12) (zitiert nach [32]:

> Hinsichtlich euerer Kinder hat Allah folgendes verordnet: Männliche Erben sollen so viel haben, wie zwei weibliche. Sind nur weibliche Erben da, und zwar über zwei, so erhalten sie zwei Drittel der Verlassenschaft. Ist aber nur eine da, so erhält sie die Hälfte[6]. Vater und Mutter des Verstorbenen erhalten je ein Sechstel des Nachlasses, wenn der Erblasser ein Kind zurückläßt. Ist er ohne Kind verstorben und die Eltern sind Erben, erhält die Mutter ein Drittel[7]. Hat er Brüder, erbt die Mutter nach Abzug von Legaten und Schulden ein Sechstel. ...

Man kann sich vorstellen, daß eine Erbteilung zu einer hübschen Übung in Bruchrechnung werden kann. Auch in den modernen Wirtschaftswissenschaften ist die ungleiche Aufteilung von Gütern ein wichtiges Problem, welches auf hochinteressante mathematische Aufgabenstellungen führt (vgl. etwa [59]).

Ein dritter Komplex von Aufgaben waren Geometrieaufgaben, auf die wir gleich zu sprechen kommen. Schließlich gab es noch eine Reihe von Aufgaben, die keinerlei „praktischen“ Hintergrund hatten, wie etwa Aufgabe 79, also die Aufgabe mit den Katzen und Mäusen.

Aristoteles hatte in seiner *Metaphysik,* A 1 geschrieben:

> Deswegen wurden in Ägypten die mathematischen Künste begründet: dort nämlich hatte die Priesterschaft die nötige Musse dazu.

Dieses Zitat erfreut sich einer großen Beliebtheit, und besonders die Amateurmarxisten der siebziger Jahre pflegten gern darauf hinzuweisen, daß Mathematik Klassencharakter habe, ein Produkt der Sklavenhaltergesellschaft sei und zu ihrer Entstehung einer Klasse von Personen bedurfte, die ausreichend Muße hatten und daher – sozusagen aus Langeweile – Mathematik betrieben. Hier ist gleich alles falsch: Die altägyptische Wirtschaft basierte nicht auf Sklavenarbeit, es gab auch bis in das späte Neue Reich keinen „Berufspriesterstand“, vielmehr war der Priesterberuf eine ehrenamtliche Tätigkeit, die von gewissen Personen für eine gewisse Zeit ausgeübt wurde. Das heißt, nicht die Priester verfügten über Privilegien und Zeit, sondern man wurde Priester, wann man priviligiert war und über genügend Zeit verfügte. Mathematik wurde zudem nicht von Priestern betrieben, sondern von Schreibern wie Ahmose, also hochspezialisierten Beamten, die sich einer sehr mühevollen und anstrengenden Ausbildung unterziehen mußten.

Eine realistischere Darstellung der Situation findet man bei Herodot [23, S. 60 (Buch II, 109)]:

[6] Das übrige Drittel und die übrige Hälfte flossen in diesem Falle wahrscheinlich in den öffentlichen Schatz.
[7] Die übrigen zwei Drittel erbt der Vater.

> Derselbe König [Sesostris, U.E.] hatte auch das ganze Land unter die Aegypter verteilet, sagten sie, und einem jeglichen einen gleichen viereckigen Anteil gegeben, und davon hätte er sich sein Einkommen verschafft, indem er ihnen einen jährlichen Zins aufgelegt. Und wenn der Fluß von des einen Teile etwas fortgerissen, so mußte der zum Könige kommen und Anzeige tun von dem Vorfall, und dieser sandte dann seine Leute hin, die da mußten nachsehn und ausmessen, um wieviel kleiner das Stück Land geworden, daß er von dem übrigen bezahlete nach Maße des aufgelegten Zinses. Ich glaube, auf die Art ist die Feldmeßkunst entstanden und von da nach Hellas gekommen. Denn die Stundenuhr und die Wasseruhr und des Tages zwölf Teile haben die Hellenen von den Babyloniern gelernet.

Unter dem König Sesostris ist wahrscheinlich der König Sesostris II (1882–1872 v. Chr.) der 12. Dynastie aus dem Mittleren Reich gemeint. Man kann mit Sicherheit annehmen, daß die Feldmeßkunst sehr viel älter ist, als Herodot hier angibt. Auf jeden Fall gibt uns Ahmose eine große Anzahl von Beispielen dafür, auf welche Weise man Flächen und Rauminhalte berechnen kann. Die Sensation bei Ahmose ist die Aufgabe 50. Es geht in dieser Aufgabe darum, die Fläche eines kreisrunden Feldes zu finden, dessen Durchmesser 9 Ellen beträgt. Ahmose gibt nun die folgende Anleitung (Übersetzung nach [29, S. 249]:

> **Methode des Berechnens** einer runden Fläche von 9 khet.
> Was ist ihr Betrag als Fläche? Dann subtrahierst du sein $\overline{9}$ als 1,
> indem der Rest 8 ist. Dann multiplizierst du 8 mit 8.
> Dann resultiert 64. Sein Betrag als Fläche ist 64.
> Rechnung, wie es resultiert:
>
> | | |
> |---|---|
> | · | 9 |
> | $\overline{9}$ | 1 |
>
> Subtrahieren von ihm, Rest 8.
>
> | | |
> |---|---|
> | · | 8 |
> | 2 | 16 |
> | 4 | 32 |
> | 8 | 64 |
>
> Ihr Betrag als Fläche:
> 64.

Wenn man diese Anleitung in moderne Worte übersetzt, dann ist der Flächeninhalt eines Kreises vom Durchmesser d gerade $\left(\frac{8}{9} \cdot d\right)^2$, und daraus errechnet man als Näherung für π

$$\pi \approx \frac{256}{81} \approx 3.160\,494,$$

und diese Approximation weist einen Fehler von 0.602 % auf. Eine solche Genauigkeit ist wahrhaft sensationell. In Mesopotamien, in China und Indien wurde zu dieser Zeit durchweg die Näherung $\pi \approx 3$ verwendet, die in der Antike bis zu Vitruvius maßgebend war. Sogar bis in die neuesete Zeit benutzten Handwerker vor dem Einbruch der Taschenrechner in unsere Welt häufig diese bequeme Approximation, wenn es auf größte Genauigkeit nicht ankam.

Interessant ist, daß sich auch in der Bibel Hinweise auf die Näherung $\pi \approx 3$ finden. Man findet bei der Beschreibung von Salomos Tempel in 1 Kön 7,23 eine Angabe über ein Kultgefäß mit kreisförmigen Querschnitt:

> Und er machte das Meer, gegossen, von einem Rand zum andern zehn Ellen weit rundherum und fünf Ellen hoch, und eine Schnur von dreißig Ellen war das Maß ringsherum.

In einer Parallelstelle 2 Chr 4,2 steht:

> Und er machte das Meer, gegossen, von einem Rand zum andern zehn Ellen breit, ganz rund, fünf Ellen hoch, und eine Schnur von dreißig Ellen konnte es umspannen.

Offenbar wird hier auch $\pi \approx 3$ angenommen. Es gibt eine jüdische Tradition, nach der die Thora, aber auch andere alttestamentliche Schriften von Gott inspiriert sind und daß daher jedes Wort und jedes Zeichen Bedeutung hat. Demgemäß findet man in talmudischen Schriften $\pi = 3$ festgelegt. Nun ist die jüdische Tradition nicht einheitlich, bedingt durch die lange und komplizierte Geschichte des Judentums. Der Gaon („Weise") von Wilna, Elijah ben Salomon Salman (1720–1797) analysierte diese beiden Stellen in der Bibel. Die Texte weichen geringfügig voneinander ab. Bei einem inspirierten Text stellt sich sofort die Frage, was diese Abweichungen zu bedeuten haben. Posamentier und Gordon haben den Gedankengang des Gaon von Wilna in einem interessanten kleinen Artikel dargestellt [46, 45]. Jedem Buchstaben des hebräischen Alphabets ist eine Zahl zugeordnet. Wenn man die den Abweichungen entsprechenden Zahlen der beiden Textstellen extrahiert, dann stellt man fest, daß sie ein Verhältnis von $\frac{111}{106}$ aufweisen. Nun ist aber $3 \times \frac{111}{106} \approx 3.141\ 509$, also eine sehr gute Näherung an π. Diese und noch andere interessante Geschichten über π findet man in dem kürzlich erschienenen Buch von Alfred S. Posamentier and Ingmar Lehmann [44].

Zurück zu Ahmose! Man muß sich zunächst einmal fragen, wie er – beziehungsweise der Autor des Papyrus des Mittleren Reiches, auf den er sich bezieht – auf diese Approximation kam. Zahlreiche Autoren haben versucht, mehr oder weniger plausible Hypothesen zur Erklärung zu finden. Ich gebe einige wenige an.

Die erste Hypothese ist sehr hübsch, aber wenig überzeugend. Ich fand sie unkommentiert im Internet, insbesondere gab es keinerlei Hinweise auf ihre Entstehung. Wenn man versucht, mit Münzen oder runden Marken einen Kreis zu legen, dann stellt man zunächst einmal fest, daß man sechs Münzen kreisförmig um eine Münze legen kann und daß dann ein Kreis entsteht, dem man mit einiger Phantasie den Durchmesser 3 zulegen kann. Leider läßt sich aber aus 7 Münzen kein Quadrat legen. So legen wir um die Ausgangskonfiguration einen weitere Schicht Münzen und stellen fest, daß mit 13 weiteren Münzen, also insgesamt 20 Münzen ein Kreis mit einem Durchmesser von 5 gelegt werden kann. Leider ist auch 20 keine Quadratzahl. Weiteres Experimentieren führt schließlich auf einen Kreis vom Durchmesser 9, für den 64 Münzen benötigt werden (Abbildung 3). Damit hätte man „gezeigt", daß ein Kreis vom Durchmesser 9 die gleiche Fläche hat wie ein Quadrat der Seitenlänge 9. Diese Beweisführung ist recht anschaulich, und man weiß, daß die Pythagoreer, insbesondere Nikomachos von Gerasa (um 150 n. Chr.), durch Auslegen von Marken „figurierte Zahlen" darstellten [62, S. 162f]. Von den Ägyptern ist allerdings derlei nicht bekannt und die Pythagoreer benutzten dieses Beweismittel auch nicht zu Flächeninhaltsberechnungen.

Struve [58] schlug gleich zwei Hypothesen zur Erklärung des Ahmoseschen Wertes vor. Die eine Hypothese Struves [58, S. 178] bedient sich des Kreisumfanges, und es ist mehr als fraglich, ob die Alten Ägypter bereits wußten, daß für Kreisumfang und Kreisfläche die gleiche Verhältniszahl gilt. Die zweite Hypothese [58, S. 179] bedient sich der Fläche als Argument. Wenn man einen Kreis vom Durchmesser 9 mit Quadraten der Seitenlänge 1 überdeckt und dann auszählt, wieviele der Quadrate „fast ganz" im Kreis liegen, dann kommt man auf 49 Quadrate (Abbildung 4). 20

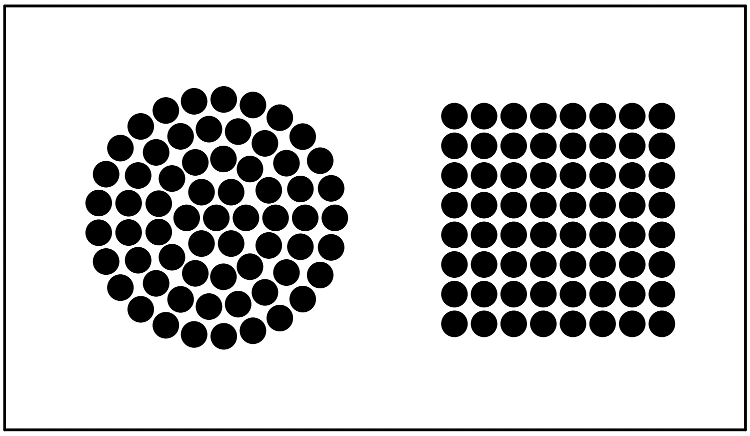

Abbildung 3: Verwandlung eines Kreises in ein Quadrat durch Auslegen von Münzen.

der Quadrate liegen „mehr oder weniger“ im Kreis, und 4 Quadrate treffen den Kreis nur mit einer kleinen Ecke. Offenbar hat also ein Quadrat mit Seitenlänge 9 eine Fläche, die deutlich größer ist als die Kreisfläche, und ein Quadrat mit Seitenlänge 7 ist deutlich zu klein. Ein Quadrat mit nicht ganzzahliger Seitenlänge ist nicht motivierbar und wäre für den praktischen Gebrauch zu unhandlich. Man könnte mithin als Näherung der Kreisfläche ein Quadrat der Seitenlänge 8 wählen.

