

Wie findet man aus einem Labyrinth?

Annalina Vorbau

Ulrich Eckhardt

Inhaltsverzeichnis

1	Vorbemerkung	1
2	Drei Kinder im Kino	1
3	In einem Irrgarten	3
4	Möbiusband	6
5	Sudoku	7
	Literatur	11

1 Vorbemerkung

Dies ist das Manuskript einer Veranstaltung.

Es handelt sich um ein Gespräch über Mathematik zwischen Annalina Vorbau (im Text mit **A** abgekürzt und blau markiert), die 12 Jahre alt ist und ihrem Großvater (im Text mit **G** abgekürzt), der ein wenig älter ist.

Im Text sind zahlreiche Literaturhinweise gegeben, die sich auf das Literaturverzeichnis auf Seite 11 beziehen. eine Nummer in eckigen Klammern weist auf ein solches Literaturzitat hin. So bedeutet [12] einen Hinweis auf das Buch *Harry Potter und der Stein der Weisen*.

Einige schöne Spiele konnten hier in dem Text nicht abgebildet werden, da sie bereits in Büchern vorkommen. Das Urheberrecht verbietet, Bilder aus Büchern einfach zu übernehmen. Aus diesem Grunde wurden die betreffenden Bücher zitiert und Web-Adressen zu den Themen angegeben, so daß man dann dort nachsehen kann.

2 Drei Kinder im Kino

G: Meine Damen und Herren!

A: Nein, nein, nein, so geht das nicht! Großvater, Du bist hier nicht in Deiner Vorlesung, das sind doch alles Kinder, und Du wolltest doch den Kindern erzählen, wie spannend Mathematik ist!

G: Ach so – ja – Liebe Kinder! Mathematik ist eine sehr wichtige und nützliche Wissenschaft. Ohne Mathematik würde der Airbus A 380 nicht fliegen, der MP3-Player nicht funktionieren und das Handy gäbe es auch nicht ohne Mathematik. Auch für das *Fünfer Olympia Looping* oder die *Wilde Maus* auf dem Hamburger Dom müssen schwierige und komplizierte Berechnungen angestellt werden, um garantieren zu können, daß dieses Gerät auch wirklich sicher und zuverlässig funktioniert. Man kann bei so komplizierten Systemen nicht jedes Detail ausprobieren. Kein Testpilot würde sich in den Airbus setzen wollen, wenn nicht ganz klar ist, daß das Flugzeug auch sicher fliegen wird und kein Kind würde ein Gerät auf dem Dom benutzen wollen, wenn sie den Betreiber sagen hörten: „Wir haben jetzt etwas Neues eingebaut. Ich bin gespannt, ob das Ding jetzt noch funktioniert oder auseinanderfällt.“ Um die beim Betrieb auftretenden statischen und dynamischen Kräfte zu ermitteln, muß man umfangreiche Systeme von Differentialgleichungen ...

A: Aber Großvater, das interessiert hier doch wirklich niemanden! Hebe Dir Deine Differentialgleichungen für eine andere Gelegenheit auf und sage uns lieber, was ihr Mathematiker so den ganzen Tag über macht. Rechnet ihr vielleicht von morgens bis abends nach, ob immer noch $2 \times 2 = 4$ ist?

G: Nein, das wäre doch zu langweilig. Um die Wahrheit zu gestehen, es gibt viele Mathematiker, die gar nicht gut rechnen können. Außerdem haben wir Mathematiker inzwischen auch gelernt, mit Taschenrechnern umzugehen. Viel wichtiger, als richtig zu rechnen ist, die *richtigen Aufgaben* zu rechnen.

A: Was soll denn das heißen?

