

Können Maschinen die Welt erkennen?

Ulrich Eckhardt

Inhaltsverzeichnis

1	Anwendung von Formmerkmalen	2
2	Skelettierung	5
3	Diskrete Kurvenevolution	12
	Literatur	20

Abbildungsverzeichnis

1	Formbasierte Beschreibung eines Werkstücks	2
2	Codierung eines CCIR 601 TV-Signals nach MPEG 2	3
3	Prinzip der MPEG4-Codierung.	4
4	Die 4-, 8-, 6- und Springer-Topologie der digitalen Ebene.	6
5	Zwei gerasterte Buchstaben (oben) und ihre Skelette (unten)	9
6	Gegenbeispiel zur Skelettierung.	10
7	Arcelli-Mengen A_3 und A_4	12
8	Originalobjekt (links) und Skelett (rechts)	13
9	„Zusammenhangsparadoxa“ der digitalen Ebene.	14
10	Vier verschiedene kontinuierliche Evolutionsstufen eines Objekts	16
11	Reduktion eines Bildes auf „wesentliche“ Merkmale	17
12	Vier verschiedene Evolutionsstufen eines Objekts	19

Vortrag, gehalten am 21. April 2001 auf dem Halbjahres-Meeting der innovas GmbH, „Maritim Golf- & Sport-hotel“ Timmendorfer Strand.

Tabellenverzeichnis

1	Topologische Klassifikation von Buchstaben und Ziffern	5
---	--	---

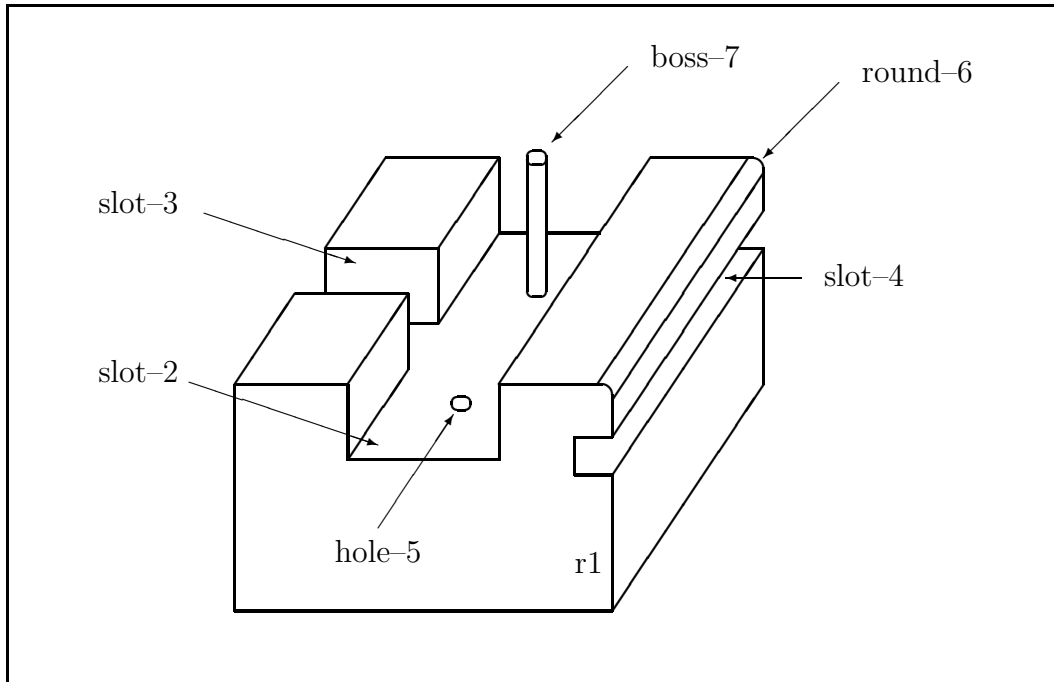


Abbildung 1: Formbasierte Beschreibung eines Werkstücks

1 Anwendung von Formmerkmalen

Die Mathematiker sind eine Art Franzosen: redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsobald ganz etwas anderes. *Goethe*

Alles Menschenwerk ist nach dem Bilde der Mathematik konzipiert, es herrschen gerade Linien, Kreisbögen, kurz, einfache geometrische Gebilde vor. Dies nicht aus ästhetischen Gründen, sondern weil man einfache Formen leichter berechnen kann. Dies gilt insbesondere für die Technik. Im „Computer-Aided Design“ (CAD) gibt man etwa einer metallbearbeitenden Maschine das herzustellende Objekt in „mathematischer“ Sprache vor, das heißt, vermittelt von Punkten und Relationen zwischen Punkten, die Strecken, ebene Flächen, Kreise, Bezier-Kurven oder ähnliche Konstrukte repräsentieren. Diese Art der Beschreibung ist unhandlich, einem menschlichen Fräser genügt es, wenn man sagt: Fräse eine Nut einer bestimmten Abmessung in die Mitte des gegebenen Werkstückes. Eine solche verbale Beschreibung ist einfacher und verständlicher als die abstrakte Datenstruktur. Sie hat zudem den Vorteil, daß sie sehr leicht modifizierbar ist. Wenn man etwa die Breite des Teils verdoppeln möchte, dann ist aus der verbalen Beschreibung unmittelbar klar, wie die anderen Maße geändert werden müssen. Diese Art der formbasierten Beschreibung (‘feature-based approach’) wird neuerdings im CAD untersucht (siehe Abbildung 1)¹. Die meines Wissens erste Konferenz über dieses Gebiet war die *1997 ASME Computers in Engineering Conference*.

¹Jae Yeol Lee and Kwangsoo Kim: A feature-based approach to extracting machining features. *Computer-Aided Design*, 30(13):1019–1035, 1998.

Bitrate	Original	Intraframe-Codierung		Interframe-Codierung	
		DCT und Quanti-sierung	Huffman-Codierung	Zeitliche Prädiktion	Bewegungs-kompensation
Mbit/s	160	50	25	12	6

Abbildung 2: Codierung eines CCIR 601 TV-Signals nach MPEG 2

Vor einigen Jahren waren wir an einem EU-Projekt beteiligt, bei dem es darum ging, einen Roboter zu konstruieren, der unter Wasser semi-autonom navigiert und der in der Lage ist, künstliche Formen zu identifizieren und automatisch anzusteuern. Leider ist dieses Projekt „gestorben“, nachdem einer der potentesten Teilnehmer aus personellen Gründen ausschied. Welche Aufgaben ein „sehender“ und weitgehend autonom agierender Roboter auch haben mag, er sollte auf jeden Fall in der Lage sein, Formen seiner Umwelt zu klassifizieren und zu erkennen.

Eine Anwendung, die mir heute sehr viel näher steht, ist die formbasierte Codierung von Bewegtbildinformation. Wenn man Bilddaten überträgt, dann hat man das gleiche Problem, welches auch das menschliche visuelle System bewältigen muß: Die Informationsmenge, die in einer Bewegtbildszene enthalten ist, ist gewaltig. Andererseits weiß man, daß unser visuelles System nur winzige Bruchteile dieser Menge aufnehmen kann. Die Übertragung von Daten kostet Geld. Was liegt also näher, als sich zu überlegen, ob man diese enorme Datenmenge nicht geeignet reduzieren kann. Tatsächlich gibt es eine große Anzahl von intelligenten Verfahren, die dies leisten. Man ist aber dabei an eine Grenze angelangt. Die „klassischen“ Verfahren sind Transformationsverfahren, daß heißt, die zu komprimierenden Daten werden transformiert, etwa durch Anwendung der Fourier-Transformation. Dann läßt man von den transformierten Daten „irrelevante“ Bestandteile weg, etwa die hohen Frequenzen. Auf diese Weise wird Übertragungskapazität gespart. In den letzten Jahren wurden zahlreiche solche Transformationsverfahren vorgeschlagen, teilweise mathematisch sehr „schöne“ Methoden, wie etwa die Wavelet-Transformation. Trotzdem ist der Effekt eher bescheiden, wie in Abbildung 2 gezeigt wird: Man reduziert die anfallenden TV-Daten unter Ausnutzung aller modernen technischen Hilfsmittel zur Übertragung etwa auf 3.75 % ihres ursprünglichen Datenvolumens. Da Übertragungsbandbreite ein wichtiger Kostenfaktor ist, ist man für zahlreiche Anwendungen (Video on Demand, Bildtelephonie, Video im Internet ...) an weiterer Kompression interessiert. Wie wir gesehen haben, leistet bereits die Retina unseres Auges eine Datenreduktion auf etwa 1 %, ganz zu schweigen von den Kompressionsleistungen unseres Wahrnehmungssystems! Man benötigt also eine grundsätzlich neue Idee. Wir hatten beim visuellen System gesehen, daß dieses offenbar „semantisch“ codiert, das heißt, die verwendeten Codierv Verfahren sind abhängig vom „Inhalt“ beziehungsweise der „Bedeutung“ der zu codierenden „Objekte“.