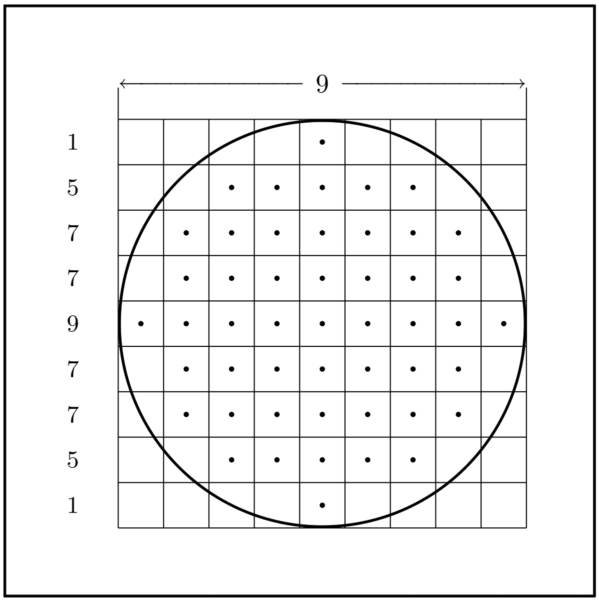

Abbildung 4: Fläche eines Kreises nach Struve.

Eine andere Hypothese wird von Robins und Shute [48, S. 44f] vorgestellt. Wenn man die Seiten eines Quadrats (etwa der Seitenlänge 16) in je drei Teile teilt und durch die äußersten Teilpunkte (die von den Ecken des Quadrats verschieden sind) einen Kreis legt, dann ist die Fläche des Kreises deutlich kleiner als die des Quadrats (Abbildung 5, linkes Teilbild). Wählt man hingegen fünf Teilpunkte, dann ist die Fläche des auf analoge Weise definierten Kreises - nicht mehr ganz so deutlich – größer als die des Quadrats. Es ist also naheliegend, die Konstruktion mit vier Teilpunkten zu versuchen.

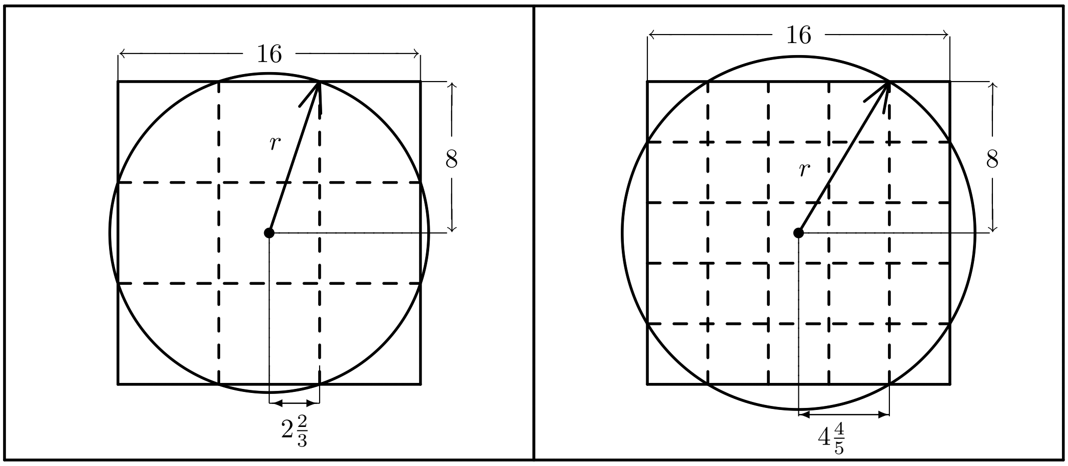

Abbildung 5: Approximation eines Kreises durch ein Quadrat mit drei Unterteilungen (links) und fünf Unterteilungen (rechts).

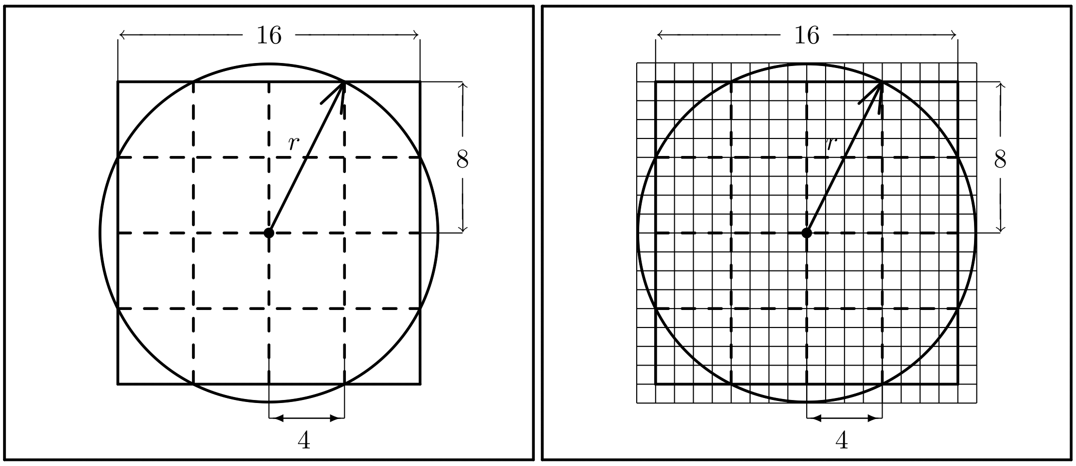

Abbildung 6: Approximation eines Kreises durch ein Quadrat mit vier Unterteilungen.

Wenn man die Seiten des Quadrats also durch vier Teilpunkte unterteilt, dann erhält man die in Abbildung 6, linkes Teilbild dargestellte Situation. Eine kurze Rechnung zeigt, daß Quadrat und Kreis nahezu die gleiche Fläche haben (Kreisfläche = 251.327 gegen Fläche des Quadrats = 256). Die Frage ist jetzt: Welchen Radius hat der Kreis. Wir können den Radius leicht vermittels des Satzes von Pythagoras auf $\sqrt{80} \approx 8.944 \approx 9$ berechnen, einem altägyptischen Schreiber stand aber dieser Satz nicht zur Verfügung, zudem hätte er die Quadratwurzel nicht ermitteln können. Hermann Engels [17] hat darauf hingewiesen, daß die Alten Ägypter gewohnt waren, Zeichnungen (und auch Statuen) vermittels eines Quadratnetzes zu zeichnen. Auf diese Weise wurde sichergestellt, daß der klassische Formenkanon eingehalten wurde. Überzieht man jetzt das Quadrat mit einem Gitternetz der Maschenweite 1, dann sieht man unmittelbar, daß der

Radius des Kreises nahe bei 9 liegt (Abbildung 6, rechtes Teilbild).

Dieser Gedankengang ist recht einleuchtend. Alle Überlegungen sind ausführbar ohne Zuhilfenahme des Satzes von Pythaboras, allein durch geometrische Konstruktionen (möglicherweise auf einer ebenen geglätteten Sandfläche, wie dies von den Alten Griechen bekannt ist). Gegen die Gitternetzkonstruktion wäre allenfalls einzuwenden, daß es keine Beispiele einer solchen Konstruktion im Zusammenhang mit Kreisen gibt und daß die altägyptischen Gitternetze eher weitmaschig waren.

Eine dritte Konstruktion findet man in dem Buch von Olivastro [39, S. 68]. Sie geht auf K. Vogel zurück [61, S. 381]. Hier wird ein Quadrat der Seitenlänge 9 einem Kreis umschrieben (Abbildung 7). Dann wird das Quadrat wie in Abbildung 5, linkes Teilbild in neun Teilquadrate der Seitenlänge 3 unterteilt. Schneidet man von den vier Teilquadraten in den Ecken die Hälfte ab, dann entsteht eine recht gute polygonale Approximation des Kreises. Der Flächeninhalt der Restfigur ist $81 - 2 = 63$, das heißt, der Kreis wäre damit einem Quadrat der Seitenlänge $\sqrt{63}$ flächengleich. Mit diesem Wurzelausdruck wußte ein altägyptischer Schreiber wenig anzufangen, er wußte jedoch recht gut, daß $8 \times 8 = 64$ ist. Wenn man alos nur ein wenig „mogelt“ und die Zahl 63 durch die bequemere Zahl 64 ersetzt, dann erhält man einen einfacheren Ausdruck für die Seite des dem Kreise flächengleichen Quadrats und kommt so zu der Formel des Ahmose. Übrigens: Wie wir heute leicht nachrechnen können, wird durch diese kleine Schummelei die Approximationsgüte der erhaltenen Formel noch verbessert. Der Aufgabe 48 des Papyrus Rhind ist eine kleine Zeichnung beigefügt, die durchaus der Zeichnung in Abbildung 7 entsprechen könnte. In dieser Aufgabe wird sonst lediglich ausgerechnet, daß $8 \times 8 = 64$ und $9 \times 9 = 81$ ist. In der Zeichnung steht eine 9. Man kann also hier leicht Beziehungen zu Ahmoses Aufgabe 50 und zu der Skizze nach Vogel herstellen.

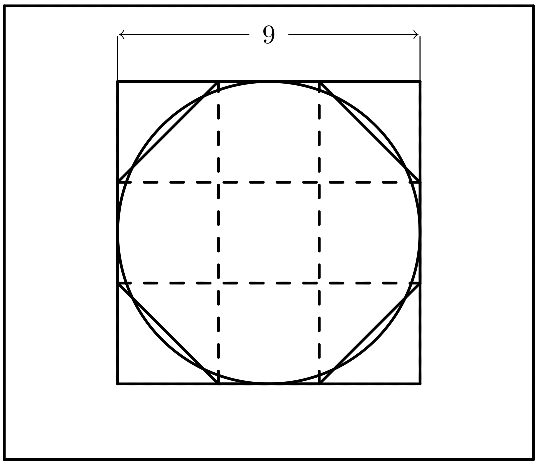

Abbildung 7: Konstruktion nach Vogel.

Man kann sich schwer vorstellen, daß das Problem der Berechnung des Flächeninhaltes eines kreisrunden Feldes für die Alten Ägypter irgendwelche Bedeutung hatte. Man findet bei Ahmose insgesamt fünf Aufgaben, die mit π zu tun haben. Vier dieser Aufgaben behandeln das Problem, den Rauminhalt eines Kornspeichers zu ermitteln. Wir wissen aus Darstellungen, daß die altägyptischen Kornspeicher Bienenkorbform hatten, das heißt, man konnte sie in guter Näherung durch Zylinder approximieren. In den sogenannten Lahun-Fragmenten (auch Kahun, Illahun oder El Lahun; vgl. Tabelle 1) wird ebenfalls der Ahmosesche Näherungswert für π bei der Berechnung des Volumens eines Kornspeichers verwendet [29]. Eine kleine Sensation war es, als Struve im

Jahre 1930 ein Buch über den Moskauer Papyrus herausgab [58]. Demnach besaßen die Alten Ägypter die Fähigkeit, die Oberfläche einer Halbkugel zu berechnen, übrigens mit der gleichen Approximation für π, die wir bei Ahmose kennengelernt haben. In der Zwischenzeit hat man alternative Interpretationen für die fragliche Aufgabe 10 des Papyrus Moskau gefunden, die weniger spektakulär sind [62, S 52f].

