

Charakterisierung konvexer Mengen – der erste Satz von Motzkin

Christoph Conrad, Ulrich Eckhardt, Thomas Kähler,
Waldemar Konegen, Ralph Schiller, Stefan Sowada
(Arbeitsgemeinschaft über Anwendungen der Konvexität)*

Abstract

A central problem in processing of binary (or black and white) pictures is the representation of sets in the plane (or three-dimensional space). There are two different approaches for achieving this goal: Either a set is represented by its boundary or else a representing set of skeletal points is chosen which in some sense reflects the properties of the set under investigation. Skeletal points are points whose metric projection onto the set is not unique. The topic of this paper is to collect some results on skeletal sets.

1 Einleitung

Im Jahre 1967 schlug Blum [5] ein Modell für Wahrnehmungsprozesse vor. Dieses Modell ist ein frühes Beispiel eines neuronalen Netzwerks. Unabhängig von seiner Bedeutung in der Wahrnehmungsphysiologie hat dieses Modell eine erhebliche Bedeutung in der Praxis der Bildverarbeitung gewonnen, da es sich leicht algorithmisch umsetzen läßt. Die daraus entwickelten Verfahren - sogenannte Verdünnungs- oder Skelettierungsalgorithmen - fanden seit der ersten Veröffentlichung von Sherman [39], also seit mehr als 30 Jahren, weite Verbreitung als Vorverarbeitungsverfahren in der Bildverarbeitung.

*Institut für Angewandte Mathematik der Universität Hamburg, Bundesstraße 55, D-2000 Hamburg 13

Bereits Blum hatte sein Modell kontinuierlich formuliert. Zwar wäre eine diskrete Formulierung sowohl wahrnehmungsphysiologisch als auch algorithmisch weitaus angemessener, modellierungstheoretisch ergibt sich aber die Schwierigkeit, daß man sich bei der Untersuchung auf eine konkrete Konfiguration der diskreten Elemente (Neuronen, Diskretisierungspunkte, 'Pixel') festlegen muß und daß man angeben muß, auf welche Weise diese miteinander verknüpft sind (Netzwerktopologie). Gerade das letztgenannte Problem ist äußerst schwierig zu behandeln. Es ist also sehr sinnvoll, die mit der diskreten Topologie verknüpften schwierigen Fragen zunächst einmal dadurch auszuschließen, daß man ein kontinuierliches Modell untersucht.

Blum formulierte sein Modell anschaulich in Form der sogenannten Step-branchen-analogie. Die wahrgenommene Figur sei als eine Teilmenge S der Ebene modelliert (das heißt, man nimmt an, daß ein Schwarz-Weiß-Bild wahrgenommen wird). Man denkt sich die Menge S aus einem homogenen brennbaren Material hergestellt. Zündet man sie in allen Randpunkten gleichzeitig an, dann breiten sich vom Rande her Feuerfronten ins Innere aus. Die Punkte, in denen das Feuer erlischt, weil sich zwei Feuerfronten treffen (engl. *quench points*), werden zur Repräsentation der Menge benutzt. Man nennt die Menge dieser Punkte das *Skelett* oder die *Mittelachse* der Ausgangsmenge. In geometrischer Sprechweise sind die Skelettpunkte gerade die Mittelpunkte maximaler, ganz in der Menge S gelegener Kreise.

Es ist interessant, daß man auf das gleiche Problem stößt, wenn man die Frage untersucht, an welchen Stellen Grate entstehen, wenn man einen Sandhaufen maximalen Volumens aufschütten möchte, so daß dessen Grundfläche gerade die vorgegebene Menge S ist [28]. Bei der Torsion eines prismatischen Stabes, dessen Querschnitt die Menge S ist, und der aus einem idealplastischen Material besteht, stößt man ebenfalls auf dieses Problem: Die Unstetigkeiten der ersten Ableitung der Spannungsfunktion fallen mit den Skelettpunkten zusammen [45]. Bei den hier genannten Anwendungen ist es gerechtfertigt, anzunehmen, daß der Rand von S hohe Glattheitsanforderungen erfüllt.

Ein anderes interessantes Anwendungsproblem in diesem Zusammenhang ist das 'Offset-Problem', welches entsteht, wenn man Kurven konstruieren möchte, die zum Rande der vorgelegten Menge parallel sind [44]. Für polygonal berandete Mengen wurde dieses Problem von Preparata [34] und Sutherland [41] untersucht. Eine besonders interessante Anwendung auf automatische Nähmaschinen wird von Hoschek beschrieben [23]. Auch bei diesen

Anwendungen kann man von glatten oder doch stückweise glatten Rändern ausgehen.

Besteht die Menge S nur aus endlich vielen Punkten, dann ist ihr Skelett gerade das Voronoi-Diagramm von S . Diese Struktur ist in der 'Computational Geometry' gut bekannt und ausgiebig algorithmisch untersucht worden [35, 12].

Untersuchungen der Mittelachsen von Mengen mit glatten Rändern findet man in den Arbeiten von Giblin u.a. [7, 18, 19, 51].

In der Bildverarbeitung verwendet man Skelette, um Mengen zu beschreiben und effizient zu speichern. Zahlreiche Anwendungen dieser Darstellung wurden von verschiedenen Autoren vorgeschlagen. Es seien hier nur einige dieser Anwendungen erwähnt (vgl. auch [26]): Bestimmung von Abständen von Objekten [16], Anwendung auf Aufgaben der 'Computational Geometry' [17], Glättung von Mengen [22], Berechnung von Projektionen und Momenten von Mengen [37], 'Warping'-Transformationen von Mengen [49] sowie Bestimmung geometrischer Eigenschaften [50].

Bei der Übertragung von Erkenntnissen, die man beim Studium des kontinuierlichen Modells gewonnen hat, auf ein diskretes Modell hat man eine grundsätzliche Schwierigkeit: Zahlreiche der bekannten Aussagen über Eigenschaften von Skeletten wurden für Räume mit glatten und streng konvexen Normkugeln bewiesen. Durchweg alle Anwendungen hingegen finden in Räumen statt, die diese beiden Eigenschaften nicht besitzen (L^1 und L^∞ oder generell Normen mit polyedrischem Eichkörper). Für derartige Räume gelten die meisten der bekannten Aussagen sicher nicht, wie man leicht durch Gegenbeispiele belegen kann. Trotzdem werden immer wieder Verfahren mit Argumenten motiviert, die aus kontinuierlichen Überlegungen stammen. Für die Praxis hat diese Diskrepanz zwischen kontinuierlicher und diskreter Darstellung die Folge, daß es keine 'kanonische' Übertragung der kontinuierlichen Begriffe ins Diskrete geben kann, was den erheblichen Umfang der Literatur über Verdünnungsverfahren erklärt.

Eine weitere Eigenschaft der kontinuierlichen Skelette bereitet erhebliche theoretische und praktische Schwierigkeiten. Die Abbildung, die einer Menge ihr Skelett zuordnet, ist nicht stetig im Sinne der Hausdorff-Metrik für Mengen. Damit ist, streng genommen, keine sinnvolle Anwendung der Skelette möglich. Es wird erforderlich, zu 'regularisieren'. In der Literatur findet man lediglich zwei Arbeiten, die sich mit diesem Thema beschäftigen, nämlich die Dissertationen von Klein [26] und Yu [52]. Dies ist angesichts der Verbreitung

der Skelettierungsverfahren in der Praxis, ihrer Bedeutung für die Bildverarbeitung und der Tatsache, daß man sich ihrer bereits seit mehr als dreißig Jahren bedient, verwunderlich.