Für einen solchen Ansatz stellt der Normungsvorschlag MPEG-4 eine Umgebung zur Verfügung. Die Information wird nicht, wie bei den klassischen Codierv Verfahren, zeilenweise ohne Rücksicht auf Inhalt übertragen, sondern der zu übertragende Datenstrom wird in „Objekte“ zerlegt, die logisch voneinander getrennt in „Video Object Planes“ übertragen werden (Abbildung 3). Damit wird es beispielsweise ermöglicht, den Sprecher einer Nachrichtensendung und den Hintergrund

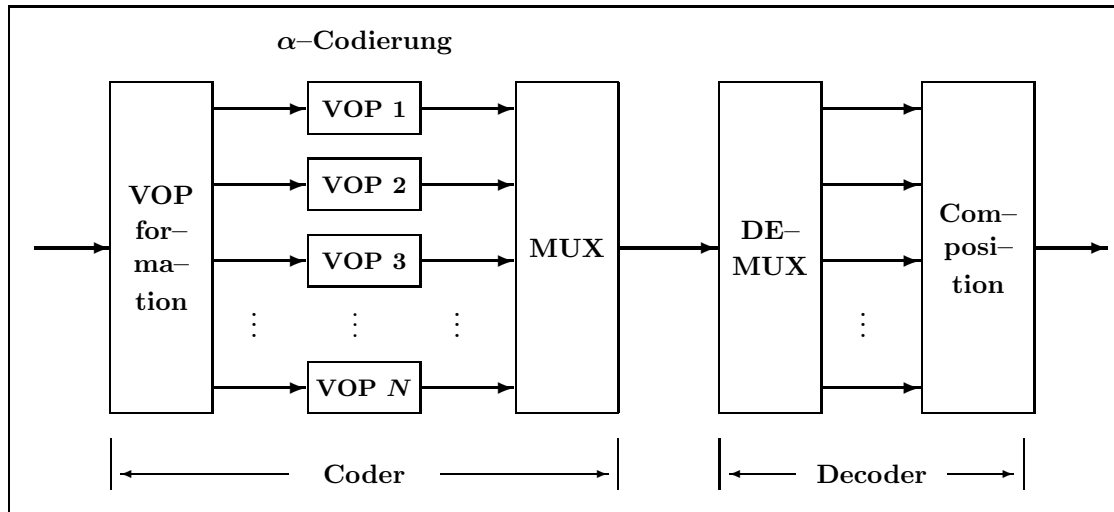


Abbildung 3: Prinzip der MPEG4-Codierung.

des Studios sowie gegebenenfalls eingeblendete Nachrichtenszenen oder Texte getrennt mit verschiedenen Datenraten zur Übertragung. Da sich der Hintergrund kaum ändert, könnte er dann mit einer sehr viel geringeren Datenrate, beziehungsweise nur ein einziges Mal, übertragen werden, wohingegen das Bild des Sprechers mit hoher Qualität codiert werden sollte. Voraussetzung hierfür ist aber die Zerlegung des Bildes in „Objekte“.

Hat man dies aber einmal geleistet, dann könnte man diese Objekte nutzen, etwa zur Editierung von Datenströmen oder aber zur gezielten Suche. Das heißt, die beiden Probleme der Codierung und der Nutzung von Objekten zur Datenbankabfrage wären damit mit den gleichen Verfahren behandelbar.

Über Datennetze werden Unmengen an Bildinformationen angeboten, und die Tendenz ist (exponentiell) steigend. Für Informationen in Textform bieten die internationalen Datennetze leistungsfähige Suchmaschinen an. Fragen der Form etwa: „Wann berührt in der Videosequenz über das Fußballspiel xxx der Fuß des Spielers NN den Ball?“ lassen sich zur Zeit noch nicht über diese Suchmaschinen formulieren. Ähnlich könnte man eine grobe Faustskizze eines Tieres oder eines Pflanzenblattes eingeben und fragen, ob irgendwo ein Objekt dieser Form zu finden ist².

Dieses Thema hat gerade jetzt besondere Aktualität, im Rahmen der Normungsbestrebungen für Video- und Multimediaübertragung unter MPEG-7 versucht man in diesen Tagen, Verfahren zu finden, die eine Beschreibung von Form mit Anwendung etwa auf Datenbanksuche ermöglichen. Diese Aktivitäten stehen naturgemäß im Zusammenhang mit dem erwähnten Normvorschlag MPEG-4 zur Codierung von Bildinformation.

²Eine schöne Darstellung der mit dieser Aufgabenstellung verbundenen Probleme findet man in dem Artikel von David Forsyth, Jitendra Malik and Robert Wilensky: Searching for digital pictures. *Scientific American*, 276(6):88–93, June 1997.

Zwei Löcher B; g; 8.

Ein Loch A, D, O, P, Q, R; a, b, d, e, ℓ , o, p, q; 0, 4, 6, 9.

Einfach zusammenhängend C, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, S, T, U, V, W, X, Y,
Z; c, f, h, k, l, m, n, r, s, t, u, v, w, x, y, z; ß; 1, 2, 3, 4, 5, 7.

Mehrfach zusammenhängend i, j; Ä, Ö, Ü; ä, ö, ü.

Tabelle 1: Topologische Klassifikation von Buchstaben und Ziffern

2 Skelettierung

Everything should be made as simple as possible — but not simpler
A. Einstein

Wir wollen noch einen Schritt zurückgehen und zunächst einmal eine sehr einfache „Welt“ untersuchen, damit die zu erwartenden Probleme noch im Rahmen dessen bleiben, was man überblicken kann. Für unser Thema bietet sich die automatische Analyse von gedruckten Dokumenten an. Dies Gebiet ist sicher sehr wichtig und die Objekte, mit denen wir es dabei zu tun haben — im wesentlichen die Buchstaben — sind relativ einfach zu beschreiben. Trotzdem wird auf diesem Gebiet schon seit reichlich vierzig Jahren mit hoher Intensität geforscht³.

Bei der automatischen Analyse von Buchstaben hat man ein sehr schwieriges Problem zu lösen. Der Computer kann nur einen ganz kleinen Teil eines Dokuments auf einmal wahrnehmen. Wie es Gerd Maderlechner von der Firma Siemens sehr anschaulich formulierte, ist die automatische Textanalyse vergleichbar mit der Aufgabe, mit einem Mikroskop die Zeitung zu lesen. Das Problem ist typisch für alle Arten von Bildverarbeitung: Aus lokaler Information möchte man durch geschickte Akkumulation globale Eigenschaften des Bildinhalts gewinnen.

Man kann das Problem der Buchstabenerkennung auf verschiedene Weise angehen. Zunächst einmal erscheint es — zumindest einem Mathematiker — naheliegend, die Buchstaben und Ziffern „topologisch“ vorzusortieren. Die meisten Buchstaben und Ziffern sind „einfach zusammenhängend“, einige haben Löcher, und einige Buchstaben, nämlich „i“ und „j“ und die Umlaute bestehen aus zwei oder drei „Zusammenhangskomponenten“ (siehe Tabelle 1).

Eine topologische Vorklassifikation von Buchstaben und Ziffern hätte den wichtigen Vorteil, daß topologische Prädikate gegen „fast alle“ denkbaren Transformationen invariant bleiben. Dies ist beispielsweise wichtig, wenn man Beschriftungen aus Landkarten, die in unterschiedlichen Größen, Schriftarten und Orientierungen auftreten können, identifizieren möchte.

Eine weitere — außerordentlich naheliegende — Vorgehensweise wäre es, die Buchstaben zu „verdünnen“, das heißt, auf „linienartige“ Objekte zu reduzieren. Dabei sollen „topologische“ Eigenschaften der Objekte erhalten bleiben, etwa die Anzahl der Zusammenhangskomponenten,

³Siehe atwa den Artikel von Richard G. Casey and George Nagy: Advances in pattern recognition. *Scientific American*, 224(4):56–71, 1971.

die Anzahl der „Löcher“, „Inseln“ etc. sowie deren gegenseitige Lage. In der Tat wurde diese Methode schon sehr früh, im Jahre 1959, von H. Sherman vorgeschlagen⁴. Die Methode, auf die Blum in seiner eingangs zitierten Arbeit dann kommt, ist mit dieser Reduktionsmethode sehr eng verwandt und es gibt zu dem Ansatz selbstredend in den Archiven der Mathematik zahlreiche Schätze, die Blum nur deshalb nicht heben konnte, weil sie für ihn „eine Art Französisch“ waren.