In Aufgabe 42 berechnet Ahmose das Volumen eines Kornspeichers, welcher einen Durchmesser von 10 Ellen und eine Höhe von 10 Ellen hat. Hier zeigt sich das Problem bei dieser Methode, Ahmose muß sehr viel rechnen. Dies liegt an der Bruchdarstellung der Ägypter. Zunächst muß Ahmose $\frac{1}{9}$ von 10 bilden und den erhaltenen Wert von 10 abziehen. In kurzen Worten, Ahmose hatte $8\frac{8}{9}$ zu berechnen. In seiner Schreibweise ist dies $8\dfrac{8}{9} = 8 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{18}$. Dieser letztere Ausdruck ist zu quadrieren. Man versuche einmal, dies nachzuvollziehen unter der Voraussetzung, daß nur Stammbrüche verwendet werden dürfen, und man hat dann einen kleinen Eindruck davon, wie aufwendig diese Prozedur ist. Gemessen an der Aufgabenstellung, der Ermittlung des Volumens eines Kornspeichers, ist der Aufwand völlig unangemessen. Hätte Ahmose einfach $\pi \approx 3$ gewählt, dann hätte er das Resultat ohne lange Rechnung sofort angeben können und hätte einen Fehler von weniger als 5 % gemacht. Angesichts der Tatsache, daß ein aus Lehmziegeln hergestellter Kornspeicher sicher nicht mit hoher Präzision gefertigt ist und daß das Resultat der Berechnung nicht so furchtbar genau sein muß, wird klar, daß die Formel des Ahmose zwar eine beeindruckende Demonstration mathematischer Fähigkeiten der Alten Ägypter ist, daß sie aber für den praktischen Gebrauch sehr unhandlich gewesen sein muß. In einem demiotischen Papyrus des dritten Jahrhunderts v. Chr., welcher im Kairoer Museum zu finden ist, wird die für praktische Zwecke bequeme Approximation $\pi \approx 3$ angegeben [48, S. 45f]. Es ist möglich, daß der genauere Wert des Ahmose im Laufe von mehr als tausend Jahren außer Gebrauch kam, es ist aber auch denkbar, daß der Ahmosesche Wert für „reine“ Mathematiker gedacht war, die Näherung $\pi \approx 3$ hingegen von Praktikern bevorzugt wurde. Im Horustempel von Edfu findet sich eine Inschrift aus dem zweiten vorchristlichen Jahrhundert, welche Schenkungen betrifft. Dort werden Flächeninhalte für Felder, die eine allgemein viereckige Form haben, dadurch berechnet, daß man die Mittelwerte der Längen zweier Paare gegenüberliegender Seiten miteinander multipliziert. Diese Formel ist nur dann richtig, wenn es sich bei den Vierecken um Rechtecke handelt [63]. Im Gegensatz zur Fläche des Kreises kann man bei der Berechnung der Fläche des Vierecks durch passend gewählte Gegenbeispiele auch mit den Mitteln der ägyptischen Geometrie leicht feststellen, daß diese Formel so nicht allgemein richtig sein kann. Höchste Präzision bei der Flächen- oder Inhaltsberechnung scheint also in der Tat nicht ein Problem gewesen zu sein, welches den ägyptischen Mathematikern allzuviel Kopfzerbrechen verursacht hat.

Im Jahre 1936 fand man in Susa nahe bei Babylon eine Tontafel, aus der man herauslesen kann, daß das Verhältnis des Kreisumfangs zum Durchmesser $3\frac{1}{8}$ ist. Dieser Wert wäre so genau wie der von Ahmose, jedoch herrscht keine Einigkeit daüber, wie dieses Resultat einzuordnen ist. Es gibt keinen weiteren Beleg für diese Näherung, und es scheint noch zu früh, hieraus weitergehende Konsequenzen abzuleiten (vgl. etwa [9, S. 21] oder [38, S. 46f, S. 52]).

7 Euklid

Bevor wir jetzt die Geschichte von π zu Ende bringen, möchte ich noch Ihr Vertrauen in die eingangs angegebenen Formeln für den Umfang und den Flächeninhalt eines Kreises erschüttern. Lassen Sie uns einmal annehmen, wir lebten nicht auf einer flachen Scheibe, wie es der Augenschein bei einem Besuch in Dithmarschen so eindrucksvoll lehrt, sondern auf einer Kugel. Wissenschaftler auf dieser Kugel wollen es genau wissen und konstruieren einen sehr großen Kreis vom Radius r und messen dessen Umfang – ohne zu wissen, daß sie „eigentlich“ auf einer Kugel vom Radius R leben. In Abbildung 8 sind die Verhältnisse dargestellt. Nehmen wir der Einfachheit halber an, daß sich der Mittelpunkt M des Kreises im Nordpol befinde, dann kann man den Radius r durch die „Poldistanz“ φ (das heißt, 90^o- geographische Breite) charakterisieren, es ist nämlich $r = R \cdot \varphi$. Ein wenig Rechenarbeit liefert für den Umfang des Kreises die Formel

$$U = 2\pi R \sin\varphi = 2\pi r \frac{\sin\varphi}{\varphi} \approx 2\pi r \left(1 - \frac{\varphi^2}{3!} + \frac{\varphi^4}{5!} + \frac{\varphi^6}{7!} + - \cdots\right),$$

und das heißt, daß nur für Werte r, die „klein“ sind im Vergleich zu R (beziehungsweise für kleine φ), der Umfang mit großer Genauigkeit $= 2\pi r$ sein wird, für größere r ist der Umfang kleiner als $2\pi r$. Ganz analog gilt für den Flächeninhalt des Kreises:

$$F = 2\pi R^2(1 - \cos\varphi) = 2\pi r^2 \frac{1 - \cos\varphi}{\varphi^2} \approx \pi r^2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\varphi^2}{4!} + \frac{\varphi^4}{6!} - \frac{\varphi^6}{8!} + - \cdots\right),$$

und auch hier gilt die eingangs genannte Formel allenfalls für kleine Kreise.

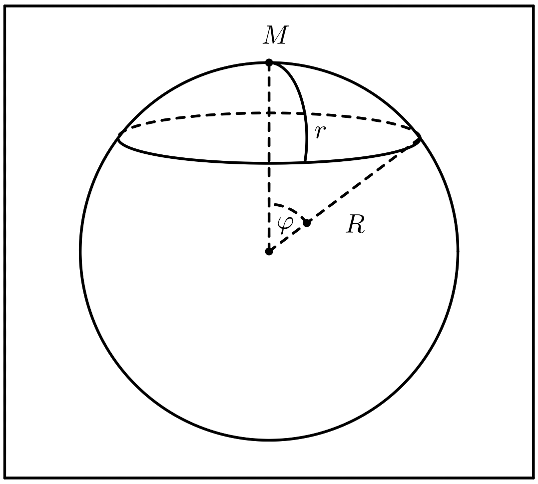

Abbildung 8: Ein Kreis auf einer Kugelobefläche.

Sie werden einwenden, daß hier gemogelt wurde, daß man den Radius des Kreises nicht längs der Erdoberfläche messen muß, sondern als Radius den Abstand der Kreisperipherie von der Erdachse zu wählen hat. Erzählen sie dies einmal unseren Wissenschaftlern, die glauben, auf einer Ebene zu leben! Dieses Beispiel ist nicht so weit hergeholt, wie man vielleicht im ersten Augenblick meinen möchte. Seit Einstein wissen wir, daß unser Universum nicht Euklidisch ist, und das bedeutet nichts anderes, als daß bei einer Vermessung eines Kreises in unserer „realen“ Welt der Umfang nicht immer gleich $2\pi r$ sein wird. Dies wurde zuerst im Jahre 1908 von Paul Ehrenfest [15] bemerkt und ist als das „Ehrenfest-Paradoxon“ bekannt. 1912 wird diese Erscheinung von Albert Einstein beiläufig erwähnt [16]. Es ist also doch nicht so ganz einfach mit unseren Formeln zur Kreisberechnung. Wir müssen uns fragen, was sie „wirklich“ bedeuten. Der bedeutende Mathematiker Edmund Landau (1877–1938) hatte – wohl zur Vermeidung ontologischer Konfusionen – in einem Lehrbuch die Zahl $\pi/2$ als die kleinste positive Nullstelle der Cosinusfunktion definiert. Der Mathematiker Ludwig Bieberbach, der eine nationalsozialistische „Deutsche Mathematik“ vertrat, denunzierte Landaus Behandlung von π als undeutsch und bewirkte schließlich, daß Landau im Jahre 1934 in den vorzeitigen Ruhestand versetzt wurde. Der britische Mathematiker Godfrey Harold Hardy (1877–1947) schrieb in einem offenen Brief an Bieberbach:

> There are many of us, many Englishmen and many Germans, who said things during the War which we scarcely meant and are sorry to remember now. Anxiety for one's own position, dread of falling behind the rising torrent of folly, determination at all cost not to be outdone, may be natural if not particularly heroic excuses. Professor Bieberbach's reputation excludes such explanations of his utterances, and I find myself driven to the more uncharitable conclusion that he really believes them true.

Euklid von Alexandria (365 v. Chr. (?) – 300 v. Chr. (?)) war der Begründer der modernen Mathematik. Er lebte zur Zeit des ägyptischen Königs Ptolemaios I. Soter (367/66 v. Chr. – 282/281 v. Chr.) in der von Alexander dem Großen 332/31 v. Chr. gegründeten Stadt Alexandria. Ptolemaios war einer der Generäle Alexanders des Großen und dessen Freund. Im Verlauf der Diadochenkämpfe nach Alexanders Tod (323 v. Chr.) nahm er im Jahre 305 v. Chr. den Königstitel an und wurde damit Gründer der Dynastie der Ptolemäer in Ägypten. Diese Dynastie endete im Jahre 30 v. Chr. mit dem Tode der letzten Herrscherin, Kleopatra der Großen (Kleopatra VII.) (69 v. Chr. – 30 v. Chr.), über die zur Zeit im Bucerius Kunstforum eine Ausstellung stattfindet. Ptolemaios war ein fähiger Herrscher. Er förderte Wissenschaften und Künste, insbesondere gründete er die Alexandrinische Bibliothek. Es gibt eine Anekdote über Ptolemaios und Euklid. Demnach verspürte der Herrscher den Wunsch, Mathematik zu lernen. Er wußte, daß Euklid in seiner Stadt lebte und ließ diesen bitten, ihn Mathematik zu lehren. Euklid lehnte ab – ein recht kühnes Verhalten angesichts eines ausgesprochenen Wunsches des Königs. Er begründete seine Ablehnung mit den Worten: „Es gibt keinen Königsweg zur Mathematik", das heißt, auch für einen König gibt es kein anders Mittel als zu lernen und zu arbeiten, und Euklid zweifelte wohl, daß Prolemaios dazu Neigung, Zeit und Fähigkeit habe.

In unserer Geschichte über π markiert Euklid eine neue Art und Weise, mit Mathematik umzugehen, eben die moderne Art und Weise. Er legte in 13 Büchern das mathematische Wissen seiner Zeit nieder. Wenn auch nicht alles, was man in diesen Büchern findet, auf Euklid selbst zurückgeht, so ist die Art und Weise, wie der die Mathematik präsentierte, revolutionär. Seine Bücher waren bis ins 19. Jahrhundert als Lehrbücher im Gebrauch, man kann die zeitlose Wirkung dieser Bücher nur mit der der Bibel vergleichen. Euklid war nicht an dem Zahlenwert für π interessiert. Dies war nicht der „Stil" der griechischen Mathematik seiner Zeit, so hatte etwa Aristoteles (384 v. Chr. – 322 v. Chr.) gefordert, daß man Geometrie und Arithmetik nicht vermenge [7, S. 271f]. Für Euklid war die erste der eingangs genannten „naiven" Fragen von Interesse: „Wieso ist π, das Verhältnis von vom Flächeninhalt eines Kreises zum Quadrat seines Radius, unabhängig von der Größe eines Kreises?" Es ist interessant, zu sehen, auf welche Weise Euklid diese Frage beantwortete.