G: Es gibt eine alte Geschichte, die man in verschiedenen Büchern finden kann (etwa [17, S. 158] oder [8, S. 144, S. 148]):

Drei Kinder treffen sich gelegentlich, um das gleiche Kino zu besuchen. Als sie wieder einmal in das Kino kommen, zahlt jedes Kind für Eintritt, Popcorn und Getränke zehn Euro. Der Betreiber des Kinos, dem die drei Kinder schon aufgefallen sind, sagt zu seinem Angestellten: „Diese drei Kinder scheinen Stammkunden unseres Kinos zu sein. Heute ist mein Geburtstag, und so will ich ihnen einen Rabatt geben. Hier sind fünf Euro, gib sie den drei Kindern zurück“. Der Angestellte überlegt sich: „Fünf Euro für drei Kinder, das läßt sich schlecht machen. Ich behalte also zwei Euro und gebe jedem Kind einen Euro zurück. Dann sind die drei Kinder glücklich über den Rabatt und ich bin glücklich über die zwei Euro, und mein Chef merkt davon ja nichts.“

A: Das ist aber gar nicht schön von dem Angestellten, einfach zwei Euro einzubehalten!

G: Es ist aber auch wirklich schwer, fünf Euro unter drei Kindern gerecht aufzuteilen. Was hättest Du denn getan?

A: Ich hätte einen Euro dazugelegt und jedem Kind zwei Euro gegeben.

G: Es gibt aber nur wenige Menschen, die so etwas tun würden. Du bist eben besonders lieb! Aber zurück zu unserer Geschichte. Jetzt wird gerechnet! Die Kinder haben zusammen $3 \times 9 = 27$ Euro bezahlt, der unehrliche Angestellte hat zwei Euro eingesteckt. Das macht zusammen $27 + 2 = 29$ Euro. Wo ist der verbleibende Euro geblieben?

A: Ja, hier stimmt doch etwas nicht!

G: Richtig, aber was?

Denken wir doch einmal nach. Wir haben zwei Zahlen völlig richtig addiert, aber das Resultat ist offenbar unsinnig. In unserer kleinen Aufgabe tauchten die folgenden Zahlen auf:

30 EUR	von den Kindern ursprünglich bezahlt
25 EUR	bleiben zum Schluß in der Kinokasse
5 EUR	Rabatt des Betreibers
3 EUR	erhalten die Kinder zurück
2 EUR	behält der Angestellte
27 EUR	haben die Kinder schließlich tatsächlich bezahlt.

Von diesen Zahlen – wir Mathematiker sprechen von den *Problemdaten* – hatten wir willkürlich zwei herausgegriffen und addiert, nämlich die 27 Euro, die die Kinder „wirklich“ bezahlt haben und die 2 Euro, die der Angestellte einbehalten hat. Die Summe von 29 Euro ist zwar völlig richtig berechnet, hat aber keine Bedeutung.

A: Man muß also so rechnen: Die Kinder haben letztlich – nachdem sie von dem Angestellten den Rabatt ausgezahlt bekamen – insgesamt 27 Euro bezahlt. Davon hat der Betreiber des Kinos 25 Euro in seiner Kasse behalten und der unehrliche Angestellte hat zwei Euro in seine Tasche gesteckt, und $25 + 2$ ergibt 27. Also stimmt alles.

G: Man kann es auch so sehen: Es gibt in der Geschichte drei „Mitspieler“, die Kinder, den Betreiber und den Angestellten. Am Ende der Geschichte haben diese die folgenden Einnahmen beziehungsweise Ausgaben (ein Minus (–) in der letzten Spalte bedeutet eine Ausgabe):

Mitspieler	Einnahme	Ausgabe	Summe
Betreiber	30	5	25 EUR
Angestellter	5	3	2 EUR
Kinder	3	30	-27 EUR
Summe			0 EUR

Buchhalter nennen eine solche genaue Aufstellung der Einnahmen beziehungsweise Ausgaben aller beteiligten Personen eine *Bilanz*. Du hast es schon sehr richtig gesagt:

- 27 Euro haben die Kinder zum Schluß bezahlt, so viel Geld fehlt also nach dem Kinobesuch in ihren Geldbörsen. Und wo ist dieses Geld geblieben?
- Zwei Euro davon befinden sich in der Hosentasche des Angestellten,
- und 25 Euro verbleiben in der Kasse des Kinos.