Für einen Mathematiker ist eine solche Vorgehensweise sehr attraktiv: Man denkt an Konstruktionen aus der Topologie, man assoziiert den Begriff des „Deformationsretrakts“. Es stellen sich dabei jedoch sofort zwei gravierende Probleme ein:

Problem 1 Die zugrundeliegende Struktur, das digitalisierte Bild, ist eine „diskrete“ (sogar endliche) Menge von Punkten. Eine solche Menge ist nur auf eine sehr triviale — praktisch uninteressante — Weise topologisierbar. Eine erste Abhilfe ist, daß man die digitale Ebene, das heißt die Menge aller Punkte der euklidischen Ebene, die ganzzahlige Koordinaten haben, mit einer Graphenstruktur versieht, die eine Topologie modelliert. Dazu definiert man für jeden Punkt der Ebene eine Nachbarschaftsrelation. Eine Menge heißt dann zusammenhängend, wenn man je zwei ihrer Punkte durch einen Weg miteinander verbinden kann, auf dem je zwei aufeinanderfolgende Punkte Nachbarn sind. Gebräuchlich sind insbesondere die 4– (Turm–) und die 8– (Königs–) Topologie (Abbildung 4). Erst in neuerer Zeit beginnt man, die äußerst komplizierten Verhältnisse bei der Topologisierung diskreter Strukturen zu verstehen [3].

Problem 2 Im Jahre 1969 hatten Marvin Minsky und Seymour Papert gezeigt, daß ein gewisser Typ paralleler Rechner, ein sogenanntes Perzeptron, allenfalls „triviale“ topologische Strukturen erkennen kann⁵. Da der Datenumfang in der Bildverarbeitung gewaltig ist, möchte man von Parallelität Gebrauch machen, um auf vernünftige Rechenzeiten zu kommen. Man hat hier ein Dilemma, mit dem auch unser visuelles System seine Probleme hat.

Die Lage scheint sowohl theoretisch als auch praktisch hoffnungslos! Einen Ausweg aus der „Topologiefalle“ bietet eben die von Sherman pragmatisch vorgeschlagene Methode, zu deren theoretischen Verständnis man erst in neuester Zeit gelangt ist. Der Weg, den die Forschung von 1959 bis heute eingeschlagen hat, ist dornenreich und voller Umwege und Einbahnstraßen. Auch

⁴H. Sherman: A quasi-topological method for the recognition of line patterns. *Information Processing. Proc. UNESCO Conf.*, pages 232–238. London: Butterworths 1959.

⁵Marvin Minsky and Seymour Papert: *Perceptrons. An Introduction to Computational Geometry*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England, 1969.

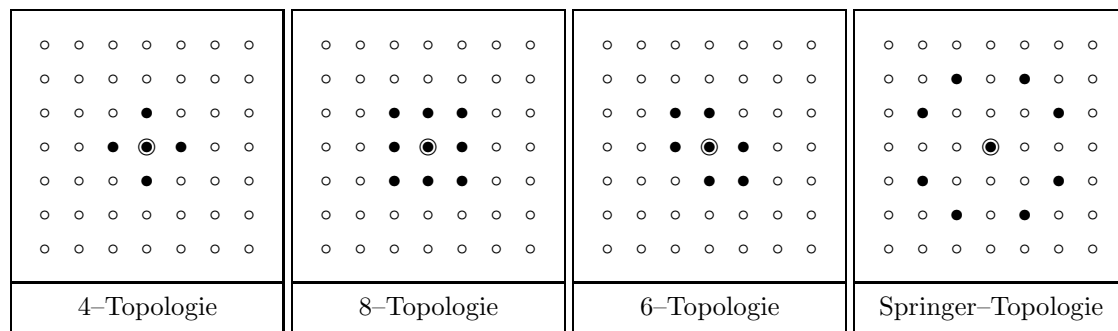


Abbildung 4: Die 4–, 8–, 6– und Springer-Topologie der digitalen Ebene.

heute noch erhalte ich einige Male im Jahr eine Arbeit zur Begutachtung, in der ein „neuer“ Vorschlag zur Skelettierung gemacht wird, und in aller Regel stellt man sehr schnell fest, daß wieder einmal ein Rad erfunden wurde oder aber daß die vorgeschlagene Methode einfach nicht funktioniert!

Sehen wir uns einmal einen konkreten Fall an: Die beiden in Abbildung 5 oben dargestellten Buchstaben stellen zwei Zusammenhangskomponenten (dieser Begriff wird hier intuitiv gebraucht) dar, von denen die eine ein „Loch“ hat. Wenn man einen Punkt am Rand (auch dieser Begriff ist intuitiv zu verstehen) eines der beiden Buchstaben herausnimmt, dann kann sich offenbar weder der Zusammenhangstyp der (schwarzen) Objekte noch der des (weißen) Komplements verändern. Es ist leicht zu sehen, daß man — mit ein wenig Vorsicht — sogar parallel Randpunkte entfernen kann, ohne die „Topologie“ der Situation zu stören. Wenn man so lange immer wieder topologisch belanglose Randpunkte entfernt, bis keine mehr zu finden sind, dann gelangt man zu einem reduzierten Bild, wie in Abbildung 8, unteres Teilbild. Dies scheint der Aussage von Minsky und Papert zu widersprechen. Tatsächlich aber kann man zeigen, daß die Entscheidung, ob ein einzelner Punkt für den Zusammenhang des Objekts und seines Komplements entbehrlich ist oder nicht, eine Funktion der Eulerschen Zahl des Objekts ist, und genau diese Funktionen sind gerade die „trivialen“ Ausnahmen, die der Satz von Minsky und Papert zuläßt. Dies konnte im Jahre 1979 Azriel Rosenfeld⁶ zeigen. Es ergibt sich also die folgende Strategie, das Verdikt von Minsky und Papert zu unterlaufen: Man entfernt vermittels eines parallelen Verfahrens so lange Randpunkte, bis das Objekt so „dünn“ geworden ist, daß es vermittels eines sequentiellen Verfahrens „effizient“ analysierbar wird. In der Informatik hat man sehr mächtige Datenstrukturen zur Bearbeitung von Graphen geschaffen. Man kann sich ein verdünntes Objekt als Graphen vorstellen.

Wir haben also — etwas plakativ formuliert — die folgende Situation:

- Im Jahre 1959 schlägt Sherman eine Methode vor, die in der Folgezeit rasche Verbreitung findet.
- Im Jahre 1969 zeigen Minsky und Papert, daß diese Methode eigentlich nicht funktionieren kann.
- Im Jahre 1979 zeigt Azriel Rosenfeld, daß die Methode doch funktioniert.

Bemerkenswert ist hier nicht das Wechselspiel von positiven und negativen Aussagen, derlei ist nicht selten in der Geschichte der angewandten Mathematik. Dieser kleine Ausschnitt aus der Geschichte der Mathematik ist deshalb besonders lehrreich, weil er die folgenden Aspekte angewandter Mathematik illustriert:

- Der Computer spielt in dieser kleinen Geschichte die Hauptrolle. Ohne ihn hätte man die ganzen Probleme nicht gehabt.
- Der Anwender konnte ein Problem rein intuitiv und pragmatisch lösen, ohne dabei die mathematischen Schwierigkeiten auch nur zu ahnen.
- Das mathematische Modell, hier die allgemeine Topologie, ist für das Verständnis der „natürlichen“ Phänomene unerläßlich. Andererseits darf es nicht überstrapaziert werden, es ist eben nicht „das wahre Ding“.

⁶Azriel Rosenfeld: Digital topology. *American Mathematical Monthly*, 86:621–630, 1979.

- Besonders beeindruckend sind die enorm langen Zehnjahresintervalle, die zwischen den einzelnen Erkenntnissen liegen (man könnte die Reihe fortsetzen). Die scheinbar sehr einfache Situation „hat es eben in sich!“

Wir wollen das Wechselspiel von Aufgabenstellung, Anwender, Mathematiker und Computer noch ein wenig am vorliegenden Beispiel ausleuchten.

Die Umwelt Konkret haben wir in einer umfangreichen Studie Skelettierungsverfahren untersucht mit dem Ziel der Anwendung in der Dokumentanalyse. Dabei dachten wir vorwiegend an Textdokumente aus einer Büroumgebung und an technische Zeichnungen.

Der Computer Angesichts des riesigen Datenumfangs (bei einer technischen Zeichnung vom Format DIN A0 sind Größenordnungen von $(10^4)^2$ Bildpunkten keine Seltenheit) ist spezielle und insbesondere parallele Hardware unerlässlich. Die zu untersuchenden Verfahren müssen also parallel implementierbar sein. Weiterhin stellen Hardwarelösungen in der Regel ganz besondere Anforderungen. Bei den in der Signalverarbeitung und der Bildverarbeitung verwendeten Prozessoren möchte man vorwiegend **INTEGER**-Arithmetik verwenden, unter Umständen sind Multiplikationen zu vermeiden etc.

Der Anwender Wir haben uns in sehr ausführlichen Diskussionen und nach Sichtung der umfangreichen Literatur (unsere Literatursammlung über Skelettierungsverfahren umfaßt etwa 500 Titel) auf ein „Pflichtenheft“ geeinigt. Dieses sieht etwa so aus:

- Gesucht wird ein „effizientes“ Verfahren. Diese Forderung gehört in die Rubrik „Waschmittelwerbung“. Fast schon jeder zweite Artikel in den einschlägigen Fachzeitschriften ist deklariert als „A new efficient method for . . .“. Diesen Aspekt haben wir bei unseren Überlegungen hintangestellt.
- Das Verfahren sollte „korrekt“ sein. Dies kann man so interpretieren, daß das Verfahren den „topologischen Typ“ eines Objekts nicht zerstören darf.
- Das Resultat eines Skelettierungsverfahrens sollte eine „dünne“ Menge sein. Durch die Literatur geistert der Begriff „one pixel thick“, der nicht präzisierbar ist.
- Das Verfahren sollte „die Form eines Objekts beibehalten“. Diese Forderung erwies sich als sehr schwierig, da der Anwender den Begriff der „Form“ nicht präzisieren kann. Er kann in der Regel von einem gegebenen Verfahren sehr klar sagen, daß es *nicht* formtreu ist. Beispielsweise würde die Anwendung eines naiven sequentiellen Verfahrens auf das Objekt in Abbildung 6 die „längliche Form“ des Objekts zerstören.