Zunächst einmal wußte Euklid, daß für Polygone, das heißt, geometrische Gebilde, die von einem Streckenzug berandet sind (vgl. Abbildung 9), die Aussage richtig ist, daß bei einer Maßstabstransformation der Flächeninhalt dem Quadrat des Maßstabsfaktors proportional ist. Euklid hatte nämlich gezeigt, daß diese Aussage für alle Dreiecke gilt. Ein Polygon läßt sich aber in Dreiecke zerlegen, die das Polygon vollständig und – bis auf Randpunkte – überlappungsfrei überdecken (Abbildung 9), so daß sich ihre Flächeninhalte zu dem Flächeninhalt des Polygons addieren. Eine solche Zerlegung in Dreiecke ist aber für einen Kreis nicht möglich. Euklid betrachtete im XII. Buch in Satz 2 zunächst ein Quadrat, welches einem Kreis eingeschrieben ist, das heißt, das größte Quadrat, welches ganz im Kreis liegt, und ein Quadrat, welches einem Kreis umschrieben ist, das heißt, das kleinste Quadrat, welches diesen Kreis ganz enthält (Abbildung

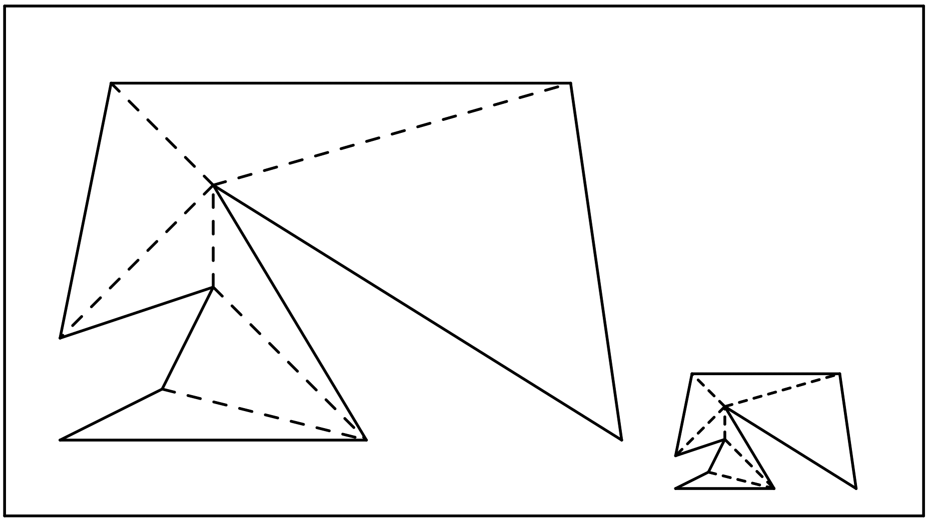

Abbildung 9: Transformation eines Polygons.

Die beiden Polygone unterscheiden sich um einen Maßstabsfaktor 3. Eine Zerlegung der Polygone in Dreiecke ist durch gestrichelte Linien angedeutet.

10, linkes Teilbild). Es ist leicht zu sehen, daß das umschriebene Quadrat die doppelte Fläche hat, wie das eingeschriebene, denn wenn man in Abbildung 10 die Ecken des umschriebenen Quadrats nach innen umklappt, dann überdecken sie genau das eingeschriebene Quadrat (durch die dünnen Linien angedeutet). Es folgt unmittelbar, daß das eingeschriebene Quadrat mindestens die halbe Fläche des Kreises hat, beziehungsweise, die Restfläche die nach Entfernung des eingeschriebenen Quadrats vom Kreis übrigbleibt, hat höchstens den halben Flächeninhalt des Kreises.

Euklid betrachtet nun das regelmäßige eingeschriebene Achteck, welche aus dem eingeschriebenen Quadrat durch Hinzufügen zusätzlicher Ecken entsteht (Abbildung 10, rechtes Teilbild). Man kann dieses Achteck dadurch konstruieren, daß man an das Quadrat (gestrichelt) Dreiecke anfügt. Jedes dieser Dreiecke kann man in geeignete Rechtecke einbetten (Abbildung 11, ein solches Rechteck ist gestrichelt dargestellt), die genau die doppelte Fläche der Dreiecke haben und die den entsprechenden Kreisbogen enthalten. Somit kann man auch hier wieder den Schluß ziehen, daß der Teil des Kreises, der nach Entfernung des Quadrats übrigbleibt, mindestens die halbe Fläche dieser Rechtecke hat, oder umgekehrt, der Teil des Kreises, der nach Entfernung des Achtecks übrigbleibt, hat höchstens ein Viertel der Fläche des Kreises. Diese Prozeß kann fortgesetzt werden, und man gelangt so auf eine Folge von eingeschriebenen regulären 2^n-Ecken ($n = 2, 3, , \cdots$), so daß die verbleibende Fläche des Kreises jeweils kleiner als 2^{-n+1} ist. Jedes dieser eingeschriebenen Polygone hat eine Fläche, die zu dem Quadrat des Durchmessers des Kreises proportional ist.

In moderner Sprechweise würde man nun sagen, daß die Folge der eingeschriebenen Polygone gegen den Kreis konvergiert und daß der Flächeninhalt des Kreises der Grenzwert der Flächeninhalte der Polygone ist, und daß damit der Flächeninhalt des Kreises dem Quadrat des Durchmessers proportional ist. Für Euklid wäre eine solche Schlußweise nicht akzeptabel gewesen. Einmal gab es zu seiner Zeit keinen Grenzwertbegriff im heutigen Sinne und dann hätte Euklid wahrscheinlich dieses Beweismittel mit Mißtrauen betrachtet, denn zu seiner Zeit war man auf Grund schlim-

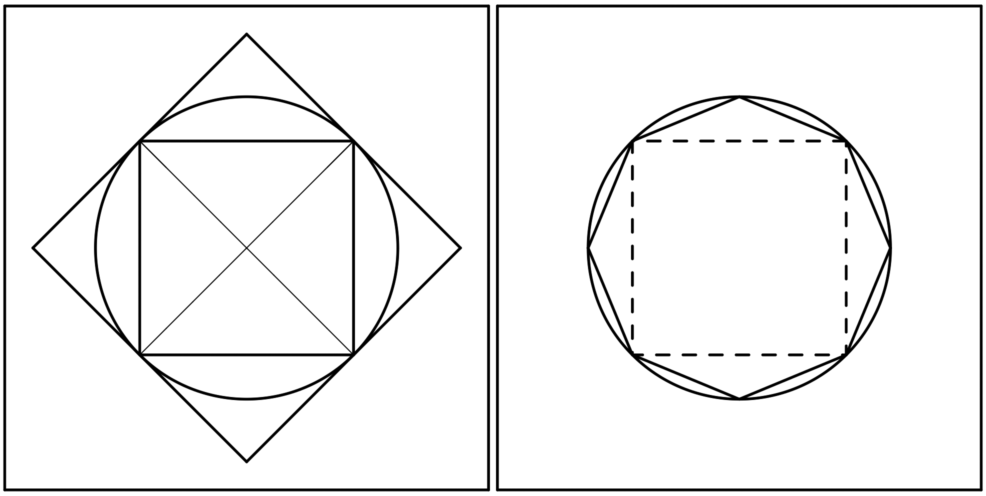

Abbildung 10: Approximation eines Kreises durch ein eingeschriebenes und ein umschriebenes Quadrat (links) sowie durch ein eingeschriebenes Achteck (rechts).

mer Erfahrungen vorsichtig mit Aussagen über unendliche Prozesse. Schließlich ist eine solche "schwere Waffe" im vorliegenden Fall unnötig.

Euklid argumentierte wie folgt: Wir nehmen an, es gebe zwei Kreise, deren Flächenverhältnis verschieden sei von Verhältnis der Quadrate der Durchmesser. Das heißt, die Fläche des einen sei im Vergleich mit der Fläche des anderen zu klein (andernfalls vertauschen wir die Rollen der beiden Kreise). Wir wählen den anderen Kreis als den „Standardkreis" und untersuchen den ersten, den wir als „Vergleichskreis" bezeichnen wollen. In beiden Kreisen konstruieren wir, wie angedeutet, die eingeschriebenen 4-, 8-, 16-, $\cdots 2^n$-Ecke. Nun ist die Fläche des Vergleichskreises kleiner als der Standard-Flächeninhalt, den man erhält, wenn man den Flächeninhalt des Standardkreises mit dem Quadrat des Durchmesserverhältnisses multipliziert. Andererseits transformieren sich die Flächeninhalte der dem Standardkreis eingeschriebenen 2^n-Ecke nach Multiplikation mit dem Quadrat des Durchmesserverhältnisses in die Flächeninhalte der dem Vergleichskreis eingeschriebenen 2^n-Ecke. Der tatsächliche Flächeninhalt des Vergleichskreises ist nach Annahme kleiner als der nach Transformationsregel aus dem Standardkreis berechnete Flächeninhalt, andererseits nähern sich die Flächeninhalte der dem Vergleichskreis eingeschriebenen 2^n-Ecke dem berechneten Flächeninhalt. Denmach muß für ein hinreichend großes n die folgende Situation auftreten: Der Flächeninhalt des Vergleichskreises ist kleiner als der Flächeninhalt des ihm eingeschriebenen 2^n-Ecks und dieser wiederum ist kleiner als der nach Transformationsregel berechnete Flächeninhalt, denn alle 2^n-Ecke im Standardkreis sind vollständig in ihm enthalten, haben also eine kleinere Fläche als dieser. Nun haben wir aber einen Widerspruch: Für den Vergleichskreis ist der (reale) Flächeninhalt kleiner als der des eingeschriebenen 2^n-Ecks, jedoch liegt dieses voll im Kreis. Daraus folgt, daß unsere ursprüngliche Annahme, die beiden Kreisflächen ständen nicht im Verhältnis der Quadrate der Durchmesser, falsch war.

Einige Bemerkungen sind hier angebracht:

- Euklid verwendet hier die Exhaustionsmethode des Eudoxos von Knidos (408 – 355 v.Chr.), die auf Antiphon (5./4. Jahrhundert v. Chr.) zurückgehen soll. Diese Methode zur Berechnung des Flächeninhalts einer krummlinig berandeten Figur ist eine Vorläufermethode der

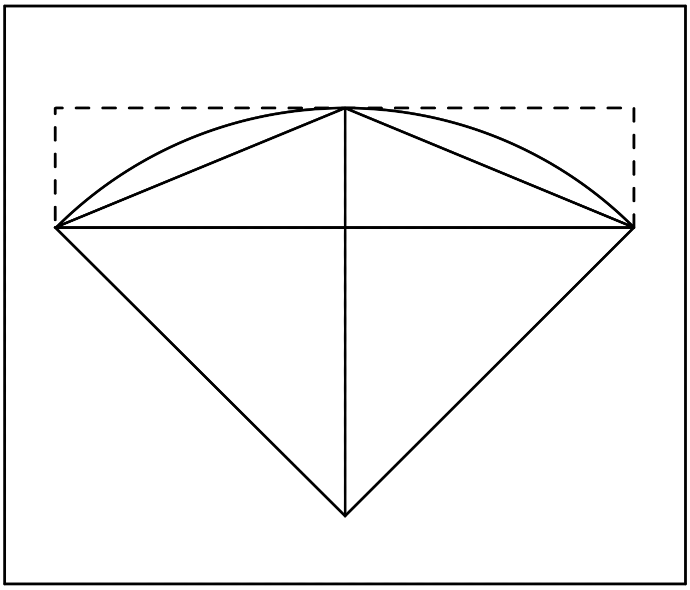

Abbildung 11: Konstruktion des eingeschriebenen Achtecks aus dem eingeschriebenen Quadrat.

Durch Halbierung des von der oberen Quadratseite abgeschnittenen Kreisbogenstücks wird ein eingeschriebenes regelmäßiges Achteck konstruiert. Die beiden dadurch entstehenden Dreiecke haben die halbe Fläche des schraffiert gezeichneten Rechtecks.

modernen Integralrechnung.

- Euklid benutzt durchweg „endliche“ Argumente, und ein Rekurs auf das Unendliche beziehungsweise ein Grenzübergang ist hier auch nicht notwendig. Der Respekt vor dem Unendlichen war bei den griechischen Philosophen durch die Antinomien des Zenon von Elea (um 490 – um 430 v. Chr.) geweckt worden. Aristoteles (384 – 322 v. Chr.) hatte das *aktual Unendliche* als für den menschlichen Verstand nicht Zugängliches mit einem Verbot belegt und ließ nur das *potentiell Unendliche*, also das Unendliche als nicht endenden Prozeß zu. Erst in der Neuzeit wurde dies Verbot gelockert.

- Der Schluß des Euklid der *reductio ad absurdum*, das heißt, die Verwerfung einer Annahme, die im Widerspruch zu gesicherten Aussagen steht, ist eine klassische Methode der Logik, die allerdings auch nicht ganz unumstritten ist.