2 Bezeichnungen

Wir bezeichnen mit

- B eine abgeschlossene beschränkte Menge im R^d , die das Nullelement Θ_d des R^d im Inneren enthält und die bezüglich Θ_d *symmetrisch* ist, d.h. aus $x \in B$ folgt $-x \in B$. Mit B definieren wir eine *Norm* in R^d gemäß

$$\|x\|_B = \inf\{\lambda > 0 \mid \frac{x}{\lambda} \in B\}.$$

Mit dieser Normdefinition wird R^d zu einem *Minkowski-Raum*, d.h. zu einem endlichdimensionalen normierten Raum. B nennt man den *Eichkörper* oder die *Normkugel* des auf diese Weise normierten R^d (vgl. [46]).

- $B_\rho(x) = x + \rho \cdot B$ die verallgemeinerte Kugel mit Radius ρ und Mittelpunkt x .
- Für eine Menge S sei $\text{cl } S$ der (topologische) Abschluß von S , $\text{int } S$ das Innere und $\text{bd } S$ der Rand von S . $\text{conv } S$ sei die konvexe Hülle von S .
- Es sei S eine abgeschlossene Menge, $x \in R^d$.

$$\rho(x, S) = \inf\{\|y - x\|_B \mid y \in S\}$$

bezeichnet man als den *Abstand* von x und S . Die Menge

$$P_S^B(x) = \{y \in S \mid \|y - x\|_B = \rho(x, S)\}$$

bezeichnet man als die *Projektion* von x auf S . Die Menge

$$\Pi(x) = \{y \in R^d \mid y = \lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot z \text{ für ein } z \in P_S^B(x), 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

heißt die *Projizierende* von x (vgl. [33]). Die Kugel $B_{\rho(x,S)}(x)$ heißt *Stützkugel* an S . Eine Stützkugel an S heißt *maximal*, wenn sie in keiner anderen Stützkugel enthalten ist.

- Es sei S eine abgeschlossene Menge. $\Sigma(S)$ ist die Menge aller Mittelpunkte x von maximalen Stützkugeln an S und heißt das *Skelett* von S . In der Bildverarbeitungsliteratur (vgl. etwa [38, Chapter XI, B, C, D]) wird in der Regel das Skelett des Komplements von S (sog. *Innenskelett* im Gegensatz zu dem hier definierten *Exoskelett*) als das Skelett von S bezeichnet, wir bezeichnen das Skelett des Komplements von S auch als die *Mittelachse* von S .
- $\Sigma'(S)$ sei die Menge aller Punkte $x \in \mathbb{R}^d$, für die die Projektion auf S mindestens zwei Punkte enthält. Man weiß (vgl. [38, Chapter XI, C.2]), daß $\text{cl } \Sigma(S) = \text{cl } \Sigma'(S)$.
- Es sei $\delta > 0$ und S eine abgeschlossene Menge. Die Menge

$$S_\delta = \cup_{x \in S} B_\delta(x)$$

heißt die *Hausdorff-Parallelmenge* zu S .

- Es seien S_1 und S_2 zwei abgeschlossene Mengen.

$$\inf\{\delta > 0 \mid S_1 \subseteq (S_2)_\delta \text{ und } S_2 \subseteq (S_1)_\delta\}$$

heißt der *Hausdorff-Abstand* der beiden Mengen S_1 und S_2 [46].

3 Funktionalanalytischer Hintergrund

3.1 Existenz

Es sei X ein reflexiver Banach-Raum, S eine Teilmenge von X . Gesucht ist eine Lösung der Aufgabe, für ein gegebenes $x \in X$ das nächste Element (im Sinne der Norm von X) in S zu finden, das heißt, die Projektion von x auf S . Die Menge S heißt *proximal*, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ (mindestens) einen nächsten Punkt in S gibt.

Es gilt dann die Aussage: X ist reflexiv genau dann, wenn jede abgeschlossene und konvexe Teilmenge von X proximal ist.

Beweisskizze für die eine Richtung (X reflexiv $\Rightarrow$ Jede abgeschlossene konvexe Teilmenge ist proximal): Ist X reflexiv, dann ist die Einheitskugel von X schwach kompakt (vgl. etwa [25, Kap. V.7, Satz 7]). Ist S eine

abgeschlossene konvexe Teilmenge von X , $x \in X$ und $y \in S$, dann ist die Menge

$$S' = \{z \in S \mid \|z - x\|_B \leq \|y - x\|_B\}$$

schwach kompakt. Es sei $\{y_n\}$ eine Minimalfolge in S' mit schwachem Häufungspunkt y^* . Der schwache Häufungspunkt einer Folge liegt aber in der konvexen Hülle der Folge (Satz von Banach und Saks, vgl. [36, Nr. 38] bzw. [30]). Weiterhin ist y^* starker Grenzwert einer geeigneten Folge aus S , also ist y^* Minimalpunkt.

Die uns am meisten interessierenden Räume sind leider nicht reflexiv, etwa der L_1 und der L_∞ . Hier kann die folgende Definition von Nutzen sein: S heißt 'boundedly compact', wenn der Durchschnitt von S mit einer abgeschlossenen beschränkten Menge kompakt ist. Dies kann etwa für endlichdimensionale Teilräume von X der Fall sein. Eine solche Situation liegt in der Approximationstheorie in der Regel vor.

3.2 Eindeutigkeit

Die Normkugel von X heißt *streng konvex*, wenn aus $\|x\|_B = 1$ und $\|y\|_B = 1$, $x \neq y$ sowie $0 < \lambda < 1$ folgt $\|(1 - \lambda) \cdot x + \lambda \cdot y\|_B < 1$. Ist die Normkugel von X streng konvex, dann gibt es für jede konvexe Menge S und für jedes $x \in X$ höchstens ein nächstes Element. Es gilt auch die Umkehrung: Gibt es für jede konvexe Menge S und für jedes $x \in X$ höchstens ein nächstes Element, dann ist die Normkugel von X streng konvex.

Wir nehmen nun an, daß die Norm von X nicht streng konvex sei. Man kann sich dann fragen, unter welchen Bedingungen an die Menge S für jedes $x \in X$ höchstens ein nächstes Element existiert.

Man kann sicher nicht erwarten, daß in einem solchen Raum immer Eindeutigkeit gegeben ist. Versehen wir die Ebene mit der Maximumnorm, dann ist die Projektion auf einen achsenparallelen Teilraum nicht eindeutig bestimmt, jedoch auf jeden Teilraum, der gegen die Achsenrichtungen gedreht ist.

Für den $C[0, 1]$ wurden von Tschebyschew in seiner klassischen Arbeit [42, 43] solche Mengen angegeben, nämlich alle von Polynomen aufgespannten endlichdimensionalen Teilräume. Haar [20] hat für diesen Fall eine geometrische Theorie aufgestellt, die sich auf Minkowski [31] bezieht.

Leider ist die Haar'sche Bedingung für Funktionenräume in mehreren

Veränderlichen 'fast nie' gegeben. Mayrhuber [29] zeigte, daß Haar'sche Teilräume 'im wesentlichen eindimensional' sind (vgl. auch [10, Kap. II.6]).

3.3 Tschebyschew-Mengen

Eine zusammenfassende Darstellung dieses Problemkreises, die im wesentlichen auch den heutigen Stand beschreibt, wurde von Vlasov [47] gegeben.