Der Mathematiker Als Mathematiker ohne „Weltwissen“ möchte man zunächst einmal alles dies verstehen. Man läßt sich dabei von etwas anderen Ordnungsprinzipien leiten, als der Anwender oder der Hardwarespezialist. Diese Prinzipien könnten etwa so aussehen:

- Ein Konzept, welches man nicht präzise formulieren kann (etwa den Begriff „formtreu“), kann man auch nicht algorithmisch implementieren.
- Ein Verfahren der hier betrachteten Klasse sollte einige mathematische Eigenschaften haben, die recht vernünftig klingen, die aber zahlreiche der praktisch verwendeten Verfahren nicht besitzen. Die Verfahren sollten natürlich korrekt sein, aber darüber hinaus invariant gegen gewisse Transformationen (Translationen, Rotationen, allerdings bei diskretisierten Vorlagen nur Rotationen um Vielfache von 90° , Spiegelungen, . . .). Sie sollten auch nicht davon abhängen, in welcher Reihenfolge man die Bildpunkte abarbeitet.

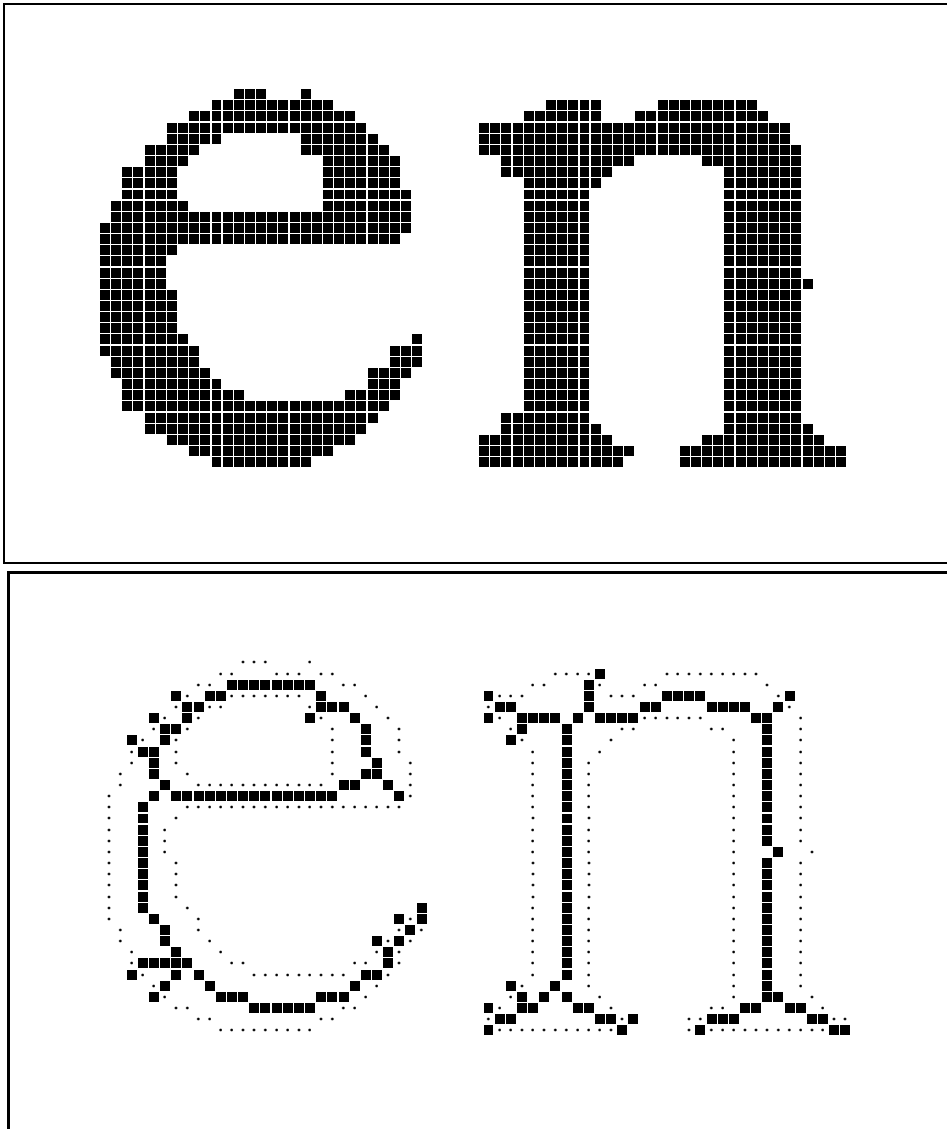


Abbildung 5: Zwei gerasterte Buchstaben (oben) und ihre Skelette (unten)

Im unteren Bild sind die Ränder der Buchstaben durch „.“ markiert.
(Bildvorlage aus Theodosios Pavlidis. *Algorithms for Graphics and Image Processing*, Springer-Verlag (Computer Science Press), Berlin, Heidelberg, 1982.)

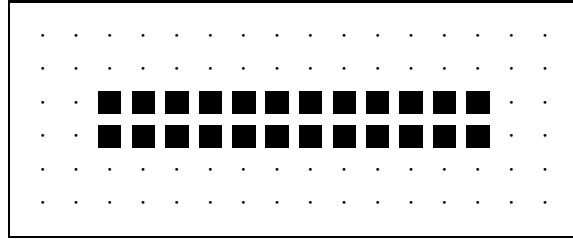


Abbildung 6: Gegenbeispiel zur Skelettierung.

Jeder Punkt des hier dargestellten Objekts ist — isoliert betrachtet — belanglos für die Topologie. Trotzdem kann man nicht alle Punkte entfernen, man kann noch nicht einmal parallel zwei Punkte entfernen, die vertikal übereinander stehen.

Bei sequentieller Skelettierung kann man ohne Zweifel den linken oberen Punkt entfernen. Danach erweist sich der linke untere Punkt ebenfalls als entbehrlich. Setzt man diese Vorgehensweise fort, dann erhält man zum Schluß ein Gebilde aus einem bis vier Bildpunkten (je nach Methode), das langgestreckte Objekt hat seine „Form“ verloren.

Ein Zugang zur Lösung unseres Problems wäre der heute von zahlreichen Autoren und inzwischen ganzen Arbeitsgruppen favorisierte „ingenieurmäßige“ Ansatz. Hierbei beschafft man sich „typische“ Vorlagen und läßt alle zu testenden Verfahren „um die Wette laufen“. Tatsächlich werden beispielsweise Normungsvorschläge auf diese Weise gewonnen. Das Problem ist, daß gerade bei Normungsvorschlägen handfeste materielle Interessen von Firmen eine sehr wichtige Rolle spielen. Es ist dann das erklärte Ziel aller am Vorschlag beteiligten Firmen, diejenigen „typischen“ Vorlagen in das „Core-Experiment“ einzubringen, die für den eigenen Vorschlag am besten geeignet sind. Böse Zungen behaupten, daß jede Firma genau die Vorlagen in das „Testbed“ einbringt, die das Verfahren der Firma fehlerfrei auswerten kann!

Das Insistieren auf mathematisch exakten Definitionen für letztlich nicht bis zum Letzten präzisierbare Begriffe des täglichen Lebens mag pedantisch erscheinen. Jedoch ist eine solche „preußische“ Auffassung in gewissen Anwendungen von entscheidender Bedeutung. Nehmen wir einmal an, wir hätten ein Verdünnungsverfahren, welches nicht korrekt ist. Wir nehmen weiter an, der Fehler des Verfahrens trete „nur“ bei jedem tausendsten Dokument einmal auf. Damit dürfte er bei einem „ingenieurmäßigen“ Test kaum entdeckt werden, denn ein solcher Test würde ja voraussetzen, daß man tausende von bearbeiteten Dokumenten eingehend prüft. Wenn der Fehler nicht immer spektakulär auftritt, dann wird er bei einem Inspektionstest mit hoher Wahrscheinlichkeit nicht gefunden werden. Nehmen wir ferner an, daß in einem von tausend Fällen der Fehler tatsächlich relevante Auswirkungen hat, daß dann etwa ein Zeichen ganz gelöscht wird, dann hätte man bei einer Million Dokumenten jeweils einen „echten“ Fehler. Dies wäre aber beispielsweise bei der automatischen Bearbeitung von Bankschecks völlig unakzeptabel! Es mag zu denken geben, daß ein im Jahre 1966 von Rutovitz⁷ publiziertes paralleles Verfahren, welches sich großer Verbreitung erfreute, erst im Jahre 1986, also nach 20 Jahren anscheinend „unfallfreiem“ Verhalten, von Lü und Wang⁸ anhand eines sehr einfachen Gegenbeispiels als nicht korrekt „entlarvt“ wurde. Nur ein streng mathematischer Korrektheitsbeweis (der zudem richtig ist) kann die

⁷Denis Rutovitz: Pattern recognition. *J. Royal Statist. Soc.*, 129:504–530, 1966.