Wir hatten uns eingangs überlegt, daß die Aussage, daß sämtliche Kreise das gleiche Verhältnis von Fläche zu Quadrat des Durchmessers haben, in der „wirklichen Welt“ falsch ist. Euklids Beweiskette ist durchaus zwingend, wo steckt also nun der „Fehler“? Geht man die Argumentationskette zurück, dann landet man schließlich bei der Fläche des Dreiecks, auf der alles basierte. Tatsächlich basiert die *Euklidische Geometrie* auf gewissen Grundannahmen, den *Axiomen.* Zu diesen gehört das Parallelenaxiom oder aber die Annahmen der Dreiecksgeometrie, etwa daß die Winkelsumme im Dreieck gerade 180^o beträgt. Wenn man die Axiome Euklids voraussetzt, dann gelangt man zwingend zu den eingangs zitierten Formeln für Kreisumfang und -inhalt. Es heißt, daß Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855) bei seiner Landesvermessung die Winkelsumme des zu seiner Zeit größten untersuchten Dreiecks (mit den Eckpunkten Brocken – Hoher Hagen –

Inselsberg) prüfte. Es ist nicht anzunehmen, daß Gauß wirklich eine Abweichung von 180^o erwartete, jedoch hatte er sich mit nichteuklidischer Geometrie beschäftigt, und hätte die Prüfung der Winkelsumme eine Abweichung gegeben, dann wäre dies eine bemerkenswerte Sensation gewesen.

8 Archimedes

Der Mathematiker und Physiker Archimedes von Syrakus (um 285 – 212 v. Chr.) untersuchte die zweite der eingangs erwähnten Fragen: Warum taucht beim Umfang und bei der Fläche die gleiche Konstante π auf? Er formulierte die Aussage, daß der Flächeninhalt eines Kreises gleich dem Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks sei, dessen eine Kathete die Länge des Radius und die andere die Länge des Umfangs habe. Ganz wie Euklid betrachtete er ein dem Kreis eingeschriebenes regelmäßiges 2^n-Eck. Wenn man dieses auf naheliegende Weise in gleichseitige Dreiecke zerlegt und deren Basisseiten, also die Seiten, die der Kreisperipherie am nächsten liegen, aneinanderlegt, dann summieren sich diese Basisseiten gerade zum Umfang des 2^n-Ecks. Die Höhen dieser Dreiecke nähern sich mit wachsendem n dem Radius des Kreises. In Abbildung 12 ist diese Konstruktion für das eingeschriebene Achteck dargestellt. Ergänzt man diese Figur durch geeignetes Hinzufügen der gleichen Anzahl kongruenter Dreiecke, dann entsteht ein Parallelogramm, dessen Fläche gerade doppelt so groß ist wie die Geamtfläche des 2^n-Ecks. Sie läßt sich berechnen als das Produkt der Höhe des Parallelogramms – also der Höhe eines Dreiecks – und der Basisseite des Parallelogramms – also des Umfangs 2^n-Ecks. Durch eine ähnliche Argumentation wie bei Euklid kann dann Archimedes seinen Satz zeigen.

Bemerkenswert ist, daß Archimedes' Zeitgenossen Kritik übten an der Annahme, daß man der Peripherie eines Kreises überhaupt eine Länge zuordnen könne [7, S. 301].In der Tat hat sich in der Neuzeit herausgestellt, daß der Begriff der Länge einer Kurve höchst diffizil ist. Es gibt eine große Anzahl von Kurven, denen man keine Länge zuordnen kann. Hierzu gehören solch „alltägliche“ Kurvenverläufe wie die Brownsche Bewegung oder die Kursverläufe an der Börse.

Archimedes hat noch eine weitere Aussage hergeleitet. Er hat den Beweis von Euklid „praktisch“ gemacht. Hierzu ging er zunächst von einem dem Kreis eingeschriebenen Sechseck aus und halbierte jeweils – ganz nach dem Muster von Euklid die Seiten, bis er zu einem regelmäßigen eingeschriebenen 96-Eck kam. Nun ist es nicht ganz einfach, die Fläche eines 96-Ecks auszurechnen, denn es treten dabei Wurzelausdrücke auf, die recht kompliziert sind. Mehr noch, zu Archimedes' Zeit gab es keine guten Berechnungsmethoden für Quadratwurzeln, man mußte diese durch Brüche annähern. Archimedes approximierte nun diese Wurzeln jeweils so, daß er mit Sicherheit eine *untere* Schranke für den Flächeninhalt des 96-Ecks erhielt. Dieser Vorgang ist recht technisch und soll hier nicht vorgeführt werden. In dem Buch von Cantor [7, S. 302f] sind die Berechnungen des Archimedes detailliert dargestellt. Als Resultat erhielt er, daß π größer ist als $3\frac{10}{71}$. Letzterer Wert liegt bei 3.1408 und weicht nur um 0.0238% von π ab.

Archimedes wiederholte seine Konstruktion, nur schloß er den Kreis in ein umschriebenes regelmäßiges 96-Eck ein und approximierte die auftretenden Wurzelausdrücke so, daß er eine Einschließung von oben erhielt. Das Resultat war, daß π kleiner ist als $3\frac{1}{7}$ oder etwa 3.1429. Diese Näherung weicht um 0.04% von π ab. Wir hatten sie bei der Cheopspyramide kennengelernt, dort ergibt sie sich anscheinend zufällig als Verhältnis vom halben Umfang der Grundfläche zur Höhe. Insgesamt hatte Archimedes also gezeigt, daß gilt

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Man kann ohne Übertreibung sagen, daß diese Einschließung das erste Beispiel für *numerische* Mathematik im heutigen Sinne darstellt. Euklid war offensichtlich diesem Resultat sehr nahe, und man fragt sich, warum er nicht auch eine ähnliche Einschließung vorgelegt hat. Eine solche Frage ist müßig, sicherlich war Euklid an dem genauen Wert von π kaum interessiert.

Wichtig ist noch, daß Archimedes nicht nur ein sehr bemerkenswertes Resultat vorgelegt hat, also nicht nur eine sehr präzise Näherung für π sowie auch noch eine Angabe über den Fehler dieser Abschätzung, sondern daß er auch eine allgemeine Methode geschaffen hatte. Tatsächlich bildete die Archimedische Methode der Einschließung bis in die Neuzeit die Standardmethode zur Approximation von π. Im Jahre 1610 berechnete Ludolph von Ceulen (1540 – 1610) vermittels der Archimedischen Methode durch Approximation mit 2^{62}-Ecken den Wert von π auf 35 Dezimalstellen. Er ließ diese Näherung sogar auf seinen Grabstein schreiben.

9 Lambert – Lindemann

Es würde zu weit führen, zu untersuchen, wie andere Kulturen das Problem der Messung des Kreisumfangs und des Kreisinhalts behandelt haben. Hierzu sei auf die Literatur verwiesen.

Ebenso kann hier nicht auf die Entwicklung in der Neuzeit eingegangen werden. Die Dinge werden zunehmend „mathematischer“, so daß man doch allzuweit ausholen müßte. Zwei Namen seien noch genannt. Der eine ist der bedeutende und außerordentlich vielseitige Wissenschaftler Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777), der nachwies, daß π irrational ist. Der Beweis dieser Aussage ist nicht eben schwierig, mit geeigneten Hilfen stellt er eine – allerdings anspruchsvolle – Übungsaufgabe für eine Studentin oder einen Studenten im dritten Semester dar. Die Bedeutung der Aussage ist, daß man π weder durch einen gewöhnlichen Bruch noch durch eine endliche Dezimalzahl darstellen kann. Diese Aussage ist recht interessant, aber noch nicht alarmierend. Schließlich ist die Quadratwurzel aus 2 ebenfalls irrational, wie schon bei Plato zu lesen ist, aber sie ist geometrisch leicht konstruierbar, die Diagonale eines rechtwinkligen Dreiecks mit Kathetenlänge 1 hat eine Hypotenuse der Länge $\sqrt{2}$. Das Resultat von Lambert ließ also immer noch die Möglichkeit offen, einen Kreis allein mit Zirkel und Lineal in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln, eben die berühmte *Quadratur des Kreises* auszuführen. Dieses Problem läßt sich bis auf Antiphon (5./4. Jahrhundert v. Chr.) zurückverfolgen, der vorgeschlagen haben soll, den Kreis durch regelmäßige Vielecke anzunähern. Auch Anaxagoras von Klazomenai (500 v.Chr. – 428 v. Chr.) soll sich mit der Quadratur des Kreises befaßt haben. Es hat zahlreiche Versuche gegeben, dieses Problem zu lösen, genannt sei hier nur der Theologe, Mathematiker und Philosoph Nikolaus von Kues (1401 – 1464). Die Quadratur des Kreises ist eines der wenigen mathematischen Probleme, die sogar im Volksmund als Redewendung bekannt wurden. Der bedeutende Hamburger Mathematiker Hermann Cäsar Hannibal Schubert (1848–1911), welcher besonders wegen seiner Verdienste um die Popularisierung der Mathematik zu rühmen ist [6], hat ein Buch geschrieben mit dem hübschen Titel *Die Quadratur des Zirkels in berufenen und unberufenen Köpfen, eine kulturgeschichtliche Studie*. Dort schildert er amüsant die Geschichte der Quadratur des Kreises. Als Leseprobe sei eine Passage aus diesem Buch zitiert [52, S. 3]:

> Die Mémoires de L'Académie française vom Jahre 1775 enthalten auf Seite 61 den Beschluß der französischen Akademie, daß sie von da an keine ihr eingereichte sogenannte „Lösung der Quadratur des Zirkels“ mehr prüfen wolle. Zu diesem Beschluß war die Akademie durch die überwältigende Zahl der ihr allmonatlich übersandten angeblichen Lösungen des berühmten Problems bewogen worden, Lösungen, welche

zwar immer die Ignoranz ebenso wie das Selbstbewußtsein des Verfassers besthätigten, aber sämmtlich unter dem in der Mathematik etwas schwer wiegenden Fehler litten, daß die *falsch* waren. Seitdem finden alle bei den Akademien eingereichten vermeintlichen Lösungen des Problems dort ihren sicheren Papierkorb und bleiben ewig unbeantwortet.

Im Jahre 1882 erschien dann eine Arbeit von Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852 – 1939), die unter alle diese Quadraturbemühungen einen Schlußstrich setzte. Lindemann wies nach – sein Beweis ist übrigens sehr viel anspruchsvoller als der von Lambert – daß die Zahl π keine algebraische Zahl ist. Das heißt, π läßt sich nicht als Lösung einer Polynomgleichung $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ mit rationalen Koeffizienten a_i und mit $x = \pi$ darstellen. Dieses recht abstrakte Ergebnis besagt insbesondere, daß sich eine Strecke der Länge π nicht mit Zirkel und Lineal darstellen läßt, denn alle Zahlen, die sich auf diese Weise als Länge einer Strecke konstruieren lassen, genügen einer solchen algebraischen Gleichung. Es ist vielleicht unnötig, zu bemerken, daß die Arbeit von Lindemann die „unberufenen Köpfe“ nicht daran hinderte, weiterhin mathematische Institute mit Vorschlägen zur Quadratur des Kreises zu behelligen.

Eine kleine Abschweifung zur wechselvollen Geschichte von π sei noch gestattet. Der US-Staat Indiana hatte im Jahre 1897 das Repräsentantenhaus eine Gesetzesvorlage erarbeitet, in der festgestellt wurde:

> Be it enacted by the General Assembly of the State of Indiana: It has been found that a circular area is to the square on a line equal to the quadrant of the circumference, as the area of an equilateral rectangle is to the square of one side. (Section I, House Bill No. 246, 1897)

Buchstäblich in letzter Minute wurde durch Einspruch eines Mathematikers verhindert, daß fortan in Indiana $\pi = 4$ gesetzlich festgeschrieben wurde. Der Senat vertagte die Annahme des Gesetzes auf unbestimmte Zeit.

10 206 Milliarden Stellen von π

Die moderne Geschichte von π wird mehr und mehr mathematisch und soll hier nicht behandelt werden. Hierfür wird auf das unlängst erschienene Buch von Alfred S. Posamentier and Ingmar Lehmann [44] verwiesen.

Nach Ludolph van Ceulen hielt man sich bei der Berechnung der Zahl π an die Definition über trigonometrische Funktionen und konnte so eine sehr große Anzahl von Dezimalstellen berechnen. Die Archimedische Methode hat nämlich einen Nachteil, sie ist numerisch nicht günstig, wenn man eine sehr große Anzahl von Ecken hinzunimmt, dann werden die Näherungswerte nicht besser, sondern sogar schlechter, sofern man mit einem Rechner arbeitet, der die heute universell verbreitete *Gleitpunktarithmetik* verwendet. Man muß sich dann schon sehr gescheite Tricks ausdenken, um weiterzukommen. In der Vorcomputerzeit war es nicht immer möglich, Rechenfehler auszuschalten. So publizierte der Mathematiker William Shanks (1812 – 1882) im Jahre 1873 eine Näherung mit 707 Stellen nach dem Dezimalpunkt. Leider stellte es sich nach seinem Tode heraus, daß die 527. Stelle falsch war und damit alle weiteren 180 Dezimalstellen wertlos [4, S. 49f].