Eine *Tschebyschew-Menge* in einem Banach-Raum ist eine Teilmenge S , für die es zu jedem $x \in X$ höchstens ein nächstes Element gibt.

Man kann die Frage stellen, in welchen Räumen jede Tschebyschew-Menge konvex ist. In endlichdimensionalen Räumen wird diese Frage positiv beantwortet durch den Satz von Motzkin [33, 32]. Selbst in Hilbert-Räumen ist sie jedoch noch offen. Asplund [3] hat gezeigt: Wenn es in einem Hilbert-Raum eine nichtkonvexe Tschebyschew-Menge gibt, dann gibt es auch eine Tschebyschew-Menge, die Komplement einer offenen beschränkten konvexen Menge ist (eine sogenannte 'Klee cavern'). Das heißt, es muß schon eine sehr exotische Situation vorliegen.

3.4 Sonnen

Die Tschebyschew-Menge $S \subseteq X$ heißt *Sonne*, wenn für jedes $x \in X$ mit nächstem Punkt $y \in S$ ($y \neq x$) gilt: Alle Punkte auf dem Halbstrahl, der von y ausgeht und x trifft, haben y als nächsten Punkt in S .

Efimov und Stečkin [13, 15, 14] haben gezeigt, daß in einem *glatten* Banach-Raum jede Sonne konvex ist (vgl. [48, Lemma]). Der Banach-Raum X heißt *glatt*, wenn es in jedem Randpunkt der Einheitskugel höchstens eine Stützhyperebene gibt.

Dunham [11] gab ein Beispiel einer Tschebyschew-Menge in $C[0, 1]$ an, die keine Sonne ist (vgl. auch [6]).

4 Dilatationen

4.1 Definition und einfache Eigenschaften

Eine *Dilatation* D ist eine Abbildung des R^d in sich, die man auf die folgende Weise definieren kann [2, Chapter II.2]: Gegeben seien zwei verschiedene

Punkte x und y in R^d sowie ihre Bilder $x' = Dx$ und $y' = Dy$. Dann soll gelten $y' = x' + \lambda \cdot (y - x)$ mit einem reellen λ , das heißt, die beiden Strecken $\overline{xy}$ und $\overline{x'y'}$ sind parallel.

Satz 4.1 Die Dilatation ist durch die Bilder x' und y' zweier verschiedener Punkt x und y eindeutig bestimmt.

Ist $x' = y'$, dann ist D entartet und bildet alle Punkte des R^d in x' ab.

Für $x' \neq y'$ ist D eine umkehrbar eindeutige Abbildung des R^d in sich.

Den Beweis dieses Satzes findet man in [2, Chapter II.2, Theorem 2.3].

Dilatationen kann man vermittle ihrer Fixpunkte klassifizieren:

Satz 4.2 Hat eine Dilatation zwei (voneinander verschiedene) Fixpunkte, dann ist sie die identische Abbildung.

Hat eine Dilatation keine Fixpunkte, dann ist sie eine *Translation* $T(x_0)$ $x = x + x_0$ mit dem *Verschiebungsvektor* x_0 .

Hat eine Dilatation genau einen Fixpunkt z_0 , dann hat sie die Form

$$D(z_0, \lambda) x = z_0 + \lambda \cdot (x - z_0).$$

Wir nennen sie dann eine *eigentliche Dilatation* mit *Zentrum* z_0 und *Faktor* λ .

Zum Beweis vgl. [2, Chapter II.2].

Es sei $D(z_0, \lambda)$ eine eigentliche Dilatation. D heißt *gleichsinnig*, wenn $\lambda > 0$ ist. Für $\lambda = 0$ hat man die konstante Abbildung $x \rightarrow z_0$, für $\lambda = 1$ die identische Abbildung, für $\lambda = -1$ die Spiegelung am Nullpunkt. $0 \leq \lambda < 1$ bedeutet eine *Kontraktion*, $\lambda > 1$ eine *Expansion*. Für jede Norm gilt

$$\|D(z_0, \lambda)x_1 - D(z_0, \lambda)x_2\|_B = |\lambda| \cdot \|x_1 - x_2\|_B.$$

Satz 4.3 Die Dilatationen bilden eine Gruppe und die Translationen bilden eine invariante Untergruppe dieser Gruppe.

Den Beweis dieses Satzes findet man in [2, Chapter II.2, Theorem 2.6].

Satz 4.4 1. Es seien $D(z_1, \lambda_1)$ und $D(z_2, \lambda_2)$ zwei eigentliche Dilatationen. Dann ist für $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 1$ die Verknüpfung der beiden Abbildungen wieder eine eigentliche Dilatation mit

$$D(z_1, \lambda_1) \circ D(z_2, \lambda_2) = D\left(\frac{(1 - \lambda_1) \cdot z_1 + \lambda_1 \cdot (1 - \lambda_2) \cdot z_2}{1 - \lambda_1 \cdot \lambda_2}, \lambda_1 \cdot \lambda_2\right).$$

Für $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$ ist das Produkt der beiden Dilatationen eine Translation:

$$D(z_1, \lambda_1) \circ D(z_2, \lambda_2) = T((1 - \lambda_1) \cdot (z_1 - z_2)).$$

2. Es sei $H(x^*, a) = \{x | \langle x^*, x \rangle = a\}$ eine Hyperebene im R^d . Dann ist

$$D(z_0, \lambda)H(x^*, a) = H(x^*, \lambda \cdot a + (1 - \lambda) \cdot \langle x^*, z_0 \rangle).$$

4.2 Dilatationen und Normkugeln

Dilatationen sind das geeignete Werkzeug zur Untersuchung von Minkowski-Räumen, da sie Normkugeln wieder in Normkugeln überführen und andererseits zu je zwei Normkugeln (von positivem Radius) stets genau zwei Dilatationen existieren, die die eine auf die andere überführen (Satz 4.4)..Beschränkt man sich auf gleichsinnige Dilatationen, dann gibt es

Zuerst formulieren wir einen allgemeinen Satz über konvexe Mengen.

Satz 4.5 Es sei S sei eine konvexe Menge, z_0 ein fest gewählter Punkt und λ eine Zahl sowie $S_\lambda(z_0) = D(z_0, \lambda)S$. Dann ist $S_\lambda(z_0)$ konvex. Weiterhin gilt:

1. Für $\lambda \geq 0$ ist

$$z_0 \in S \Leftrightarrow S \subseteq S_\lambda(z_0) \text{ oder } S_\lambda(z_0) \subseteq S,$$

und zwar

$$S \subseteq S_\lambda(z_0) \Leftrightarrow \lambda > 1,$$

$$S_\lambda(z_0) \subseteq S \Leftrightarrow 0 \leq \lambda < 1.$$

2. Für $\lambda < 0$ ist

$$S \cap S_\lambda(z_0) \neq \emptyset \Leftrightarrow z_0 \in S.$$

Beweis: Es sei $x \in S$. Eine Gerade durch x und z_0 wird durch die Dilatation in sich abgebildet. Gilt die Aussage des Satzes also im R^1 , dann gilt sie auch allgemein. Im R^1 ist die Aussage jedoch trivial.