Es bleibt also nicht übrig und es fehlt auch nichts!

Es kommt also nicht so sehr darauf an, *irgendwelche* zwei Zahlen korrekt zu addieren, es ist wichtiger, die *richtigen* Zahlen zu addieren.

3 In einem Irrgarten

A: Lassen wir die Rechnerei, ich habe eine Frage: In dem Buch *Harry Potter und der Feuerkelch* nimmt Harry Potter am trimagischen Turnier teil. Als dritte Aufgabe muß er sich in einem Irrgarten zurechtfinden [13, S. 633 ff]. Haben etwa Irrgärten auch etwas mit Mathematik zu tun?

G: Wir Mathematiker – und auch unsere Kollegen, die Informatiker – lieben Irrgärten oder Labyrinth, wie man sie auch nennt, aus verschiedenen Gründen, und ich möchte gern noch einige Worte über Irrgärten sagen.

A: Im letzten Urlaub habe ich Kreta besucht, dort gab es ein ganz berühmtes Labyrinth.

G: Du kennst natürlich die dazu gehörige Geschichte [14, S. 183 f., Theseus bei Minos].

Der König Minos von Kreta ließ von dem berühmten Baumeister Daidalos ein Labyrinth bauen, in welches er ein Ungeheuer, den Minotaurus, einschloß. Die Stadt Athen mußte jedes neunte Jahr sieben Jünglinge und sieben Jungfrauen bringen, die dem Minotauros geopfert wurden. Prinz Theseus verfügte sich freiwillig unter die Geiseln, um den Minotauros zu töten und den schaurigen Opferkult zu beenden. Als er nach seiner Ankunft auf Kreta Minos Tochter Ariadne kennenlernte, verliebten sich beide ineinander. Theseus vertraute ihr seine Absicht an, und sie bot ihm ihre Hilfe an, falls er sie heiraten und nach Athen mitnehmen würde. Als er einwilligte, schenkte sie ihm das magische Wollknäuel des Daidalos, mit dem er aus dem Labyrinth jederzeit wieder herausfand.

A: Theseus hatte also drei Aufgaben zu erledigen. Er mußte im Labyrinth den Minotaurus finden, dann mußte er diesen erschlagen und schließlich mußte er wieder herausfinden. Die erste Aufgabe war nicht sehr schwer zu lösen, denn wenn Theseus den Minotaurus nicht fand, dann fand eben

der Minotaurus Theseus. Die zweite Aufgabe war ebenfalls nicht allzu schwer, denn schließlich war Theseus ein Held, und für einen Helden ist es eine Kleinigkeit, ein Ungeheuer zu erlegen. Für die dritte Aufgabe hatte er das Wollknäuel.

Aber wenn ich mich nun in einem solchen Irrgarten, etwa in einem Maislabyrinth zurechtfinden möchte, ohne daß ich ein Wollknäuel mitnehme, was kann ich da tun?

G: In Abbildung 1 ist ein sehr einfacher Irrgarten dargestellt. Eine einfache Regel, die man oft in Büchern über Irrgärten findet, ist die *linke-Hand-Regel*. Man berührt beim Eingang die linke Wand des Irrgartens mit der linken Hand und geht so durch den Irrgarten, daß man ständig mit der linken Hand in Kontakt mit der Wand bleibt. Bei einer Verzweigung wird man dann unter den gegebenen Möglichkeiten immer den am weitesten links liegenden Gang betreten. Man könnte natürlich auch eine *rechte-Hand-Regel* anwenden. In Abbildung 2 ist die Anwendung der *linke-Hand-Regel* dargestellt. Ihr könnt Euch zu Hause leicht davon überzeugen, daß man wieder auf dem gleichen Weg zurückkommt, wenn man am Ziel wendet und die rechte Hand-Regel benutzt. Ein Wollknäuel wäre also eigentlich gar nicht notwendig. Bei den meisten Irrgärten funktionieren diese einfachen Regeln sehr gut. Man kommt mit ihrer Hilfe zum Zentrum des Irrgartens und auch wieder heraus, allerdings nicht unbedingt, wie das Beispiel zeigt, auf dem kürzesten Wege.