⁸H. E. Lü and P. S. P. Wang: A comment on “A fast parallel algorithm for thinning digital patterns”. *Communications of the ACM*, 29:239–242, 1986.

Sicherheit geben, daß die jeweilig betrachtete Methode auch langfristig nicht zu Fehlern führt.

Wir haben im Rahmen einer Diplomarbeit einen eigenen Test unternommen⁹. Dazu haben wir die etwa fünfzehn bekanntesten Verfahren nachprogrammiert und sie einem „semantischen“ Vergleich unterzogen. Das Resultat war höchst überraschend:

- Ein (übrigens sehr populäres) Verfahren war nicht korrekt im genannten Sinne.
- Bei zwei oder drei Verfahren (die übrigens von verschiedenen Autoren vergleichend untersucht worden waren) war die publizierte Beschreibung unvollständig und das Verfahren nicht mehr rekonstruierbar.
- Acht Verfahren, die von unterschiedlichen Autoren mit unterschiedlichen Resultaten „ingenieurmäßig“ verglichen worden waren, stellten sich als *identisch* heraus. Das heißt, man hatte nicht unterschiedliche Methoden, sondern unterschiedliche Implementierungen miteinander verglichen.
- Vier weitere Verfahren waren ebenfalls identisch. Der Vorrat von über einem Dutzend wohl-bekannten und vielzitierten Verfahren schrumpfte damit auf zwei Verfahren und einige „Exoten“, die entweder nicht korrekt waren, oder nicht vollständig beschrieben oder sich als leichte (und unwesentliche) Modifikationen der beiden Hauptverfahren erwiesen!

Wir versuchten dann, das erarbeitete „Pflichtenheft“ in Mathematik umzusetzen. Ich nenne nur die wichtigsten Höhepunkte:

- Wir „vergaßen“ zunächst alles, was mit der Implementierung zu tun hat, also insbesondere auch die „Effizienz“ der Verfahren. Stattdessen konzentrierten wir uns auf die naheliegen-den Invarianzen, die man fordern sollte. Unsere Überlegung war dabei, daß man über ein Verfahren, das mathematisch faßbare Eigenschaften hat, auch leicht nützliche und richtige Sätze beweisen kann. Das überraschende Resultat: Das invariante Verfahren zu dem wir auf diese Weise gelangten, erwies sich — nicht ganz überraschend — als ohne weitere Mo-difikationen parallel implementierbar. Es stellte sich zudem heraus, daß es auch „effizient“ war, das heißt, es lief nicht langsamer, als andere Verfahren.
- Es ist nicht ohne weiteres verständlich, was ein „dünnes“ Skelett sein soll. Seit 1981 weiß man¹⁰, daß es Mengen gibt, die nicht weiter reduzierbar sind, aber trotzdem nicht „dünn“ (siehe Abbildung 7).
Es ist ohne weiteres klar, daß man nach diesem Bauplan beliebig große irreduzible Mengen konstruieren kann. Wir konnten die Menge aller dieser „Monster“ charakterisieren und zeigen, daß sie unter einer praktisch brauchbaren Voraussetzung nicht auftreten können.
- Bezüglich des Begriffes der „Formerhaltung“ konnten wir uns auf eine präzise Formulie-rung einigen: Wenn man bei dem Skelettierungsprozeß die verbleibenden Punkte mit einer geeigneten Zusatzinformation versieht, dann kann man bei gewissen Verfahren zeigen, daß der Prozeß invertierbar wird, das heißt, man kann aus dem Skelett und der Zusatzinfor-mation das Original wieder rekonstruieren. Wir konnten uns einigen, daß ein Verfahren als „formtreu“ gelten soll, wenn es die Rekonstruktion der Originalform erlaubt.

⁹Thomas Steinpreis: *Verfahren zur Erkennung von Linienstrukturen in Binärbildern*, Diplomarbeit Universität Hamburg, Institut für Angewandte Mathematik, Dezember 1987.

¹⁰Carlo Arcelli: Pattern thinning by contour tracing. *Computer Graphics and Image Processing*, 17:130–144, 1981.

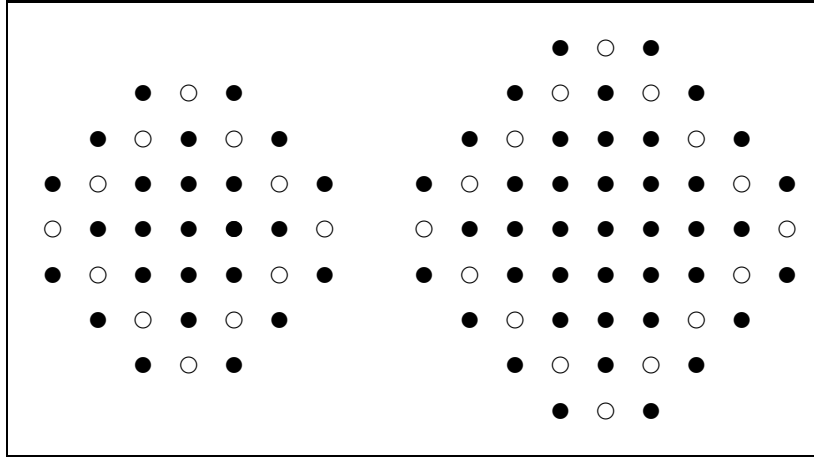


Abbildung 7: Arcelli-Mengen A_3 und A_4 .

- Das Verfahren wurde in eine kommerzielle und verbreitete Hardwareumgebung implementiert¹¹. Für diese Implementierung wurden zahlreiche „ingenieurmäßige“ Tests angestellt. Das Verfahren hat sich dabei gut bewährt.

Das hier skizzierte Verfahren ist in allen Einzelheiten in [1] beschrieben.

3 Diskrete Kurvenevolution

...
Und keine Zeit und keine Macht zerstückt
Geprägte Form, die lebend sich entwickelt.

Goethe

Anhand der Abbildung 8 wird deutlich, daß die Repräsentation der Form eines Objekts durch sein Skelett durchaus auch Nachteile hat. Insbesondere wirken sich kleine Störungen (hier am rechten Blattrand) dramatisch auf die Form des Skeletts aus, die Abbildung einer Menge auf ihr Skelett ist, und dies kann man mathematisch präzisieren, instabil.

Es gibt eine sehr naheliegende Methode, die Form eines Objektes zu beschreiben. Es genügt in vielen Fällen, den Rand (Umriß) des Objektes anzugeben. Hier ergibt sich ein kleines mathematisches Problem: Um das Objekt aus den Randdaten rekonstruieren zu können, muß man wissen, daß der *Jordansche Kurvensatz* gilt. Dieser sagt aus, daß eine einfache (das heißt sich nicht selbst überschneidende oder sich selbst berührende) geschlossene Kurve die Ebene in zwei Teile zerlegt, das Innere und das Äußere. Dieser Satz klingt auch für einen Nichtmathematiker plausibel, bemerkenswert ist, daß er erst im Jahre 1887 von C. Jordan¹² „entdeckt“ wurde. Sein Beweis ist

¹¹W. Langer und W. Eckstein: Konzeption und Realisierung des netzwerkfähigen Bildverarbeitungssystems HORUS. In: R. E. Großkopf, Hrsg. *Mustererkennung 1990. 12. DAGM-Symposium Oberkochen-Aalen, 24.-26. September 1990, Proceedings. Informatik-Fachberichte 254*, pages 444–450. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, Barcelona, 1990.

¹²Camille Marie Ennemond Jordan, 5. 1. 1838 – 21. 1. 1922, der fragliche Satz steht in dem Buch *Cours d'analyse*, Paris 1887.