Nach dem Einbruch der Computer in die Welt der Mathematiker änderte sich die Situation. Es wurden sehr raffinierte Verfahren zur Berechnung immer weiterer Dezimalstellen von π entwickelt, ebenso Methoden zur Kontrolle der erhaltenen Ziffern sowie auch Verfahren, die es erlauben, den Wert einer einzelnen Dezimalziffer von π zu berechnen, ohne dazu Kenntnis über die vorhergehenden Stellen zu besitzen. Solche Berechnungen einer gigantischen Zahl von Dezimalstellen wurden auch für die Computerindustrie interessant, man konnte mit ihnen die exakte Funktion de verwendeten Prozessoren testen und natürlich hat eine Nachricht, daß auf dem Computer der Firma XYZ eine neue bessere Näherung an π gefunden sei, einen nicht zu unterschätzenden Werbewert. Der bekannteste unter den π-Sportlern ist der japanische Mathematiker Yasumasa Kanada der im Jahre 1999 nicht weniger als 206 158 430 000 ($2.06 \cdot 10^{11}$ oder 206 Milliarden) Stellen nach dem Dezimalpunkt berechnete.

Unabhängig von den oben angeführten Betrachtungen über die Rolle von π als Verhältnis von Kreisumfang zum Kreisdurchmesser muß man sich fragen, welche „Bedeutung" eine solch große Anzahl von Stellen hat. Man kann leicht ausrechnen, daß bereits 39 Dezimalstellen von π ausreichen, den Umfang eines Kreises, der das bekannte Universum umspannt, bis auf den Radius eines Wasserstoffatoms genau zu bestimmen. [5, S. 96, Sp. 1]. Hierbei muß man sich natürlich auch wieder fragen, wie „physikalisch" ein solcher Vergleich ist. Nähme ein solcher Kreis – wie auch immer festgelegt – an der allgemeinen Expansion des Universums teil? Dann nämlich wäre es kaum denkbar, seinen Radius und seinen Umfang irgendwie zu „messen". Würde der Kreis nicht an der Expansion teilnehmen, wozu würde er dann gehören? Wohl kaum zu unserem Universum? Wäre er dann nicht im absoluten Raum Newtons angesiedelt? Wie auch immer man den Radius beziehungsweise den Umfang messen wollte, der Meßtrupp müßte sich schon sehr vorsichtig bewegen, damit es nicht Schwierigkeiten mit relativistischen Maßstabsänderungen gäbe. Andererseits betrüge die Länge des Kreisumfangs etwa 61 Milliarden Lichtjahre, das heißt, der Meßtrupp wäre sehr lange unterwegs, selbst wenn er sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen würde! Wenn man sogar 62 Stellen von π verwenden würde, dann könnte man den Umfang bis auf eine Planck-Länge (10^{-35} m) genau berechnen, und spätestens eine solche Genauigkeit wäre unphysikalisch.

Eine sehr hübsche Veranschaulichung, die immer wieder zitiert wird, hat der bereits erwähnte Hermann Schubert in seinem populärwissenschaftlichen Buch „Mathematische Mußestunden" gegeben. Dieses Buch war ursprünglich im Jahre 1897 erschienen und erlebte 1943 seine zehnte Auflage [53]. Er schreibt (S. 43f):

> Um zu zeigen, welch einen Grad von Genauigkeit auch nur 100 Dezimalstellen darstellen, diene das folgende Beispiel. Der Sirus ist 83 Millionen mal Millionen Meilen von uns entfernt. Durch ihn denken wir uns um das Zentrum der Erde eine Kugel gelegt und diese ungeheure Kugel so von Bakterien angefüllt, daß auf jedes Kubikmillimeter Millionen mal Millionen Bakterien kommen. Die Zahl der in dieser Weise jene Kugel füllenden Bakterien wird dann mit 74 Ziffern geschrieben. Dann denken wir uns diese Bakterien ausgepackt und auf eine gerade Linie gelegt, so daß immer zwei aufeinanderfolgende Bakterien ebensoweit voneinander entfernt sind, wie der Sirius von der Erde, also 83 Billionen Meilen. Auf diese Weise erhalten wir eine Strecke, die so viel Meilen lang ist, als das Produkt von 83 Billionen mit der 74ziffrigen Zahl der Bakterien beträgt. Diese Strecke sei der Durchmesser eines Kreises, dessen Umfang wir uns dann auf zweierlei Weise bestimmt denken, erstens durch wirkliche Ausmessung, zweitens dadurch, daß wir seinen Durchmesser mir π multiplizieren, wobei wir uns 100 Dezimalstellen von π berücksichtigt vorstellen wollen. Dann müssen die beiden für den Umfang jenes Kreises erhaltenen Resultate voneinander abweichen, weil ja von der Zahl π nur 100 Dezimalstellen beim Multiplizieren berücksichtigt sind. Diese Ungenauigkeit müßte sich nun äußerst bemerkbar machen, da der Kreis so ungeheuer groß ist. Trotzdem würde man finden, daß der Unterschied zwischen dem durch wirkliche Messung bestimmten Umfange und dem durch Multiplikation mit π auf

> 100 Stellen berechneten Umfange noch nicht den millionsten Teil eines Millimeters betrüge.

Eine Diskussion der „realen physikalischen“ Bedeutung dieses Gedankenbildes erübrigt sich!

11 Ein Blick aufs Unendliche

Seit Lindemann wissen wir also, daß sich π nicht durch einen endlichen Dezimalbruch ausdrücken läßt. Dies gilt übrigens für jede Basis eines Stellensystems, also auch die Darstellung von π im Binär, Oktal-, Hexadezimalsystem, ... liefert eine nicht abbrechende Zahldarstellung. Es ist schwer, sich von dieser Tatsache eine rechte Vorstellung zu machen. Wir beschränken uns auf die Dezimaldarstellung.

In dem Buch von Victor Klee und Stan Wagon [31] wird die sehr interessante Frage untersucht, ob π „normal“ sei. Wenn man irgendeine Folge von Ziffern, also der Zahlen von 0, 1 bis 9 in geordneter Abfolge hernimmt, etwa zehn aufeinanderfolgende Nullen, dann kann man nach der Grenzfrequenz fragen, mit der diese Ziffernfolge in einer „sehr großen“ – etwa in einer unendlichen – Folge von Ziffern auftritt. Zum Beispiel betrachten wir zuerst eine einzelne Ziffer, etwa eine Null. In einer Menge von einer Million Ziffern, in der jede einzelne Ziffer die gleiche Chance des Auftretens hat, würde man erwarten, daß etwa 100 000 mal eine Null zu finden ist. Wählt man eine Menge von einer Milliarde Ziffern, so würde man erwarten, etwa 100 Millionen Nullen vorzufienden. Gleiches würde dann auch für alle anderen Ziffern gelten. Analog würde eine (geordnete) Folge von zwei aufeinanderfolgenden Ziffern, etwa 00 oder 01, ... oder 99, in einer Menge von einer Million Ziffern mit einer Häufigkeit von etwa 10 000 mal zu erwarten sein, eine dreiziffrige Abfolge etwa 1 000 mal und so weiter. Man erwartet, daß die Häufigkeit Ziffernfolge um so besser am erwarteten Wert liegt, je mehr Ziffern man in Betracht zieht, das heißt, wir betreiben hier Ziffernstatistik. Wenn eine Ziffernfolge nicht mit der erwarteten Häufigkeit auftritt, und das heißt, wenn bei Vergrößerung der betrachteten Menge, in der man nach der Ziffernfolge sucht, nicht die zu erwartende Anzahl des Auftretens vorkommt, dann gibt es also ein der Folge innewohnendes Gesetz, welches entweder das Auftreten der Folge verbietet oder aber irgendwie befördert.

Man hat die von Yasumasa Kanada erstellten Zifferngebirge daraufhin untersucht. So tritt zum Beispiel die Ziffer 7 mit den in Tabelle 4 angegebenen Häufigkeiten auf. Ganz ähnlich verhalten sich die anderen Ziffern. Auch Ziffernfolgen – soweit man solche getestet hat – scheinen mit den zu erwarteten Häufigkeiten aufzutreten. Es ist aber durchaus möglich, daß weitere Rechnungen Abweichungen von der Normalität aufweisen, wir kennen nämlich „nur“ einige hundert Milliarden Dezimalstellen von π, das heißt, wir haben „die meisten“ Dezimalziffern noch nicht gesehen. Man vermutet, daß die Ziffern in der Dezimalbruchentwicklung von π keinerlei Gesetzmäßigkeiten aufweisen, daß sie also völlig „zufällig“ verteilt sind. Ein Beweis hierfür konnte noch nicht gegeben werden, ein Beweis des Gegenteils wäre auf jeden Fall eine Sensation!

Der holländische Mathematiker und Philosoph Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881 – 1966) hat einmal die Frage gestellt, ob es in der Dezimalbruchentwicklung eine Folge von zehn aufeinanderfolgenden Nullen gebe. So weit ich weiß, hat man eine solche Folge bereits gefunden. Auch Ludwig Wittgenstein (1889 – 1951) hat in seinen *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* die Frage nach der Existenz eines Musters von Ziffern in der Dezimalbrucheintwicklung von π immer wieder diskutiert [66]. Wir stellen uns eine ähnliche Frage, nämlich, ob in der Dezimalbruchentwicklung von π die aus 447 Ziffern bestehende Folge

065109032065110102097110103032115099104117102032071111116116032072
105109109101108032117110100032069114100101046032085110100032100105
101032069114100101032119097114032119129115116032117110100032108101
101114044032117110100032101115032119097114032102105110115116101114
032097117102032100101114032084105101102101059032117110100032100101
114032071101105115116032071111116116101115032115099104119101098116
101032097117102032100101109032087097115115101114046

auftritt. Da wir ja – zumindest prinzipiell – beliebig lange Teilfolgen der Dezimalbruchentwicklung von π untersuchen können, ist es lediglich ein technisches Problem, daß unsere Folge recht lang zu sein scheint.

Das Auftreten dieser Folge wäre – aus Gründen, die gleich preisgegeben werden sollen – eine Schlagzeile wert. Ein *Beweis* dafür, daß gerade diese Folge nicht auftreten *kann* wäre ebenso sensationell, aber für uns Mathematiker noch aufregender. Brouwer war der Hauptvertreter des „Intuitionismus", also einer Denkrichtung, die nur anerkennen wollte, was tatsächlich konstruktiv herzeigbar ist. So erklärte er die Aussage „Unsere Folge tritt entweder in der Dezimalbruchentwicklung von π auf oder sie tritt nicht auf" für nicht zulässig. Er erlaubte allein die Aussage, daß die Folge auftritt – sofern dieses Faktum in der Tat durch eine Rechnung nachgewiesen werden kann. Diese strenge Denkhaltung – nur das existiert, was man „sehen und anfassen" kann – vermeidet gewisse Schwierigkeiten in der Begründung der Mathematik, nimmt uns Mathematikern aber unsere schönsten Spielzeuge weg.

Was hat es nun mit der genannten Ziffernfolge auf sich? Auf unseren Computern werden Texte nach dem ASCII-Code (American Standard Code for Information Interchange) verschlüsselt, nach dem jedem zulässigen Textzeichen eine Zahl zwischen 0 und 255 zugeordnet wird. Dieser Code ist weltweit verbreitet und gilt als „Quasistandard" für Textkommunikation. Wenn man unseren Text in Dreiergruppen einteilt und in einer Tabelle nach den zugehörigen Zeichen nachschaut, dann ergibt sich die Dechiffrierung nach Tabelle 5, also den Text von Gen 1,1–2:

> **Am Anfang schuf Gott Himmel und Erde. Und die Erde war wüst und leer, und es war finster auf der Tiefe; und der Geist Gottes schwebte auf dem Wasser.**

Die Dezimalbruchentwicklung von π ist ewig, da Euklid seine Geometrie nicht in dieser Welt sondern in einer Platonischen idealen Welt angesiedelt hat. Der hier vorgestellte Text war – sofern er überhaupt in der Dezimalbruchentwicklung von π vorkommt – schon vor dem Urknall „vorhanden" und wird auch dann noch existieren, wenn der letzte Stern unseres Universums erkaltet ist.