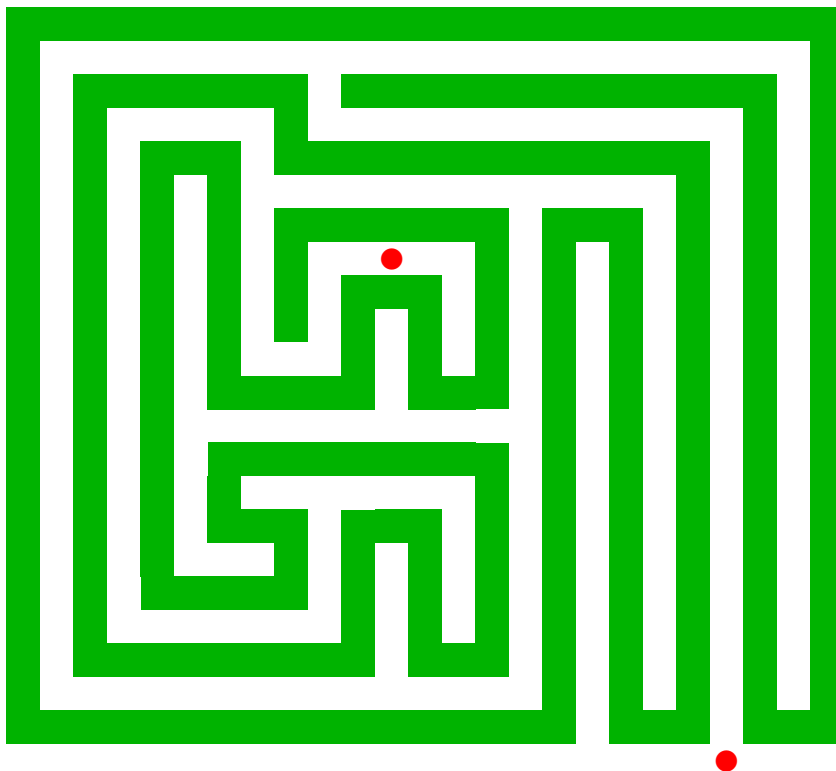


Abbildung 1: Ein einfacher Irrgarten – Start und Ziel sind durch je einen roten Punkt markiert.

A: Funktioniert die Methode „immer links“ denn immer?

G: Es gibt Irrgärten, bei denen man auf diese Weise nicht zum Ziel kommt. Einer dieser Irrgärten