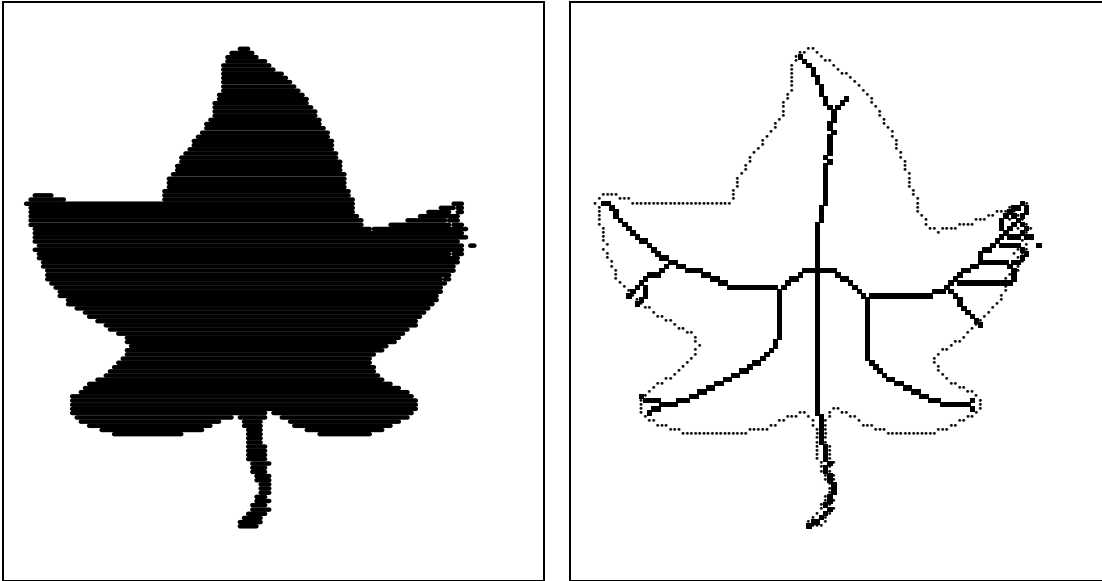


Abbildung 8: Originalobjekt (links) und Skelett (rechts)

Im rechten Bild ist der Rand des Objekts durch Punkte („•“) markiert. Man beachte die Störungen am rechten Blattrand und deren Auswirkungen auf das Skelett.
(Bildvorlage nach Luigi P. Cordella, Michael J. B. Duff and Stefano Levialdi: An analysis of computational cost in image processing: A case study. *IEEE Transactions on Computers*, C-27:904–910, 1978.)

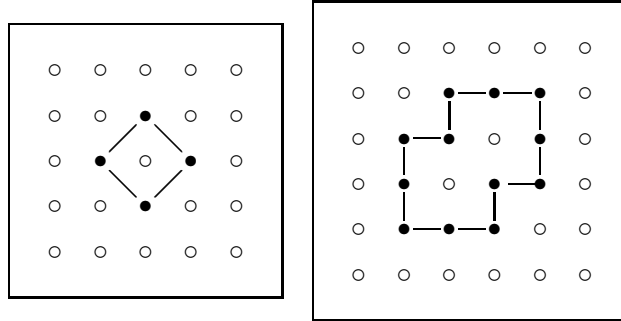


Abbildung 9: „Zusammenhangsparadoxa“ der digitalen Ebene.

nicht einfach, die Verallgemeinerung in höhere Dimensionen sehr schwierig.

Man entdeckte bald, daß es gerade mit der gebräuchlichen 4- beziehungsweise 8-Topologie Schwierigkeiten gibt. In Abbildung 9 ist links eine geschlossene Jordan-Kurve im Sinne der 8-Topologie dargestellt. Diese umschließt einen Punkt, der aber mit den Punkten außerhalb der Kurve durch einen 8-Weg verbindbar ist, welcher keinen Punkt Jordan-Kurve trifft. Im rechten Bild umschließt eine geschlossene 4-Jordan-Kurve zwei Punkte, die mit den Punkten außerhalb der Kurve — aber auch untereinander — nicht durch einen 4-Weg verbindbar sind.

Diese sogenannten „Zusammenhangsparadoxa“ wurden im Jahre 1967 durch Duda, Hart und Munson¹³ „aufgelöst“. Diese Autoren stellten nämlich fest, daß solche Phänomene nicht entstehen können (beziehungsweise, daß die vorgetragenen Gegenbeispiele nicht mehr funktionieren), wenn man die Objekte mit der 8-Topologie, den Hintergrund jedoch mit der 4-Topologie versteht. Es dauerte immerhin bis 1979, als Rosenfeld in der bereits zitierten Arbeit nachwies, daß in der so topologisierten digitalen Ebene in der Tat der Jordansche Kurvensatz gilt! Einzelheiten des sehr mühsamen und langwierigen Weges zu einem Verständnis der digitalen Topologie und neuere Ansätze sind in dem bereits zitierten Buch von Latecki [3] zu finden.

Wir nehmen nun an, wir hätten eine Datenbank, die Bilddaten und Videosequenzen enthalte. Wir nehmen weiter an, daß die Bilder in „Objekte“ zerlegt seien, und daß die Ränder dieser Objekte verfügbar seien. Wir nehmen schließlich an, wir hätten ein Musterobjekt in Randcodierung, und wir wollten wissen, ob in unserer Datenbank ein Objekt ähnlicher Form vorhanden ist. Eine naive Möglichkeit, dies zu testen, wäre ein Vergleich des Randes des Musterobjekts mit allen Rändern in der Datenbank. Dies ist nicht ganz einfach, beispielsweise könnte das gesuchte Objekt ein Fisch sein. Gibt man ein Musterobjekt ein, dann kann es durchaus vorkommen, daß in der Datenbank zwar ein Fisch vorhanden ist, daß aber seine Flossen erheblich größer sind, als die Flossen des Musterobjekts. Was wir eigentlich wünschen ist, daß trotzdem dieser Fisch gefunden wird, gegebenenfalls mit einem Hinweis, daß das gefundene Objekt zwar formähnlich ist, aber eben nicht ganz perfekt gleich. Für diese Aufgabe gibt es bereits Lösungsansätze, nämlich das aus der Sprachverarbeitung bekannte „Warping“, bei dem ein Vergleich zweier Kurvenverläufe mit lokal variablem Maßstab ausgeführt wird. Man kann sich das so vorstellen, daß man die Musterform auf ein durchsichtiges Gummituch zeichnet und dieses lokal — etwa durch eingesteckte Nadeln — so zurechtdehnt, daß die Musterform mit der Vergleichsform übereinstimmt. Die Spannungen, die dabei an den Nadeln auftreten, liefern ein Maß für die Anpassungsarbeit. Es werden dann

¹³R. O. Duda, P. E. Hart and J. H. Munson: *Graphical Data Processing Research Study and Experimental Investigation*, AD650926, March 1967, pages 28–30.

in der Datenbank diejenigen Vergleichsform gesucht, für die die Anpassungsarbeit möglichst gering ist. Die hierbei verwendete mathematische Methode ist die „dynamische Optimierung“, die man algorithmisch recht gut im Griff hat. Bei unserem Beispielszenario allerdings hätte man ein Problem: Die genannte Methode würde sehr viel Zeit damit verbringen, belanglose Details der zu vergleichenden Ränder anzupassen. Dies ist nicht wünschenswert, man ist (zunächst) an den „groben Umrissen“ interessiert. Es wird also erforderlich, die Ränder erst einmal zu vereinfachen.

Nun gehören Verfahren zur Glättung gegebener Daten zum „eisernen Bestand“ der angewandten Mathematik und der Statistik. In den letzten Jahren hat man einen theoretischen Rahmen entwickelt, der das Herz eines jeden Mathematikers höher schlagen läßt. Das Stichwort heißt „Diffusion“. Man stelle sich vor, die zu untersuchende Form bestehe aus einem löslichen Material, etwa Zucker. Bringt man sie in Wasser ein, dann wird der Rand weggelöst. Im Laufe dieses Prozesses wird der Rand gleichzeitig geglättet. Dieser Ansatz hat eine Reihe von Vorteilen

- Die physikalischen Vorgänge bei der Diffusion sind sehr gut bekannt und es gibt sehr gute mathematische Modelle dafür, deren Eigenschaften wohl untersucht sind und gut verstanden werden. Es gibt in der Tat eine sehr tief sinnige Theorie der Diffusionsgleichungen.
- Man hat bei der Diffusion die Zeit als Glättungsparameter. Mit zunehmender Zeit wird das Objekt immer glatter und runder. Betrachtet man es also zu immer späteren Zeitpunkten, dann erhält man eine Folge von immer einfacheren Formen. In der Sprache der Bildverarbeitung nennt man so etwas eine „Auflösungspyramide“. Diese Datenstruktur ist sehr bequem und es gibt gute Algorithmen zur Navigation in solchen Pyramiden. Die Idee dabei ist, daß man zunächst einmal auf einer hohen Ebene, also bei einem sehr stark vereinfachten Zustand des Objekts, mit der Suche beginnt und gegebenenfalls „in der Pyramide heruntersteigt“.

Tatsächlich sind diese Methoden zur „Formevolution“ sehr beliebt und erfreuen sich des Interesses insbesondere der Mathematiker. Unlängst erschien ein Buch über dieses Thema [6], die ersten Konferenzen sind angekündigt, das heißt, dieses Gebiet ist „im Kommen“. In Abbildung 10 ist die kontinuierliche Formevolution an einem Beispiel dargestellt.