Literatur

[1] K. Absolon: Dokumente und Beweise der Fähigkeiten des fossilen Menschen zu zählen im mährischen Paläolithikum. *Artibus Asiae*, 20(2/3):123–150, 1957.

[2] Jürgen v. Beckerath: *Chronologie des pharaonischen Agypten: Die Zeitbestimmung der ägyptischen Geschichte von der Vorzeit bis 332 v. Chr. (Münchener Ägyptologische Studien 46)*, Mainz 1997.

[3] Klaus Berger: *Qumran, Funde – Texte – Geschichte. (Universal-Bibliothek Nr. 9668)*, Philipp Reclam jun., Stuttgart, 1998.

[4] David Blatner: π. *Magie einer Zahl*. 2. Auflage Juni 2004, *(rororo Sachbuch 61176)*, Rowohlt Taschenbuch Verlag, Reinbek bei Hamburg, September 2001.

[5] Jonathan M. Borwein und Peter B. Borwein: Srinivasa Ramanujan und die Zahl Pi. *Spektrum der Wissenschaft*, April 1988:96–103.

[6] Werner Burau: Der Hamburger Mathematiker Hermann Schubert. *Miteilungen der Mathematischen Gesellschaft Hamburg*, 9(3):10–19, 1966.

[7] Moritz Cantor: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Erster Band: Von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr.*, Vierte Auflage, Verlag und Druck von B. G. Teubner, Leipzig, Berlin, 1922.

[8] Elena Cassin, Jean Bottéro und Jean Vercoutter, Hrsg.: *Fischer Weltgeschichte, Band 2. Die altorientalischen Reiche I. Vom Paläolithikum bis zur Mitte des 2. Jahrtausends*, Fischer Bücherei KG, Frankfurt am Main, 1965.

[9] Jean–Paul Collette: *Histoire des mathématiques*, Édition du Renouveau Pédagogique, Inc., 8955, Boulevard Saint–Laurent, Montréal (Québec) H2N 1M6.

[10] Erich von Däniken: *Die Augen der Sphinx. Neue Fragen an das alte Land am Nil*. Bertelsmann, München, 1989.

[11] J. Dorner: *Die Absteckung und astronomische Orientierung der ägyptischen Pyramiden*. Dissertation Inssbruck, 1981.

[12] Underwood Dudley: What to do when the trisector comes. *The Mathematical Intelligencer*, 5(1):20–25, 1983.

[13] Umberto Eco: *Das Foucaultsche Pendel*. Aus dem Italienischen von Burkhardt Kroeber, Carl Hanser Verlag, München Wien, 1989.

[14] I. E. S. Edwards: *Die ägyptischen Pyramiden*. Aus dem Englischen übersetzt von Bruno Sandkühler, Otto Harrassowitz, Wiesbaden, 1967.
The Paramids of Egypt. Penguin Books, Ltd, Harmondsworth, Middlesex, England, 1947. Revised edition 1961.

[15] Paul Ehrenfest: Gleichförmige Rotation starrer Körper und Relativitätstheorie. *Physikalische Zeitschrift*, 10(23):918, 1908.

[16] Albert Einstein: Lichtgeschwindigkeit und Statik des Gravitationsfeldes. *Annalen der Physik*, 38:445–459, 1912.

[17] Hermann Engels: Quadrature of the circle in ancient Egypt. *Historia Mathematica*, 4:137–140, 1977.

[18] Max Eyth: *Der Kampf um die Cheopspyramide. Eine Geschichte und Geschichten aus dem Leben eines Ingenieurs*, 2 Bände, 1902.

[19] Gottlob Frege: *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch–mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, *(Universal–Bibliothek Nr. 8425[3])*, Philipp Reclam jun., Stuttgart, 1987.
(Wilhelm Koebner, Breslau, 1884).

[20] Lothar Haselberger: Entzifferung eines alten Werkplanes. *Spektrum der Wissenschaft*, August 1995:74–82.

[21] Lothar Haselberger und Hans Seybold: Zur Herstellung antiker Kurvaturen — Konstruktion mit Seilkurve oder Kreisbogen? (Monatsspektrum). *Spektrum der Wissenschaft*, August 1991:22,24,25,26.

[22] Lothar Haselberger: Antike Planzeichnungen am Apollontempel von Didyma. *Spektrum der Wissenschaft*, April 1985:70–83.

[23] Herodot: *Geschichten*, Auswahl von Hermann Strasburger, *(Die Fischer Bibliothek der hundert Bücher, Exempla Classica 36)*, Fischer Bücherei, Frankfurt am Main und Hamburg, September 1961.

[24] Joseph Hogrebe: *Himmelskunde bei den Germanen. (Mathematich-natruwissenschaftlich-technische Bücherei, Band 30)*, Verlag Otto Salle, Frankfurt am Main und Berlin, 1936.

[25] Erik Hornung: *Altägyptische Dichtung. Ausgewählt, übersetzt und erläutert von Erik Hornung*, *(Reclams Universal–Bibliothek Nr. 9381)*, Verlag Philipp Reclam GmbH & Co., Stuttgart, 1996.

[26] Georges Ifrah: *Die Zahlen. Die Geschichte einer großen Erfindung*. Aus dem Französischen von Peter Wanner, Campus Verlag, Frankfurt/New York, 1992.

[27] Georges Ifrah: *Universalgeschichte der Zahlen*, Aus dem Französischen von Alexander von Platen, Campus Verlag, Frankfurt, 1986.

[28] Annette Imhausen: Ancient Egyptian mathematics: New perspectives and old sources. *The Mathematical Intelligencer* 28(1):19–27, 2006.

[29] Annette Imhausen: *Ägyptische Algorithmen. Eine Untersuchung zu den mittelägyptischen mathematischen Aufgabentexten. (Ägyptologische Abhandlungen 65)*, Harrassowitz, Wiesbaden, 2003.

[30] Annette Imhausen: Calculating the daily bread: Rations in theory and practice. *Historia Mathematica*, 30:3–16, 2003.

[31] Victor Klee and Stan Wagon: *Alte und neue ungelöste Probleme in der Zahlentheorie und Geometrie der Ebene*, Aus dem Amerikanischen von Manfred Stern. Birkhäuser Verlag, Basel · Boston · Berlin, 1997.
Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory,*(Mathematical Association of America Dolciani Mathematics Expositions No. 11)*, Washington, D.C., The Mathematical Association of America, 1991.

[32] *Der Koran. Das heilige Buch des Islam.* Nach der Übertragung von Ludwig Ullmann neu bearbeitet und erläutert von L. W.-Winter, Wilhelm Goldmann Verlag, München, 1959.

[33] G. Kropp: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, *(BI Hochschultaschenbücher 413/413a)*, Bibliographisches Institut, Mannheim, Zürich, 1969.

[34] Jean-Philippe Lauer: Le triangle sacré dans les plans des monuments de l'Ancien Empire. *Bulletin de l'institut français d'archéologie orientale*, 77:55–78, 1977.

[35] F. Lindemann: Über die Zahl π. *Math. Ann.*, 20:212–225, 1882.

[36] Harald Meller, Hrsg.: *Der geschmiedete Himmel. Die weite Welt im Herzen Europas vor 3600 Jahren. Katalog zur Ausstellung im Landesmuseum für Vorgeschichte Halle (Saale) vom 15. Oktober 2004 bis 24. April 2005, im Dänischen Nationalmuseum, Kopenhagen, 2005 und im Reiss-Engelhorn-Museen, Mannheim vom 4. März 2006 bis 9. Juli 2006*, Konrad Theiss Verlag GmbH, Stuttgart, 2004.

[37] Kurt Mendelssohn: *Das Rätsel der Pyramiden.* Aus dem Englischen übertragen von Dr. Joachim Rebork, Bechtermünz Verlag. Genehmigte Lizenzausgabe für Weltbild Verlag GmbH, Augsburg, 1999.
The Riddle of the Pyramids, Thames & Hudson, London, 1974.

[38] Otto Neugebauer: *The Exact Sciences in Antiquity*, *(Acta historica scientiarum naturalium et medicinalium, Edidit Bibliotheca Universitatis Hauniensis, Vol. 9)*, Second Edition, Copenhagen, 1957, published by Brown University Press, Providence, R. I., U. S. A.

[39] Dominic Olivastro: *Das chinesische Dreieck. Die kniffligsten mathematischen Rätsel aus 10 000 Jahren*, Aus dem Amerikanischen von Michael Schmidt, Dromersche Verlagsanstalt Th. Knaur Nachf., München, 1995.
Ancient Puzzles, Bantam Books, New York, 1993.

[40] Jean-Marc Pétillon: Jagd im Magdalénien. *Spektrum der Wissenschaft*, November 2006:84–89.

[41] *Platon. Sämtliche Werke in drei Bänden.* 5. Auflage, Jakob Hegner Verlag, Köln und Olten, 1967.

[42] Karl R. Popper: *Vermutungen und Widerlegungen: Das Wachstum der wissenschaftlichen Erkenntnis*, J. C. B. Mohr (Paul Siebeck), Tübingen, 1994.

[43] Karl R. Popper: *Lesebuch. Ausgewählte Texte zu Erkenntnistheorie, Philosophie der Naturwissenschaften, Metaphysik, Sozialphilosophie*, Herausgegeben von David Miller, *(Uni–Taschenbücher 2000)*, J. C. B. Mohr (Paul Siebeck), Tübingen, 1982.

[44] Alfred S. Posamentier and Ingmar Lehmann: *Pi. A Biography of the World's Most Mysterious Number*, Afterword by Dr. Herbert A. Hauptman, Nobel Laureate, Prometheus Books, 2004.

[45] Alfred Posamentier und Noam Gordon: Aus der Geschichte von π. *Spectrum. Berliner Journal für den Wissenschaftler*, 22(6):8, Juni 1991.

[46] A. S. Posamentier and N. Gordon: An astounding revelation on the history of π. *Math. Teacher*, 77(1):52,47, 1984.

[47] Gero von Randow, Hrsg.: *Der hundertste Affe. Texte aus dem ≪Skeptical Inquirer≫*. Deutsch von Volker Englich, Dirk van Gunsteren, Cornelia Holfelder-von der Tann, Hainer Kober und Sebastian Vogel, *(rororo 22085)*, Rowohlt Taschenbuch Verlag, Reinbek bei Hamburg, Juli 1996.

[48] Gay Robins and Charles Shute: *The Rhind Mathematical Papyrus, an ancient Egyptian text*, The Trustees of the British Museum, London, 1987.

[49] William F. Ruddiman: Verhinderte der Mensch eine Eiszeit? *Spektrum der Wissenschaft*, Februar 2006:44–51.

[50] Denise Schmandt–Besserat: The earliest precursor of writing. *Scientific American*, 238 (6):38–47, June 1978.

[51] Sylvia Schoske, Hrsg.: *Vierter Internationaler Ägyptologen–Kongreß, München 1985, 26 August – 1 September. Resümees der Referate*, Internationaler Ägyptologen–Verband.

[52] Hermann Schubert: *Die Quadratur des Zirkels in berufenen und unberufenen Köpfen, eine kulturgeschichtliche Studie*, von Dr. Hermann Schubert, Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg, *(Sammlung gemeinverständlicher wissenschaftlicher Vorträge, N.F., Ser. III, H. 67)*, Verlagsanstalt und Druckerei A. G. (vorm. J. F. Richter), Hamburg, 1889.

[53] Prof. Dr. Hermann Schubert: *Mathematische Mußestunden. Eine Sammlung von Geduldspielen, Kunststücken und Unterhaltungsaufgaben mathematischer Natur*, Neubearbeitet von Prof. Dr. F. Fitting in M.-Gladbach, Zehnte, vermehrte Auflage, Walter de Gruyter & Co., vormals G. J. Göschen'sche Verlaghandlung · J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung · Karl J. Trübner · Veit & Comp., Berlin, 1943.

[54] Charles Piazzi Smyth: *The Great Pyramid. Its Secrets and Mysteries Revealed*. 4th and much enl. ed., Gramery Books, New York, 1994.

[55] Charles Piazzi Smyth: *Our Inheritance in the Great Pyramid*. A. Strahan, London, 1864.

[56] Kate Spence: Ancient Egyptian chronology and the astronomical orientation of pyramids. *Nature*, 408:320–324, 16. November 2000.