Satz 4.6 Das Bild einer Kugel unter einer Dilatation ist wieder eine Kugel, es gilt nämlich: Die Kugel $B_\rho(x_0)$ wird durch $D(z_0, \lambda)$ auf die Kugel $B_{|\lambda|\cdot\rho}(\lambda \cdot x_0 + (1 - \lambda) \cdot z_0)$ abgebildet. Es seien umgekehrt zwei Kugeln $B_{\rho_1}(x_1)$ und $B_{\rho_2}(x_2)$ gegeben mit $\rho_1 \neq \rho_2$. Dann ist

$$D\left(\frac{\pm\rho_1x_2 - \rho_2x_1}{\pm\rho_1 - \rho_2}, \pm\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)B_{\rho_1}(x_1) = B_{\rho_2}(x_2).$$

Für $\rho_1 = \rho_2 =: \rho$ entartet die Dilatation zu einer Translation:

$$T(x_2 - x_1)B_\rho(x_1) = B_\rho(x_2).$$

Das Zentrum der (eigentlichen) Dilatation, die zwei Kugeln von verschiedenem Radius ineinander überführt, liegt auf einer Geraden durch die Mittelpunkte der beiden Kugeln.

Für $\lambda > 0$ gilt

1. $B_{\rho_1}(x_1) \subseteq B_{\rho_2}(x_2) \Leftrightarrow \rho_1 \leq \rho_2$ und $z_0 \in B_{\rho_1}(x_1)$ sowie $x_1 = \frac{\rho_1}{\rho_2}x_2 + (1 - \frac{\rho_1}{\rho_2})z_0 \in \text{conv}(x_2, z_0)$.
2. Es sei $B_{\rho_1}(x_1) \subseteq B_{\rho_2}(x_2)$, jedoch $B_{\rho_1}(x_1) \neq B_{\rho_2}(x_2)$. Dann gilt $\text{bd } B_{\rho_1}(x_1) \cap \text{bd } B_{\rho_2}(x_2) \neq \emptyset \Leftrightarrow z_0 \in \text{bd } B_{\rho_1}(x_1) \cap \text{bd } B_{\rho_2}(x_2)$.
3. Es sei B streng konvex, $B_{\rho_1}(x_1) \subseteq B_{\rho_2}(x_2)$, jedoch $B_{\rho_1}(x_1) \neq B_{\rho_2}(x_2)$. Dann ist $\text{bd } B_{\rho_1}(x_1) \cap \text{bd } B_{\rho_2}(x_2)$ höchstens einpunktig.
4. Es sei B glatt, $B_{\rho_1}(x_1) \subseteq B_{\rho_2}(x_2)$, jedoch $B_{\rho_1}(x_1) \neq B_{\rho_2}(x_2)$. Dann ist $\text{bd } B_{\rho_1}(x_1) \cap \text{bd } B_{\rho_2}(x_2)$ konvex.

Beweis: 1. Klar mit Satz 3.5 und nach Definition der vermittelnden Dilatation.

2. Wir betrachten eine Gerade durch z_0 und einen gemeinsamen Randpunkt. Wegen 1. ist $z_0 \in B_{\rho_1}(x_1)$. Ist z_0 kein gemeinsamer Randpunkt, dann liegt also z_0 im Inneren von $B_{\rho_1}(x_1)$. Wegen $B_{\rho_1}(x_1) \neq B_{\rho_2}(x_2)$ muß $\rho_1 > \rho_2$ sein, also $\lambda > 1$, somit würde der gemeinsame Randpunkt von $B_{\rho_1}(x_1)$ und $B_{\rho_2}(x_2)$ durch die vermittelnde Dilatation auf einen Innenpunkt von $B_{\rho_2}(x_2)$ abgebildet, ein Widerspruch.

Die andere Richtung der Aussage ist klar.

3. Unter 2. hatten wir gezeigt, daß z_0 ein gemeinsamer Randpunkt sein muß. Gäbe es noch einen weiteren, von z_0 verschiedenen, gemeinsamen Randpunkt, dann wäre dieser Bildpunkt eines Punktes auf der Verbindungsstrecke mit z_0 . Da B streng konvex ist, wäre dieser letztere Punkt Innenpunkt von $B_{\rho_1}(x_1)$, ein Widerspruch.

4. Eine Gerade durch z_0 und einen Punkt aus $\text{bd } B_{\rho_1}(x_1) \cap \text{bd } B_{\rho_2}(x_2)$ schneidet $B_{\rho_1}(x_1) \cap B_{\rho_2}(x_2)$ in einer Strecke. Träfe die Gerade das Innere von $B_{\rho_1}(x_1)$, dann würde das Urbild des Schnittes des Randes von $B_{\rho_2}(x_2)$ mit der Geraden im Inneren von $B_{\rho_1}(x_1)$ liegen, was nicht möglich ist. Es folgt, daß $B_{\rho_1}(x_1) \cap B_{\rho_2}(x_2)$ bezüglich z_0 sternförmig ist.

Seien $x_1, x_2 \in \text{bd } B_{\rho_1}(x_1) \cap \text{bd } B_{\rho_2}(x_2)$, dann gehören die beiden Verbindungsstrecken mit z_0 zu $\text{bd } B_{\rho_1}(x_1) \cap \text{bd } B_{\rho_2}(x_2)$. Die Verbindungsstrecken liegen je in einer Stützhyperebene durch z_0 an $B_{\rho_1}(x_1)$. Da B als glatt vorausgesetzt worden war, gibt es nur eine solche Stützhyperebene. Die Verbindungsstrecke von x_1 und x_2 liegt in $B_{\rho_1}(x_1) \cap B_{\rho_2}(x_2)$ und in der Stützhyperebene, also in $\text{bd } B_{\rho_1}(x_1) \cap \text{bd } B_{\rho_2}(x_2)$.

4.3 Anwendungen

Als Anwendung der beiden Sätze beweisen wir noch einige Lemmas:

Lemma 4.1 B sei glatt. Es sei $B_\rho(x)$ eine Kugel, H sei Tangentialhyperebene an $B_\rho(x)$ im Punkte z . Weiterhin sei y ein Punkt, der auf der gleichen Seite der Tangentialhyperebene liegt, wie $B_\rho(x)$, jedoch nicht auf H . Dann gibt es ein $\lambda > 0$, so daß $y \in D(z, \lambda)B_\rho(x)$.

Beweis: Die Verbindungsstrecke von z und y trifft das Innere von $B_\rho(x)$, sonst wäre die Hyperebene, die $B_\rho(x)$ von der Verbindungsstrecke trennt, eine Stützhyperebene an $B_\rho(x)$, die von H verschieden ist.

Lemma 4.2 Es sei $B_\rho(x)$ eine Kugel, H sei Stützhyperebene an $B_\rho(x)$, $z \in H \cup B_\rho(x)$. Dann ist H Stützhyperebene an $D(z, \lambda)B_\rho(x)$ für alle reellen λ .

Lemma 4.3 Sei $y \in \Pi(x)$. Dann ist $P_S^B(y) \subseteq P_S^B(x)$.

Beweis: Wegen $y \in \Pi(x)$ gibt es ein $z \in P_S^B(x)$, so daß y auf der Verbindungsstrecke von x und z liegt. Die Dilatation mit Zentrum z und geeignetem Faktor bildet y auf x ab und damit ist die Stützkugel mit Mittelpunkt y in der mit Mittelpunkt x enthalten. Daraus folgt die Behauptung.

Folgerung: Ist $P_S^B(x)$ einpunktig, dann gilt

$$y \in \Pi(x) \Rightarrow P_S^B(y) = P_S^B(x).$$

Lemma 4.4 Seien $x_1, x_2 \in R^d$ mit $\Pi(x_1) \cap \Pi(x_2) \neq \emptyset$. Dann ist auch $P_S^B(x_1) \cap P_S^B(x_2) \neq \emptyset$.