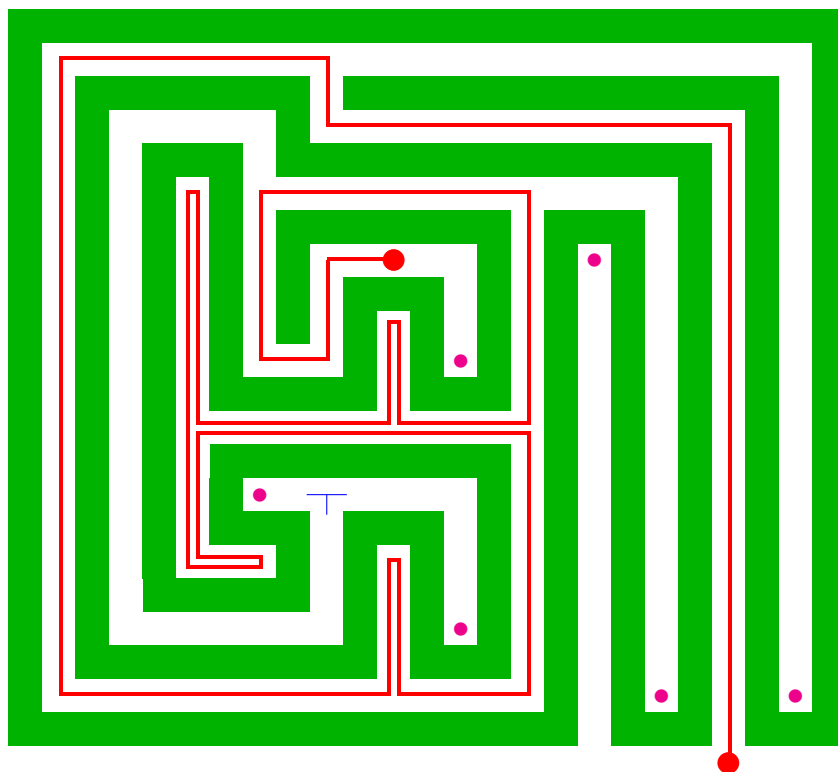


Abbildung 2: Ein einfacher Irrgarten – Anwendung der Regel „immer links“.

ist das sogenannte Heckenlabyrinth von Chevening in der englischen Grafschaft Kent. Es wurde von Charles Stanhope, dem 3. Earl Stanhope (1753 – 1816), der sich intensiv mit Mathematik beschäftigt hatte, entworfen und um 1820 realisiert [16]. In Abbildung 3 ist dieser komplizierte Irrgarten dargestellt.

Wenn wir die *linke-Hand-Regel* anwenden, die uns bei dem einfachen Irrgarten so gut geholfen hat, dann kommen wir immerhin wieder aus dem Labyrinth heraus, ohne allerdings den Zielpunkt gefunden zu haben (Abbildung 4). Ähnlich ergeht es uns, wenn wir die *rechte-Hand-Regel* wählen. Daß es tatsächlich einen Weg vom Start zum Ziel gibt, sieht man in Abbildung 5.

Was macht dieses Heckenlabyrinth so kompliziert? In Abbildung 6 sind die zusammenhängenden Stücke der begrenzenden Hecke farbig unterschieden. Man sieht, daß die Hecke aus sieben Teilen oder „Inseln“ besteht. Wendet man die Strategie „immer links“ oder auch „immer rechts“ an, dann umrundet man den in der Abbildung violett dargestellten Teil und gelangt niemals zu dem schwarz dargestellten Teil der Hecke, in dem ja das Ziel liegt.

Übrigens: Auch für solch komplizierte Irrgärten wie das Heckenlabyrinth von Chevening gibt es Methoden, von Start zum Ziel (und wieder zurück) zu kommen. Solche Methoden sind natürlich etwas komplizierter als die geschilderte einfache Strategie.

4 Möbiusband

A: Kannst Du uns jetzt etwas richtig Mathematisches zeigen?

G: Zunächst einmal: Alles, was ich Euch bis jetzt gezeigt habe, hatte etwas mit Mathematik zu tun.

A: Aber nicht mit der Mathematik, die wir in der Schule gelernt haben.

G: Richtig, ich gehe aber nicht mehr in die Schule und darf mir die Mathematik aussuchen, die mir Spaß macht.

Ein sehr schönes Gebiet der Mathematik ist die *Topologie*.

A: Großvater, Du solltest doch keine Fachausdrücke benutzen! Lassen wir Deine Topologie, bringe uns lieber ein schönes Beispiel.

G: Mit einem einfachen Papierstreifen, etwas Klebstoff und einer Schere kann man interessante mathematische Experimente ausführen. Dazu brauchten wir aber gleich vier mutige Personen aus dem Publikum.

(Die Assistentin bittet vier mutige Personen nach vorn).

G: Die erste mutige Person erhält einen Papierstreifen wie in Abbildung 7, der zu einem Papierring zusammengeklebt ist, jedoch wurde der Streifen vor dem Zusammenkleben um eine halbe Drehung gedreht, das heißt, die Ecke A kommt direkt auf die Ecke C und B kommt auf D. Man erhält ein Gebilde, das wie in Abbildung 8 aussieht. Ein solches Band wird von den Mathematikern als *Möbiusband* bezeichnet nach dem Mathematiker und Astronomen August Ferdinand Möbius (1790 – 1868).