[57] Rainer Stadelmann: *Die großen Pyramiden von Giza*,
Akademische Druck– u. Verlagsanstalt, Graz–Austria, 1990.

[58] W. W. Struve, Hrsg.: *Mathematischer Papyrus des staatlichen Museums der schönen Künste in Moskau*, herausgegeben und kommentiert von W. W. Struve, unter Benutzung einer hieroglyphischen Transkription von B. A. Turajeff, *(Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Abt. A, Quellen, Band 1)*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1930.

[59] Francis Edward Su: Rental harmony: Sperner's lemma in fair division. *American Mathematical Monthly*, 106(10):930–942, December 1999.

[60] John Taylor: *The Great Pyramid, Why Was It Build? and Who Built It?* Longman, Green, Longman and Roberts, London, 1859.

[61] K. Vogel: Bespechung von: Abel Rey: Coup d'œil sur la mathématique égyptienne. *Revue de synthése historique*, 41:19–62, 1926 und Abel Rey: Nouveau coup d'œil sur la mathématique égyptienne. *Revue de synthése historique*, 43:27–35, 1927. *Mitteilungen zur Geschichte der Medizin und der Naturwissenschaften*, 27:378–383, 1928.

[62] B. L. van der Waerden: *Erwachende Wissenschaft. Ägyptische, babylonische und griechische Mathematik*, aus dem Holländischen übersetzt von Helga Habicht mit Zusätzen vom Verfasser, Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1956.

[63] Hartmut Wellstein: Eine antike Näherungsformel für den Vierecksinhalt. *Mathematische Semesterberichte*, 36:95–105, 1989.

[64] Margaret Wertheim: *Die Hosen des Pythagoras. Physik, Gott und die Frauen*, Aus dem Englischen von Karin Schuler, Karin Miedler und Silke Egelhof, *(Serie Piper 3710)*, Piper Verlag, München, Zürich, 2000.

[65] E. P. Wigner: The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 13:1–14, 1960.

[66] Ludwig Wittgenstein: *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, Herausgegeben von G. E. M. Anscombe, Rush Rhees, G. H. von Wright, 5. Auflage, *(Werkausgabe, Band 6)*, *(suhrkamp taschenbuch wissenschaft stw 506)*, Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main, 1994.

[67] Walther Wolf: *Das alte Ägypten*, *(dtv Wissenschaftliche Reihe WR 4332)*, Deutscher Taschenbuch Verlag GmbH & Co. KG, München, 1971.

Zeitraum	**math. Texte**	**Schrift**
Archaische Periode: 1.–2. Dyn. (3032/2982–2707/2657 v. Chr.)		
Altes Reich: 3.–8. Dyn. (2707/2657–2170/2120 v. Chr.)		
Erste Zwischenzeit: 9.–10. Dyn.) (2170/2120–2025/2020 v. Chr.		
Mittleres Reich: 11.–12. Dyn.	pMoskau (E4676)	hieratisch
(2119–1794/93 v. Chr.)	Math. Lederrolle (BM 10250)	hieratisch
	Illahun Fragmente	hieratisch
	pBerlin 6619	hieratisch
	Kairoer Holzbretter	
Zweite Zwischenzeit: 13.–17. Dyn. (1794/93–1550 v. Chr.)	pRhind (BM 10057–10058)	hieratisch
Neues Reich: 18.–20. Dyn.	Ostrakon Senmut 153	hieratisch
(1550–1070/69 v. Chr.)	Ostrakon Turin 57170	hieratisch
Dritte Zwischenzeit: 21.–25. Dyn. (1070/69–655 v. Chr.)		
Spätzeit: 26.–31. Dyn. (655–332 v. Chr.)		
Griechisch-Römische Periode	pKairo JE 89127–89130	demiotisch
(332 v. Chr. – 552 n. Chr.)	pKairo JE 89137–89143	demiotisch
	pBM 10399; pBM 10520	demiotisch
	pBM 10794, pCarlsberg 30	demiotisch
$\sim$ 900 n. Chr.	BM Or 5707	koptisch

Tabelle 1: Ägyptische mathematische Texte (nach Imhausen [30]).

Pyramide	Steigung	*seked*	*seked* (gerundet)
Rote Pyramide (Edwards)	$43^o36'$	29.402	29.5
Rote Pyramide (Mendelssohn)	43.5^o	29.596	29.5
Rote Pyramide (Stadelmann)	45^o	28.000	28.0
Cheopspyramide	$51^o51'$	21.994	22.0
Chephrenpyramide (Mendelssohn)	$52^o20'$	21.615	21.5

Tabelle 2: Steigungen einiger Pyramiden.

Näherung	Höhe h_1 für $a = 1$	$\frac{2}{h_1}$	Fehler %	Steigung	Höhe (m) für $a = 230.36$ m
„Herodot“	$\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{8}} = 0.636\ 010$	3.144 606	0.096	$51^o\ 49'\ 38''$	146.51
Goldener Schnitt	$\frac{2}{\sqrt{5}+1} = 0.618\ 034$	3.236 068	3.007	$51^o\ \ 1'\ 36''$	142.37
Seked $5\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\frac{28}{22} = 0.636\ 364$	3.142 857	0.040	$51^o\ 50'\ 34''$	146.59
π	$\frac{2}{\pi} = 0.636\ 620$	3.141 593	0	$51^o\ 51'\ 14''$	146.65

Tabelle 3: Pyramidenhöhen für verschiedene Hypothesen.

Zu jeder Hypothese über das Verhältnis der Länge zur Basiskante zur Höhe (1. Spalte) wird die Höhe h_1 für den Fall einer Pyramide, deren Basiskante die Länge 1 hat angegeben (2. Spalte) sowie der Wert $\frac{2}{h_1}$, der in der Nähe von π liegen soll (3. Spalte). Es folgt der relative Fehler dieser Approximation an π, die gemäß der Hypothese berechnete Steigung der Seitenfläche (4. Spalte) sowie die Höhe bei einer Basislänge von 230.36 m (Cheopspyramide).

Anzahl der Stellen	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	10 000 000	29 360 000
Anzahl der 7	8	95	970	10 025	99 800	1 000 207	2 934 083
Häufigkeit der 7	8 %	9.5 %	9.7 %	10.0 %	9.98 %	10.002 %	9.99347 %

Tabelle 4: Das Auftreten der Ziffer 7 unter den ersten 20 Millionen Stellen von $\pi - 3$.

Nach [31, S. 219].

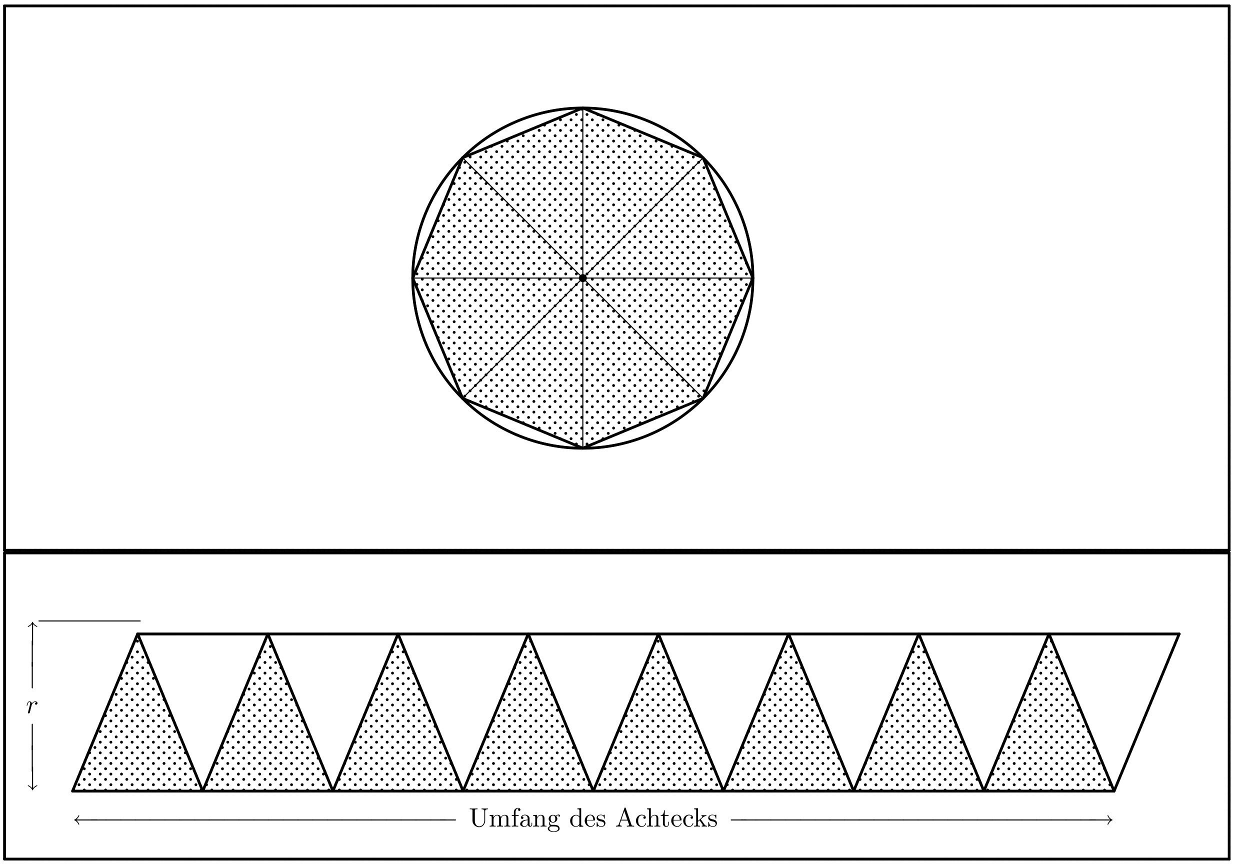

Abbildung 12: Zusammenhang zwischen Kreisumfang und Kreisinhalt nach Archimedes.

Der Kreis wird hier durch ein eingeschriebenes regelmäßiges Achteck approximiert. Das Achteck wird derart in Dreiecke zerlegt, daß deren Grundseiten sich gerade zum Umfang des Achtecks addieren. Die Höhen sind etwas kleiner als der Kreisradius. Wie man sieht, kann man diese Figur durch Hinzunahme von acht weiteren kongruenten Dreiecken zu einem Parallelogramm ergänzen, dessen Basis die Länge des Umfangs des Achtecks hat und dessen Höhe gleich der Höhe der Dreiecke ist.

065	109	032	065	110	102	097	110	103	032	115
A	**m**		**A**	**n**	**f**	**a**	**n**	**g**		**s**
099	104	117	102	032	071	111	116	116	032	072
c	**h**	**u**	**f**		**G**	**o**	**t**	**t**		**H**
105	109	109	101	108	032	117	110	100	032	069
i	**m**	**m**	**e**	**l**		**u**	**n**	**d**		**E**
114	100	101	046	032	085	110	100	032	100	105
r	**d**	**e**	**.**		**U**	**n**	**d**		**d**	**i**
101	032	069	114	100	101	032	119	097	114	032
e		**E**	**r**	**d**	**e**		**w**	**a**	**r**	
119	129	115	116	032	117	110	100	032	108	101
w	**ü**	**s**	**t**		**u**	**n**	**d**		**l**	**e**
101	114	044	032	117	110	100	032	101	115	032
e	**r**	**,**		**u**	**n**	**d**		**e**	**s**	
119	097	114	032	102	105	110	115	116	101	114
w	**a**	**r**		**f**	**i**	**n**	**s**	**t**	**e**	**r**
032	097	117	102	032	100	101	114	032	084	105
	a	**u**	**f**		**d**	**e**	**r**		**T**	**i**
101	102	101	059	032	117	110	100	032	100	101
e	**f**	**e**	**;**		**u**	**n**	**d**		**d**	**e**
114	032	071	101	105	115	116	032	071	111	116
r		**G**	**e**	**i**	**s**	**t**		**G**	**o**	**t**
116	101	115	032	115	099	104	119	101	098	116
t	**e**	**s**		**s**	**c**	**h**	**w**	**e**	**b**	**t**
101	032	097	117	102	032	100	101	109	032	087
e		**a**	**u**	**f**		**d**	**e**	**m**		**W**
097	115	115	101	114	046					
a	**s**	**s**	**e**	**r**	**.**					

Tabelle 5: Interpretation der Ziffernfolge als ASCII-Text.