Beweis: Es sei $y \in \Pi(x_1) \cap \Pi(x_2)$. Dann ist $P_S^B(y) \subseteq P_S^B(x_i)$ für $i = 1, 2$ wegen Lemma 3.3, also

$$\emptyset \neq P_S^B(y) \subseteq P_S^B(x_1) \cap P_S^B(x_2).$$

5 Fixpunktsätze

Für den Beweis der Motzkin'schen Sätze in Minkowski-Räumen der Dimension größer als 2 benötigt man sogenannte topologische Fixpunktsätze. Es ist kein "elementarer" Beweis - das heißt ein Beweis ohne Verwendung dieser Fixpunktsätze - bekannt. Dies scheint ein Indiz dafür zu sein, daß die Sätze von Motzkin - zumindest deren zweiter (s.u. Kapitel 6) - vom topologischen Gesichtspunkt aus nicht trivial sind.

Ausgangspunkt für die Untersuchungen ist der Brouwer'sche Fixpunktsatz [40, Theorem 3.9.5, Seite 127]:

Satz 5.1 K sei eine kompakte und konvexe Menge im R^d . Dann besitzt jede stetige Abbildung $f : K \rightarrow K$ mindestens einen Fixpunkt $x^* \in K$, das heißt, es ist $f(x^*) = x^*$.

In Minkowski-Räumen mit nicht streng konvexer Normkugel kann es vorkommen, daß die Projektion eines Punktes auf eine Menge nicht mehr einkpunktig ist. Für diesen Fall benötigen wir einige Begriffe.

Definition 5.1 (vgl. [40, Seite 129] oder [21, Seite 609, Nr. 231]) Es seien E und F zwei topologische Räume, $\mathcal{A}(F)$ sei die Menge aller nichtleeren abgeschlossenen Teilmengen von F . Die (mengenwertige) Abbildung $f : E \rightarrow \mathcal{A}(F)$ heißt *oberhalbstetig*, wenn gilt:

Für alle $x_0 \in E$ und alle offenen Mengen $U \subseteq F$ mit $f(x_0) \subseteq U$ gibt es eine Umgebung V von x_0 , so daß $f(x) \subseteq U$, falls $x \in V$.

Folgerungen:

- Jede stetige Funktion ist oberhalbstetig.
- Jede einwertige oberhalbstetige Funktion ist stetig.
- Die Verknüpfung (Hintereinanderausführung) oberhalbstetiger Funktionen ist eine oberhalbstetige Funktion.
- Ist der Raum F *regulär* (das heißt, für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq F$ und für $x \in F \setminus A$ gibt es offene Mengen G und H aus F mit $A \subseteq G, x \in H$ und $G \cap H = \emptyset$), dann gilt: f oberhalbstetig $\iff x_i \rightarrow x_0, y_i \rightarrow y_0, y_i \in f(x_i) \Rightarrow y_0 \in f(x_0)$ (zum Beweis vgl. [40, Seite 129]).

Kakutani bewies die folgende Verallgemeinerung des Brouwer'schen Fixpunktsatzes ([40, Theorem 3.9.9, Seite 129], [21, Nr. 231, 232, Seiten 609-614,]):

Satz 5.2 K sei eine kompakte und konvexe Menge im $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{K}(K)$ sei die Menge aller nichtleeren abgeschlossenen konvexen Teilmengen von K .

Dann gibt es für die oberhalbstetige Abbildung $f : K \rightarrow \mathcal{K}(K)$ einen Fixpunkt $x_0 \in K$ mit $x_0 \in f(x_0)$.

Satz 5.3 Es sei B kompakt, konvex, $\Theta_d \in \text{int } B$, B symmetrisch. Die Menge S sei abgeschlossen.

Dann ist die Abbildung $x \rightarrow P_S^B(x)$ oberhalbstetig.

Beweis: U sei eine offene Menge, die $P_S^B(x)$ enthält, $r = \|x - P_S^B(x)\|_B$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß $B_{r+\varepsilon}(x) \cap S \subseteq U$. Wähle ein y mit $\|x - y\|_B \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Dann ist $B_{r+\varepsilon/2}(y) \subseteq B_{r+\varepsilon}(x) \Rightarrow B_{r+\varepsilon/2}(y) \cap S \subseteq U$. Nun ist $\|y - P_S^B(x)\|_B \leq r + \frac{\varepsilon}{2}$, also $\|y - P_S^B(y)\|_B \leq r + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow P_S^B(y) \subseteq B_{r+\varepsilon/2}(y) \cap S \subseteq U$.

Es gilt weiterhin

Satz 5.4 Es seien E und F topologische Räume, $f : E \rightarrow \mathcal{A}(F)$ eine mengenwertige Abbildung. Für $U \subseteq F$ definieren wir $f^{-1}(U) = \{x \in E \mid f(x) \subseteq U\}$.

f oberhalbstetig $\iff f^{-1}(U)$ ist offen für alle offenen $U \subseteq F$.

Beweis: (Standardbeweis; vgl. etwa [1, § 12]) 1. f sei oberhalbstetig, U eine offene Teilmenge von F . Es sei $x \in f^{-1}(U)$. Dann gibt es wegen der Oberhalbstetigkeit von f eine offene Menge $V \subseteq E$, die x enthält und für die $f(V) \subseteq U$ ist. Das heißt aber, daß $V \subseteq f^{-1}(U)$ ist, also ist x Innenpunkt von $f^{-1}(U)$, d.h. $f^{-1}(U)$ ist offen.

2. Sei $x \in E, U \subseteq F$ eine offene Menge, die $f(x)$ enthält. Dann ist $V = f^{-1}(U)$ eine offene Menge, die x enthält und für die gilt $f(V) \subseteq U$. Somit ist f oberhalbstetig.

Lemma 5.1 X sei zusammenhängend und $f : X \rightarrow Y$ oberhalbstetig. Weiterhin sei $f(x)$ zusammenhängend für jedes $x \in X$. Dann ist auch $f(X)$ zusammenhängend.

Beweis: Wir nehmen an, $f(X)$ sei nicht zusammenhängend, das heißt, es gebe eine Zerlegung $f(X) = X_1 \cup X_2$ mit $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ und X_1, X_2 offen. Die Urbilder von X_1 und X_2 sind offene Mengen (Satz 1.2) mit $f^{-1}(X_1) \cup f^{-1}(X_2) = X$. Da X als zusammenhängend vorausgesetzt wurde, muß es ein $x \in X$ geben mit $x \in f^{-1}(X_1) \cup f^{-1}(X_2)$, also $f(x) \cap X_1 \neq \emptyset$ und $f(x) \cap X_2 \neq \emptyset$. Die letztgenannten beiden Mengen sind als Schnitte der offenen Mengen X_1 und X_2 relativ offen im Widerspruch zu der Annahme, daß $f(x)$ zusammenhängend sein soll.

6 Die Sätze von Motzkin

In seiner Arbeit [33] bewies Motzkin zwei Sätze, allerdings nur für den zweidimensionalen Fall. Diese sollen hier in unserer Terminologie und etwas allgemeiner formuliert werden. Dazu definieren wir: $\Sigma''(S)$ ist die Menge aller Punkte $x \in R^d$, deren Projektion $P_S^B(x)$ auf S nicht konvex ist.

Satz 6.1 Es sei B glatt. Die abgeschlossene Menge S im R^d ist genau dann konvex, wenn $\Sigma''(S) = \emptyset$ ist.