Man darf jedoch nicht verschweigen, daß diese Ansätze auch gravierende Nachteile aufweisen:

- Das Ausgangsobjekt ist ein digitales Bild, es „lebt“ also in einem diskreten Raum. Diffusion ist ein typisch kontinuierlicher Prozeß, das heißt, man muß erst einmal das diskrete Bild in einen kontinuierlichen Raum übersetzen. Wenn man evolvierte Objekte auf das Ausgangsobjekt beziehen möchte, dann muß man gegebenenfalls wieder „zurückübersetzen“. Es ist sogar noch schlimmer: Zur numerischen Lösung einer Diffusionsgleichung diskretisiert man diese üblicherweise. Hier wäre also darauf zu achten, daß die ursprüngliche Diskretisierung und die numerische Diskretisierung zueinander kompatibel sind. Für die angestrebte Anwendung ist aus schon genannten Gründen eine Repräsentation in einem diskreten Raum aus „Effizienzgründen“ vorzuziehen.
- Offenbar wird bei einem realen Diffusionsvorgang das lösliche Objekt nicht nur glatter und runder, sondern vor allem auch immer kleiner, bis es schließlich ganz verschwindet. Vergleicht man also ein evolviertes Objekt mit dem Ausgangsobjekt, dann muß man eine Maßstabstransformation vornehmen. Ein schwieriges und ungelöstes Problem dabei ist die punktweise Zuordnung beider Objekte (sogenanntes *Korrespondenzproblem*).

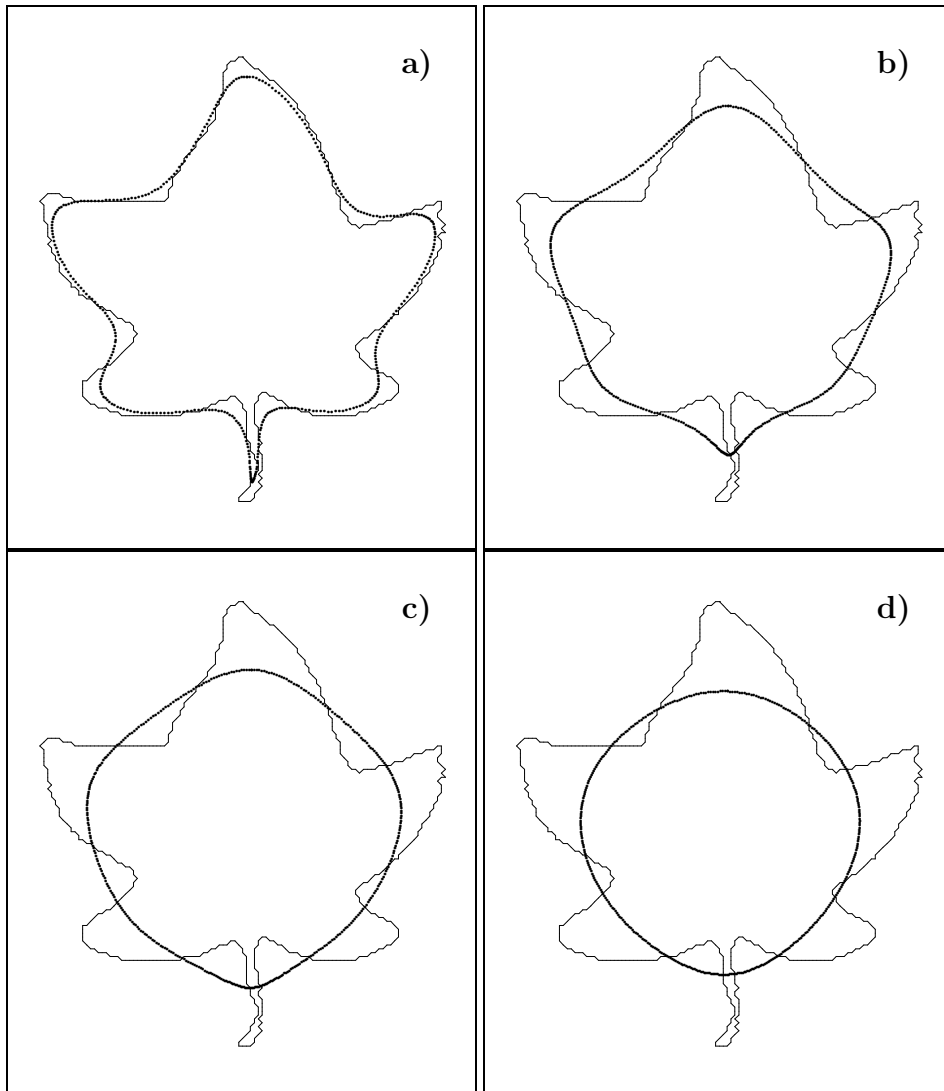


Abbildung 10: Vier verschiedene kontinuierliche Evolutionsstufen eines Objekts

Der Umriß des Ausgangsobjekts ist dünn ausgezogen dargestellt.
Gezeigt sind die Resultate iterierter Glättung mit einer einfachen drei-Punkte-
Glättungsformel.

- a) Nach 100 Iterationen,
- b) Nach 500 Iterationen,
- c) Nach 1000 Iterationen,
- d) Nach 2000 Iterationen.

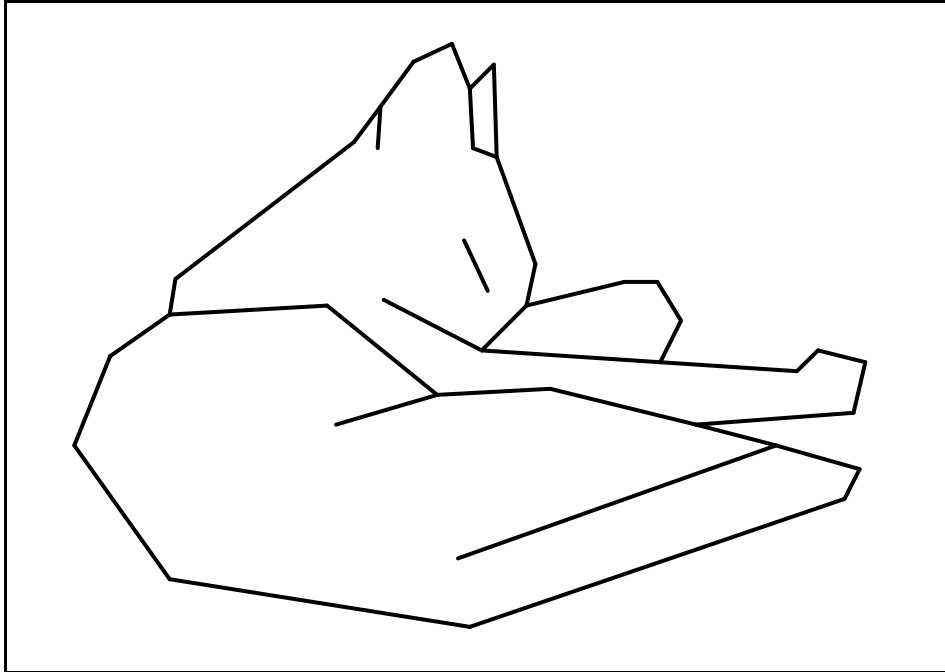


Abbildung 11: Reduktion eines Bildes auf „wesentliche“ Merkmale

Nach Fred Attneave: Informational aspects of visual perception. *Psychological Review*, 61:183–193, 1954. Im Bild wurden 38 markante Punkte ermittelt (Punkte maximaler Krümmung) und diese durch 40 Strecken miteinander verbunden.

- Die Glättung durch Diffusion ist nicht ganz die, welche man eigentlich haben möchte. Hat das Objekt eine deutliche lange Spitze, dann kann diese für unser Formempfinden sehr wesentlich sein, bei der Diffusion wird sie jedoch sehr schnell abgerundet und verschwindet unter Umständen ganz. Beispielsweise würde von einer Maus sehr schnell der Schwanz verschwinden, der Schwanz ist jedoch für die Formerkennung sehr signifikant! Man kann dieses Problem zum Teil beheben, indem man geeignete nichtlineare Terme in die Differentialgleichung einbaut. Wegen der grundsätzlich „lokalen“ Natur von Differentialgleichungen ist diese Abhilfe allerdings von sehr begrenztem Wert.

Erwünscht ist also eine Methode, die insignifikante Störungen beseitigt, die aber signifikante Strukturen unbehelligt läßt. Wir haben eine solche Methode entwickelt, die auf einem ganz anderen Denkansatz beruht. Dabei haben wir uns von dem Beispiel in Abbildung 11 inspirieren lassen. In der Tat wurde das Ausgangsbild ja nicht geglättet, sondern abstrahiert. Ohne auf Einzelheiten einzugehen, sei das Wesen unserer Methode kurz skizziert: Man untersucht jeden Punkt der diskreten Randdarstellung auf seine „Signifikanz“. Wir haben ein Signifikanzmaß gefunden, welches sehr gut mit dem intuitiven Begriff der visuellen Signifikanz übereinstimmt. Diese Aussage ist natürlich keine mathematische Aussage, wir haben sie anhand von Beispielen experimentell gestützt und wir können Argumente der Wahrnehmungsphysiologie und -psychologie, aber auch physikalische Analogiebetrachtungen für unser Signifikanzmaß anführen.