Die zweite mutige Person erhält einen Streifen, den wir vor dem Zusammenheften um eine ganze Drehung drehen. Bei dem gedrehten Streifen kommt also wieder B auf auf die Rückseite von C und A auf auf die Rückseite von D.

Die dritte mutige Person erhält einen Doppelgebilde, welches aus zwei aneinandergeklebten Streifen besteht, wie in Abbildung 9 gezeigt.

Die vierte mutige Person schließlich erhält auch ein Doppelgebilde, welches aus zwei Möbiusbändern zusammengeklebt ist, die zueinander spiegelbildlich gedreht sind [3, S. 81–82, Zwei Herzen].

Wenn jetzt jede unserer hilfreichen Personen aus dem Publikum den Streifen längs der Mittellinien aufschneidet, was wird dann wohl geschehen. Hat jemand eine Ahnung?

...

G: Man kann noch zahlreiche weitere Experimente mit überraschendem Ausgang mit solchen Bändern machen (siehe etwa [3, S. 77–80, Das Möbiusband]). Wenn Ihr das versuchen möchtet, solltet Ihr das Papierband recht lang machen, sonst gibt es Schwierigkeiten beim Zusammenkleben. Einige Beispiele für Experimente:

- Was geschieht, wenn man das ursprüngliche Möbiusband, nachdem man es längs der Mittellinie zerschnitten hat, noch einmal längs der Mittellinie zerschneidet?
- Was geschieht, wenn man vor dem Zusammenkleben das Band anderthalbmals, zweimal, ... dreht?

- In Abbildung 10 ist wieder ein Papierstreifen dargestellt. Was geschieht, wenn man ihn nach Art eines Möbiusbandes nach einer halben Drehung des einen Endes zusammenklebt und dann längs der gestrichelten Linien aufschneidet?
- In dem Buch *Mathematik und Magie* von Martin Gardner findet man zahlreiche schöne Tricks, die man mit komplizierteren Möbiusbändern ausführen kann [10, Die afghanischen Bänder, S. 92–98].
- In dem Buch *Mathematische Hexereien*, welches ebenfalls von Martin Gardner stammt [8, S. 142], findet man unser aus zwei Papierringen zusammengeklebtes Doppelband (Abbildung 9, linkes Teilbild). Wir haben gesehen, was geschieht, wenn wir es entlang der gestrichelten Linie aufschneiden. Noch überraschender wird es, wenn wir das rechte Gebilde betrachten. Eines der beiden Bänder ist nach Art eines Möbiusbandes gedreht. Was erwartet Ihr, geschieht beim Aufschneiden? Wir haben schon gesehen, was geschieht, wenn man zwei Möbiusbänder, die zueinander spiegelbildlich sind, auf diese Weise zusammenklebt. Was geschieht, wenn man zwei Möbiusbänder, die gleichsinnig gedreht sind, zusammenklebt? Probiert es doch einmal zu Hause aus!

5 Sudoku

A: Man findet heute in jeder Zeitung Sudokus. Fast immer wird in den Zeitungen darauf hingewiesen: „Ein Mathematik-Ass müssen Sie für Sudoku nicht sein – cleveres Kombinieren ist hier gefragt“. Kann man also sagen, daß Sudokus nichts mit Mathematik zu tun haben?

G: Im Gegenteil! Ich weiß nicht, was sich die Journalisten unter Mathematik vorstellen, jedenfalls ist „cleveres Kombinieren“ eine sehr gute Beschreibung mathematischer Tätigkeit. Es gibt sehr ernsthafte Mathematiker, die vorschlagen, Sudoku im Mathematik-Unterricht zu behandeln [6, 7]. Was interessiert uns Mathematiker an einem solchen Spiel? Nun, einmal kann man hier sehr schön studieren, wie man Regeln zur Lösung finden kann. Noch interessanter ist es, sich zu fragen, ob diese Regeln immer zum Ziel führen.