Anmerkung: Ist zudem B streng konvex, dann ist offenbar S genau dann konvex, wenn $\Sigma'(S) = \emptyset$ ist. In dieser Form wird der Satz üblicherweise

zitiert [38, Chapter XI.C.2], [46, Chapter VII.C, Theorem 7.8], [24]. $\Sigma'(S) = \emptyset$ bedeutet, daß S eine Tschebyschew-Menge ist.

Beweis: 1. Es sei $x \in \Sigma''(S)$. Dann gibt es $y_1, y_2 \in P_S^B(x)$ und ein λ mit $0 < \lambda < 1$, so daß $y = \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 \notin P_S^B(x)$ ist. Da y in der Stützkugel an S mit Mittelpunkt X liegt, kann S nicht konvex sein.

2. Der Beweis der Umkehrung ist Gegenstand der nachfolgenden Abschnitte. Vgl. dazu [46, Chapter VII.C, insbesondere Theorem 7.8] oder [24]

Der zweite Satz von Motzkin ist weitaus schwieriger zu beweisen.

Satz 6.2 Ist B glatt, dann ist $\text{cl } \Sigma(S) = \text{cl } \Sigma''(S)$ für jede abgeschlossene Menge S .

Ist zudem B streng konvex, dann ist $\text{cl } \Sigma(S) = \text{cl } \Sigma'(S)$.

Beweis: 1. Klar ist, daß $\Sigma''(S) \subseteq \Sigma(S)$. B sei streng konvex. Dann gilt sicher $\Sigma'(S) \subseteq \Sigma(S)$. Hierzu ist zu zeigen, daß jede Stützkugel $B_\rho(x)$, die S in wenigstens zwei verschiedenen Punkten y_1, y_2 berührt, maximal ist. Gäbe es eine Stützkugel $B_{\rho'}(x')$, die $B_\rho(x)$ enthält mit $\rho' > \rho$, dann würde diese S ebenfalls in den beiden Punkten y_1 und y_2 berühren. Für streng konvexes B ist dies aber wegen Satz 3.6, Aussage 3 nicht möglich.

2. Für den nichttrivialen Teil der Aussage benötigt man tiefer liegende Sätze. Diesem Teil sind die Überlegungen der folgenden Kapitel gewidmet.

Hat man Satz 6.2 bewiesen, dann kann man Satz 6.1 auch so formulieren:

Satz 6.3 Es sei B glatt.

Die abgeschlossene Menge S ist genau dann konvex, wenn $\Sigma(S) = \emptyset$ ist.

Anmerkung: Motzkin bewies diesen Satz in seiner Arbeit in dieser Form [33, Théorème I].

Man sieht leicht ein, daß für streng konvexes B die Menge S genau dann Sonne ist, wenn $\Sigma(S) = \emptyset$ ist. Ist umgekehrt $\Sigma(S) = \emptyset$, dann gibt es keine maximalen Stützkugeln. Wenn eine Stützkugel in einer anderen enthalten ist, dann liegen wegen Satz 3.6 ihre Mittelpunkte auf einer Geraden, die das Zentrum der vermittelnden Dilatation enthält (Teil 1 von Satz 3.6). Letzteres liegt im gemeinsamen Rand der beiden Stützkugeln (Teil 2), fällt also

wegen der vorausgesetzten strengen Konvexität von B mit dem Stützpunkt zusammen (Teil 3). Damit ist S Sonne.

Ziel unserer Untersuchungen ist es, die Sätze von Motzkin zunächst allgemein zu formulieren und zu beweisen. Im Hinblick auf die Anwendungen ist insbesondere eine Formulierung für polyedrische Normen (speziell die 1- und ∞ -Norm) notwendig, da diese für diskretisierte Mengen maßgeblich sind.

7 Anhang 1: Der Beweis von Motzkin*

§1. - 1. Gegeben sei eine abgeschlossene Punktmenge E in der Euklidischen Ebene. Es sei P_0 ein beliebiger Punkt außerhalb von E , $K_0 = K(P_0)$ der kleinste Kreis mit Mittelpunkt P , der E in einem oder mehreren Punkten $Q_0 = Q(P_0)$ trifft. M. Vergnères in seiner Note *Über die Eindeutigkeit des Minimums des Abstandes eines Punktes von einer Menge*[†] nennt die Punkte Q_0 *Projektionen* von P_0 auf E , das Segment P_0Q_0 eine *Projizierende* von P_0 bezüglich E und den Punkt P_0 selbst *gewöhnlich* bezüglich E , wenn er eine eindeutige Projektion auf E hat, andernfalls *außergewöhnlich* bezüglich E . Wir nennen K_0 *Stützkreis* an E ; in Abhängigkeit von der Anzahl der Q_0 auf der Peripherie von K_0 kann man unterscheiden zwischen *einfachen*, *doppelten* usw. Stützkreisen.

...

2.

...

Satz I. - Wenn jeder Punkt der Ebene außerhalb der abgeschlossenen Menge E eine einzige Projektion hat, dann ist E konvex.

...

5.

...

Definition. - Ein gewöhnlicher Punkt P_0 mit Projektion Q_0 ist *einfach gewöhnlich*, wenn unter allen Punkten des Halbstrahls $\overrightarrow{P_0Q_0}$ der Punkt Q_0 nur Projektion der Punkte zwischen Q_0 (ausschließlich) und P_0 (einschließlich) ist; im anderen Falle ist P_0 *total gewöhnlich*.

6. Die einfach gewöhnlichen Punkte P_s einer Menge E und ebenso die außergewöhnlichen Punkte P_e bilden (wenn sie existieren) eine Randmenge (das heißt, ohne Innenpunkte). Tatsächlich, *in der Nähe* (in einer Umgebung) jedes Punktes außerhalb E gibt es total gewöhnliche Punkte P_t , zum

*Th. Motzkin. Sur quelques propriétés caractéristiques des ensembles convexes.

Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei, Serie sesta, Rendiconti, Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, 21:562 – 567, 1935.

Auszugsweise Übersetzung durch Ulrich Eckhardt

[†]Diese 'Rendiconti', Vol. XVIII, pp. 542-546

Beispiel auf den Projizierenden. Detailliert werden die gegenseitigen Beziehungen zwischen den drei Punktmengen, die von den P_e , P_s , P_t gebildet werden, im folgenden Satz behandelt.

Satz II. - A) In der Nähe eine P_e gibt es immer Punkte P_t und - außer im trivialen Falle (siehe weiter unten in n. 8) - Punkte P_s ; Die Punkte P_s sind 'fakultativ', das heißt, sie können vorhanden sein oder auch nicht. B) In der Nähe eines P_s gibt es immer Punkte P_t und P_e , fakultativ Punkte P_s . C) In der Nähe eines P_t^* gibt es immer Punkte P_t , fakultativ Punkte P_e oder P_s und P_s .

§3. - 7. Wir beweisen zuerst die Aussage B). Die Existenz von Punkten P_t in der Nähe eines Punktes P_s soll gezeigt werden. Wenn man einen Punkt $P_0 = P_s$ hat ohne P_s -Nachbarn, dann soll C_ε ein Kreis um P_0 sein, der außerhalb E liegt und so klein ist, daß 1° Jeder Punkt P_c von C_ε (den Rand eingeschlossen) eine eindeutige Projektion $Q_c = Q(P_c)$ auf E hat und 2° Die Abweichung des Halbstrahls $\overrightarrow{Q_c P_c}$ kleiner als $\varepsilon < \frac{\pi}{6}$ ist (Die *Abweichung* eines Halbstrahls ist der Absolutbetrag seines Winkels mit dem Halbstrahl $\overrightarrow{P_0 Q_0}$). Ein solcher Kreis existiert nach den Bemerkungen am Ende der n. 3.