Es wird dann der jeweils am wenigsten signifikante Punkt auf dem Rande identifiziert und entfernt. Dies wird so lange wiederholt, bis das Objekt „hinreichend einfach“ ist. Auch dieser Begriff läßt sich parameterfrei recht gut definieren. Die Vorteile dieser Vorgehensweise sind:

- Die ursprüngliche Datenstruktur, die zu dem Rand des Objekts gehört, ist eine endliche Menge von Rasterpunkten und eine Zuordnungsrelation, die angibt, in welcher Weise die Punkte aufeinanderfolgen. Man verbleibt mit der Methode völlig in der Ausgangsdatenstruktur, Das Löschen eines Randpunktes bedeutet lediglich, daß die Zuordnungsrelation lokal geändert wird.
- Die Methode ist auf naheliegende Weise parallelisierbar.
- Demgemäß ist die vorgeschlagene Methode für die Verarbeitung von Bilddaten sehr geeignet, sie benötigt insbesondere keinerlei aufwendige Arithmetik, es genügt — abgesehen von der Berechnung des Relevanzmaßes — INTEGER-Arithmetik.

Das Resultat der „diskreten Evolution“ ist in Abbildung 12 am Beispiel der schon bei der Skelettierung in Abbildung 8 verwendeten Vorlage illustriert. Zuerst einmal wurde der Rand des Objekts extrahiert, dabei wurden die visuell belanglosen Störungen am rechten Blattrand gleich mit eliminiert. Diese Störungen führten bei der Skelettierung auf Instabilitäten, bei der Randextraktion werden sie — nahezu automatisch — entdeckt und als unwesentlich beseitigt. Es ist bemerkenswert, daß man bei Reduktion der Randinformation auf etwa 15 % „auf den ersten Blick“ kaum einen Unterschied zum Ausgangsbild bemerkt (Teilbild a). Die Punkte des Randes werden durch den Evolutionsprozeß nach ihrer „visuellen Bedeutung“ sortiert. Diejenigen Punkte, die bis zum Schluß verbleiben, sind für den Wahrnehmungsvorgang von besonderer Bedeutung. Wie man aus Teilbild d) erkennt, markieren diese Punkte „signifikante Teile“ des Objekts. Bei diesem letzten Teilbild haben wir eine hochabstrakte Darstellung, in der deutlich das Blatt und der Blattstiel erkennbar sind. Es ist vorstellbar, daß etwa ein Eichenblatt, welches primär eine völlig andere Struktur hat, durch den Evolutionsprozeß auf eine Figur abgebildet wird, die 12.d) sehr ähnlich ist.

Basierend auf der diskreten Evolution wurde ein Verfahren zur Datenbanksuche mit Formmerkmalen entwickelt. Dieses Verfahren beruht darauf, daß die zu vergleichenden Objekte polygonale Mengen sind, für die man sehr handliche und „effiziente“ Datenstrukturen kennt. Eine besondere Rolle spielen bei der Erkennung konvexe und konkave Teile der evolvierten Ränder [2]. Es ist mit Hilfe dieser Datenstruktur sehr leicht möglich, Formen auch in größeren Datenbasen zu finden. Es wurde ein Demonstrator entwickelt, der die Möglichkeiten der Suche in Datenbanken auf der Basis von Formmerkmalen und anderen Merkmalen (invariante Texturmerkmale sowie globale Bewegungsinformationen) illustriert. Das Verfahren wurde Normvorschlag für MPEG-7 eingereicht. Man kann das Verfahren unter der WWW-Adresse

<http://www.math.uni-hamburg.de/home/lakaemper/shape>

aufrufen und testen.

Es sind zahlreiche weitere Anwendungen des vorgeschlagenen Evolutionsprinzips denkbar. Zur Zeit werden einige dieser Anwendungen geprüft. Als Beispiel sei die Abstrahierung von Linien-schemata für öffentliche Verkehrsmittel genannt.

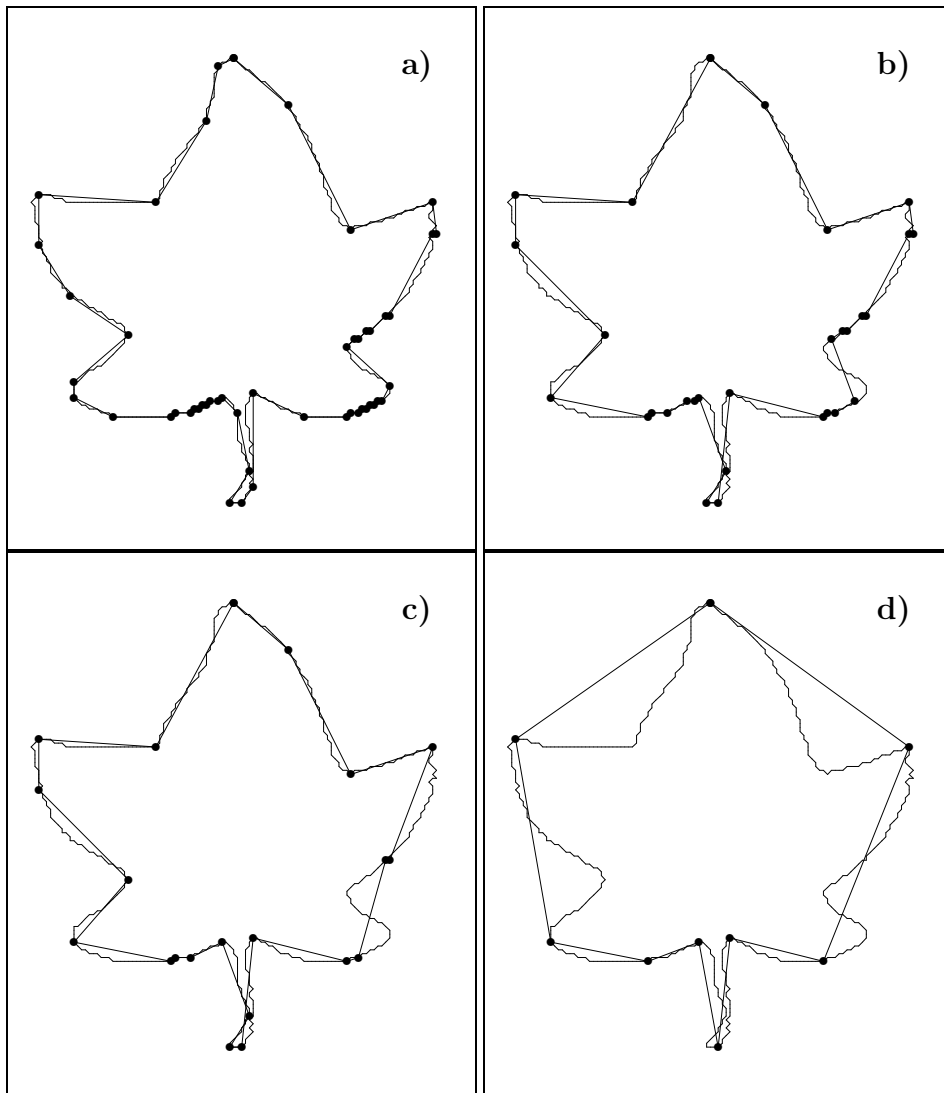


Abbildung 12: Vier verschiedene Evolutionsstufen eines Objekts

Der Umriss des Ausgangsobjekts (387 Punkte) ist dünn ausgezogen dargestellt. Die jeweils verbleibenden Punkte sind durch „•“ markiert.

- a) Nachdem 337 Punkte eliminiert wurden, wird das Objekt durch 50 Punkte beschrieben. Die beiden Bilder unterscheiden sich kaum.
- b) Reduktion auf 30 Punkte. Man beachte die Selbstüberschneidung der Randkurve am Blattstiel.
- c) Reduktion auf 21 Punkte.
- d) Reduktion auf 9 Punkte.

Literatur

- [1] Ulrich Eckhardt and Gerd Maderlechner: Invariant thinning. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, (Special Issue on Techniques for Thinning Digitized Patterns), 7:1115–1144, 1993.
- [2] Longin Jan Latecki and Rolf Lakämper: Convexity rule for shape decomposition based on discrete contour evolution. *Computer Vision and Image Understanding*, 73(3):441–454, March 1999.
- [3] Longin Jan Latecki: *Discrete Representation of Spatial Objects in Computer Vision*, (Computational Imaging and Vision), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht / Boston / London, 1998.
- [4] Jean Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology*, English version rev. by Noel Cressie. Academic Press, Inc. (Harcourt Brace Jovanovich, Publishers), London, Orlando, San Diego, New York, Austin, Boston, Sydney, Tokyo, Toronto, 1982.
- [5] P. T. Saunders, editor: *Collected Works of A. M. Turing. Volume 3: Morphogenesis*, North-Holland, Amsterdam, London, New York, Tokyo, 1992.
- [6] Joachim Weickert: *Anisotropic Diffusion in Image Processing*, (European Consortium for Mathematics in Industry — ECMI), B. G. Teubner, Stuttgart, Leipzig, 1998.