Man könnte sich etwa vornehmen, ein Computerprogramm zu entwerfen, welches Sudokus löst. Wenn man weiß, wie ein solches Programm aussehen würde, dann wäre es nicht mehr sehr spannend, ein soches Programm wirklich zu schreiben. Stellt Euch vor, Harry Potter wüßte einen Zauberspruch, der bewirkt, daß ein Sudoku oder ein anderes Spiel sofort gelöst würde. Das wäre ja dann recht langweilig, einfach immer nur den Zauberspruch aufzusagen.

A: Ihr kennt sicher alle die Spielregeln des Sudoku. In einem Feld von $9 \times 9 = 81$ Kästchen sind einige dieser Kästchen mit Ziffern zwischen 1 und 9, besetzt. Die noch freien Felder sind so aufzufüllen, daß in jeder Zeile und jeder Spalte sowie in jedem der markierten Unterquadrate, die aus 3×3 Kästchen bestehen, alle Ziffern von 1 bis 9 genau einmal vorkommen.

G: In Abbildung 11 ist ein solches Sudoku angegeben. Es stammt aus der Zeitung *Times* und wurde als besonders schwer klassifiziert [7]. In diesem Sudoku sind 24 Ziffern vorgegeben, wir haben also $81 - 24 = 57$ Ziffern zu ermitteln.

A: Wie könnte man sich ein Programm, das ein Sudoku löst, vorstellen?

G: Ein Computer ist genau das Gegenteil eines Mathematikers, er ist nicht besonders klug, man muß ihm jeden Schritt vorschreiben, aber er ist ungeheuer fleißig und sehr schnell. Wir weisen unseren Computer nun an, in jedes noch nicht besetzte Feld erst einmal alle Ziffern von

1 bis 9 einzutragen. Danach soll der Computer in jedem solchen Feld alle diejenigen Ziffern löschen, die nach den Sudoku-Regeln in diesem Feld nicht stehen dürfen. Ich möchte diese Methode die *Sherlock-Holmes-Methode* nennen. Sherlock Holmes war häufig recht ungehalten über die Begriffsstutzigkeit seines Partners Dr. Watson. So sagt er in dem Roman *Im Zeichen der Vier* zu Watson:

Wie oft habe ich es Ihnen gesagt, daß, wenn Sie das Unmögliche ausgeschlossen haben, was übrigbleibt, so unwahrscheinlich es auch scheinen mag, die Wahrheit sein muß?

Wir schließen also in unserem Programm erst einmal das Unmögliche aus. In Abbildung 12 ist das Ergebnis dieses ersten Schrittes des Computers dargestellt. Zum Beispiel darf in dem linken oberen Feld keine 2 stehen, denn diese kommt in der linken Spalte bereits vor. Ebenso darf keine 3 in dem Feld stehen, denn in der ersten Zeile finden wir eine 3. Es gibt gleich zwei Gründe dafür, daß in dem linken oberen Feld keine 4 stehen darf: Einmal kommt die 4 schon in dem linken oberen 3×3 -Quadrat und zum anderen in der ersten Spalte vor. Wie man weiter sieht, darf auch keine 6 und keine 7 vorkommen sowie keine 9. Es bleiben also nur die Ziffern 1, 5 und 8.

Auf die gleiche Weise verfahren wir mit den anderen Kästchen. Ich gebe zu, daß dies eine etwas langwierige (und auch langweilige) Methode ist, aber wir denken ja an ein Computerprogramm, und der Computer soll ruhig etwas arbeiten. Worauf es uns ankommt, ist nicht, eine möglichst einfache Methode zu finden, sondern eine Methode, die sicher zur Lösung führt.

Wir schauen uns nun Abbildung 12 genauer an. Als erstes fällt uns auf, daß in der vierten Zeile im ersten Kästchen nur eine einzige Ziffer steht, eine 7. Nach Sherlock Holmes können wir schließen, daß in diesem Kästchen eine 7 stehen muß.

In dem zweiten oberen 3×3 -Quadrat ist nur eine einzige 2 zu finden, nämlich im sechsten Kästchen der ersten Zeile. Das bedeutet aber, daß in diesem Kästchen eine 2 stehen muß. Auch hier argumentieren wir wieder mit Sherlock Holmes: In keinem anderen Kästchen des Quadrats kann eine 2 stehen, also muß das Kästchen, welches übrigbleibt, das wahre Kästchen für die 2 sein.