Wir betrachten jetzt den Durchmesser d von C_ε , der zu $P_0 Q_0$ senkrecht steht und den Halbkreisbogen s , der durch d abgeschnitten wird und von Q_0 am weitesten entfernt ist. Es seien S_1 und S_2 Punkte auf s , für die $\overrightarrow{P_0 S_1}$ und $\overrightarrow{P_0 S_2}$ die gleiche Abweichung ε besitzen, und es seien D_1 und D_2 Punkte auf d , die von P_0 verschieden sind, so daß $\overrightarrow{D_1 S_1}$ und $\overrightarrow{D_2 S_2}$ die Abweichung ε haben. Dann trifft die Projizierende $S_1 Q(S_1)$ den Durchmesser d in einem Punkt $P(S_1)$ zwischen P_0 und D_1 . Auf die gleiche Weise definieren wir $P(S_2)$ zwischen P_0 und D_2 und allgemein $P(S)$ zwischen D_1 und D_2 für jedes S auf dem Bogen $\widehat{S_1 S_2}$.

Der Punkt $P(S)$ hängt eindeutig und stetig von S ab, da die Projizierenden $SQ(S)$ sich nicht schneiden, sogar eineindeutig. Man sieht auf die gleiche Weise, daß $P(S)$ das Segement $P(S_1)P(S_2)$ auf monotone Weise überstreicht, wenn S im gleichen Sinne den Bogen $\widehat{S_1 S_2}$ überstreicht. Folglich ist P_0 auf der Projizierenden $S_0 Q(S_0)$ eines gewissen Punktes S_0 auf dem Bogen $\widehat{S_1 S_2}$ gelegen und ist demnach (entgegen Voraussetzung) ein P_t .

*und erst recht in der Nähe eines Randpunktes von E .

8 Anhang 2: Der Beweis von Jessen*

1. Unter einer konvexen Punktmenge im n -dimensionalen euklidischen Raum versteht man bekanntlich eine Punktmenge, welche für je zwei ihrer Punkte auch deren Verbindungsstrecke enthält. Eine abgeschlossene konvexe Punktmenge K hat, wie man leicht sieht, die Eigenschaft, daß für jeden Punkt P außerhalb der Menge ein eindeutig bestimmter nächster Punkt P_* der Menge gefunden werden kann, das heißt, der Punkt P_* aus K , für welchen der Abstand PP_* minimal ist. Diese Eigenschaft ist charakteristisch für abgeschlossene konvexe Punktmenge, es gilt der folgende Satz:

Eine Punktmenge K im n -dimensionalen Raum hat genau dann die Eigenschaft, daß für jeden Punkt P außerhalb K ein eindeutig bestimmter nächster Punkt P_ existiert, wenn die Menge abgeschlossen und konvex ist.*

Beweise für diesen Satz wurden von L. N. H. Bunt [9, Satz 51], und N. Kritikos [27] gegeben, im Fall $n = 2$ von T. Motzkin [33], S. Bundgaard und S. Duerlund [8, Abschnitt 1] sowie L. Beretta und A. Maxia [4, Seite 5 - 7]. Es soll hier der Beweis von Kritikos, leicht verändert, gebracht werden. Der Einfachheit halber beweisen wir den Fall $n = 3$.

Daß die Bedingung hinreichend ist, ist, wie bereits erwähnt, leicht zu beweisen. Es ist nun zu zeigen, daß sie auch notwendig ist. Sei also K eine Punktmenge im Raum, die die Eigenschaft hat, daß sie für jeden Punkt P außerhalb K einen eindeutig bestimmten nächsten Punkt enthält; wir wollen nun beweisen, daß K abgeschlossen und konvex ist.

Der Beweis wird indirekt geführt. Zuerst nehmen wir an, daß K nicht abgeschlossen sei. Das heißt, es gibt einen Verdichtungspunkt P von K , der nicht zu K gehört. Für diesen Punkt P gibt es in K keinen nächsten Punkt, im Widerspruch zur Annahme.

Wir nehmen weiterhin an, K sei nicht konvex. Dann gibt es zwei Punkte A und B in K , für welche nicht alle Punkte auf der Verbindungsstrecke AB zu K gehören. Es sei Q ein Punkt von AB , der nicht in K liegt. Da K

*Børge Jessen. To Sætninger om konvekse Punktmængder. *Matematisk Tidsskrift B*, 66 – 70, 1940.

Übersetzung des ersten Teils durch Ulrich Eckhardt

bereits als abgeschlossen bekannt ist, können wir eine abgeschlossene Kugel S mit Mittelpunkt Q wählen, die ganz außerhalb von K liegt. Für einen willkürlichen Punkt P außerhalb K bezeichnen wir mit S_P die abgeschlossene Kugel mit Mittelpunkt P und Radius PP_* . Wir betrachten die Menge M aller Punkte P , für welche S_P die Kugel S enthält. Da der Abstand PP_* , wie man leicht sieht, stetig von P abhängt, ist die Menge M abgeschlossen, und da die Punkte A und B stets außerhalb von S_P liegen, ist es klar, daß M beschränkt ist. Es gibt also einen Punkt P in M , für welchen PP_* am größten ist. Für diesen Punkt P legen wir nun durch den Rand von S_P einen Kleinkreis mit Mittelpunkt P_* und so kleinem sphärischen Radius ($< \frac{\pi}{2}$), daß die Kugel S in die P_* entgegengesetzte Seite bezüglich der Kleinkreisebene fällt. Der abgeschlossene Teil von S_P , welcher auf der P_* entgegengesetzten Seite der Kleinkreisebene liegt oder in der Kleinkreisebene selbst, enthält keine Punkte aus K und hat sogar einen positiven Abstand von K . Für einen Punkt R auf der Verlängerung von P_*P über P hinaus und hinreichend nahe an P wird die Kugel mit Mittelpunkt R , die durch den Kleinkreis bestimmt ist, auch keine Punkte aus K enthalten, sie enthält jedoch S . Diese Kugel ist enthalten in der zu R gehörenden Kugel S_R , und da deren Radius offenbar größer ist als PP_* , sehen wir, daß $RR_* > PP_*$. Da andererseits S_R die Kugel S enthält, ist R ein Punkt der Menge M . Dies ist ein Widerspruch dazu, daß P derjenige Punkt in M war, für welchen der Abstand PP_* maximal ist.

Damit ist der Satz bewiesen.

...

Literatur

- [1] P. S. Alexandroff. *Einführung in die Mengenlehre und die Theorie der reellen Funktionen. Hochschulbücher für Mathematik, Band 23*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956.
- [2] E. Artin. *Geometric Algebra. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, Number 3*, Interscience Publishers, Inc., New York, London, 1957.
- [3] Edgar Asplund. Čebyšev sets in Hilbert space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 144:235 – 240, 1969.
- [4] L. Beretta and A. Maxia. Insiemi convessi e orbiformi. *Regia Università di Roma e reale Istituto Nazionale di Alta Matematica. Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni (Roma), Serie V*, 1:1 – 64, 1940.
- [5] Harry Blum. A transformation for extracting new descriptors of shape. In W. Wathen-Dunn, editor, *Models for the Perception of Speech and Visual Form*, Cambridge: M.I.T. Press, 1967.
- [6] B. Brosowski, F. Deutsch, J. Lambert, and P. D. Morris. Chebychev sets which are not suns. *Math. Ann.*, 212:89 – 101, 1974.
- [7] J. W. Bruce, P. J. Giblin, and C. G. Gibson. Symmetry sets. *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, 101 A:163 – 186, 1985.
- [8] S. Bundgaard and S. Duerlund. To Bemærkninger om konvekse Figurer. *Matematisk Tidsskrift B*, 81 – 85, 1937.
- [9] L. N. H. Bunt. *Bijdrage tot de theorie der convexe puntverzamelingen*. Amsterdam, 1934.
- [10] L. Collatz and W. Krabs. *Approximationstheorie. Teubner Studienbücher Mathematik*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1973.
- [11] Charles B. Dunham. Chebyshev sets in $C[0, 1]$ which are not suns. *Canad. Math. Bull.*, 18:35 – 37, 1975.

- [12] Herbert Edelsbrunner. *Algorithms in Combinatorial Geometry. EATCS Monographs in Theoretical Computer Science, Vol 10*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1987.
- [13] N. V. Efimov and S. B. Stečkin. Some properties of Čebyšev sets (Russian). *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 118:17 – 19, 1958.
- [14] N. V. Efimov and S. B. Stečkin. Support properties of sets in Banach spaces and Čebyšev sets (Russian). *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 127:254 – 257, 1959.
- [15] N. V. Efimov and S. B. Stečkin. Čebyšev sets in Banach spaces (Russian). *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 121:582 – 585, 1958.
- [16] Per-Ola Forsgren and Peter Seideman. An interobject distance measure based on medial axes retrieved from discrete distance maps. *IEEE Trans. PAMI*, 12:390 – 397, 1990.
- [17] Pijush K. Ghosh. A solution of polygon containment, spatial planning, and other related problems using Minkowski operations. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 49:1 – 35, 1990.
- [18] P. J. Giblin and S. A. Brassett. Local symmetry of plane curves. *American Mathematical Monthly*, 92:689 – 707, 1985.
- [19] Peter J. Giblin and Donal B. O’Shea. The bitangent sphere problem. *American Mathematical Monthly*, 97:5 – 23, 1990.
- [20] Alfred Haar. Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung an stetige Funktionen. *Math. Ann.*, 78:294 – 311, 1918.
- [21] Harro Heuser. *Lehrbuch der Analysis, Teil 2. Mathematische Leitfäden*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1981.
- [22] Seng-Beng Ho and Charles R. Dyer. Shape smoothing using medial axis properties. *IEEE Trans. PAMI*, 8:512 – 520, 1986.
- [23] Josef Hoschek. Offset curves in the plane. *computer-aided design*, 17:77 – 82, 1985.

- [24] Børge Jessen. To Sætninger om konvekse Punktmængder. *Matematisk Tidsskrift B*, 66 – 70, 1940.
- [25] L. V. Kantorovič and G. P. Akilov. *Funkzional'nyi Analiz (Izd. vtoroe, pererabotannoe) (Russian)*. 'Nauka', Moskva, 1977.
- [26] Fernand Klein. *Vollständige Mittelachsenbeschreibung binärer Bildstrukturen mit Euklidischer Metrik und korrekter Topologie*. PhD thesis, Zürich: Diss. ETH, 1987.
- [27] M. N. Kritikos. Sur quelques propriétés des ensembles convexes. *Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences*, 40:87 – 92, 1938.
- [28] Jay Leavitt and Peter Ungar. Circle supports the largest sandpile. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 15:35 – 37, 1962.
- [29] J. C. Mayrhuber. On Haar's theorem concerning Chebychev approximation problems having unique solutions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 7:609 – 615, 1956.
- [30] S. Mazur. Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen. *Studia Math.*, 4:70 – 84, 1933.
- [31] Hermann Minkowski. *Geometrie der Zahlen*. Teubner, Leipzig, Berlin, 1919.
- [32] T. Motzkin. Sur quelques propriétés caractéristiques des ensembles bornés non convexes. *Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei, Serie sesta, Rendiconti, Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali*, 21:773 – 779, 1935.
- [33] T. Motzkin. Sur quelques propriétés caractéristiques des ensembles convexes. *Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei, Serie sesta, Rendiconti, Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali*, 21:562 – 567, 1935.
- [34] F. P. Preparata. The medial axis of a simple polygon. In J. Gruska, editor, *Mathematical Foundations of Computer Science*, pages 443 – 450, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1977.

- [35] F. P. Preparata and M. I. Shamos. *Computational Geometry. An Introduction*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1985.
- [36] Friedrich Riesz and Béla Sz.-Nagy. *Vorlesungen über Funktionalanalysis. Hochschulbücher für Mathematik, Band 27*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956.
- [37] Gabriella Sanniti di Baja. $O(n)$ computation of projections and moments from the labeled skeleton. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 49:369 – 378, 1990.
- [38] J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, Inc., London, Orlando, San Diego, New York, Austin, Boston, Sydney, Tokyo, Toronto, 1982.
- [39] H. Sherman. A quasi-topological method for the recognition of line patterns. In *Information Processing. Proc. UNESCO Conf.*, pages 232 – 238, London: Butterworths, 1959.
- [40] J. Stoer and C. Witzgall. *Convexity and Optimization in Finite Dimensions I. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 163*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1970.
- [41] W. R. S. Sutherland. The offsets of a convex polygon. In R. Rieder, P. Gessner, A. Peyerimhoff, and F. J. Radermacher, editors, *XIV. Symposium on Operations Research. Organized by Gesellschaft für Mathematik, Ökonomie und Operations Research e.V., University of Ulm, September 6-8, 1989. Proceedings. Methods of Operations Research 62*, pages 33 – 41, Meisenheim: Verlag Anton Hain, 1990.
- [42] P. L. Tchebycheff. Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions (1859). In *Œuvres, Vol. I.*, pages 273 – 378, St. Petersburg, 1899.
- [43] P. L. Tchebycheff. Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions (1859) (Russian). In *Izbrannye Trudy*, pages 462 – 578, Moskva: Izd. Akad. Nauk SSSR, 1955.
- [44] Wayne Tiller and Eric G. Hanson. Offsets of two-dimensional profiles. *IEEE Computer Graphics & Applications*, 4(9):36 – 46, 1984.

- [45] T. W. Ting. The ridge of a Jordan domain and completely plastic torsion. *J. Math. and Mech.*, 15:15 – 47, 1966.
- [46] Frederick A. Valentine. *Convex Sets*. McGraw-Hill Inc., New York, 1964.
- [47] L. P. Vlasov. Approximative properties of sets in normed linear spaces. *Russian Mathematical Surveys*, XXVIII(6):1 – 66, 1973.
- [48] L. P. Vlasov. Čebyšev sets in Banach spaces. *Soviet Mathematics*, 2:1373 – 1374, 1961.
- [49] G. Wolberg. Skeleton-based image warping. *The Visual Computer*, 5:95 – 108, 1989.
- [50] Angela Y. Wu, S. K. Bhaskar, and Azriel Rosenfeld. Parallel computation of geometric properties from the medial axis transform. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 41:323 – 332, 1988.
- [51] Yosef Yomdin. On the local structure of a generic central set. *Compositio Mathematica*, 43:225 – 238, 1981.
- [52] Zhangzheng Yu. *Stabile Analyse von Binärbildern*. PhD thesis, Universität Hamburg, Institut für Angewandte Mathematik, 1989.