In Tabelle 1 sind die ersten Schritte zur Lösung des Sudokus aufgelistet. Die einzelnen Kästchen werden durch Angabe der Zeilennummer (von oben nach unten gezählt) und der Spaltennummer (von links nach rechts) numeriert. So bedeutet das Ziffernpaar (7,2) das zweite Kästchen in der siebten Zeile. Steht in der Tabelle die Bemerkung „einz. Mögl.“ so heißt das, daß für das betreffende Kästchen nur noch eine Möglichkeit für eine Ziffer besteht, so wie eben bei der 7 in der Position (4,1). Die Bemerkung „Quadrat“ bedeutet, daß in einem 3×3 -Quadrat eine Ziffer nur ein einziges Mal auftaucht, so wie eben die 2 in (1,6). Ähnlich bedeutet „Zeile“, daß eine Ziffer in einer Zeile nur einmal vorkommt, ganz analog ist die Bedeutung von „Spalte“.

Es braucht wohl nicht eigens erwähnt zu werden, daß nach jeder neu gefundenen endgültigen Ziffer unser Computer weitere Ziffern in den noch offenen Kästchen löschen kann. Dies wird hier nicht dargestellt, das wäre dann doch zu langweilig.

In Abbildung 13 ist der Zustand des Sudoku nach dem achtzehnten Schritt dargestellt. Wir sehen uns hier die letzten vier Kästchen in der neunten Zeile an und wenden die Sherlock-Holmes-Methode auf das Kästchen (9,6) an. Würde dort die Ziffer 6 stehen, dann blieben für die verbleibenden drei Felder nur die beiden Ziffern 1 und 7. Nur zwei Ziffern für drei Felder, das ist unmöglich. Es folgt nach Sherlock Holmes, daß in (9,6) eine 9 stehen muß.

In der vierten Zeile kann keine 7 stehen, da bereits in (4,1) eine steht. Ebenso kann in Spalte 6 keine 7 stehen. Das heißt aber, daß im mittleren Quadrat eine 7 nur in (5,4) oder in (5,5)

Nr.	Ziffer	Position		Bemerkungen
1	7	4	1	einz. Mögl.
2	2	1	6	Quadrat
3	3	2	1	Quadrat
4	8	3	7	Quadrat
5	2	4	3	Quadrat
6	8	9	4	Quadrat
7	3	3	9	Quadrat
8	3	8	7	Quadrat
9	2	7	8	Quadrat
10	4	8	9	Quadrat
11	5	8	5	Quadrat
12	2	8	2	Quadrat
13	8	8	1	einz. Mögl.
14	6	8	3	einz. Mögl.
15	7	8	6	einz. Mögl.
16	2	2	7	Quadrat
17	5	9	2	Quadrat
18	7	7	2	Quadrat

Tabelle 1: Die ersten achtzehn Schritte des Times-Sudoku.

stehen darf. Nun betrachten wir das benachbarte Quadrat. In der Zeile 5 darf keine 7 stehen, da, wie wir eben gesehen haben, in (5,4) oder (5,5) eine 7 stehen muß. Ebenfalls kann in Spalte 7 keine 7 stehen, da schon in (1,7) eine steht. Es verbleiben die beiden Plätze (4,9) und (6,9) als mögliche Positionen für eine 7 in dem letzten Quadrat in der Mitte. Da in der vierten Zeile in (1,4) bereits eine 7 steht, kommt nur noch die Position (6,9) für die 7 in Frage. Wir erhalten damit die Schrittfolge in Tabelle 2.

Nr.	Ziffer	Position		Bemerkungen
19	9	9	6	siehe oben
20	7	6	9	siehe oben
21	5	5	8	Quadrat
22	7	9	8	Quadrat
23	5	2	9	Quadrat

Tabelle 2: Die Schritte 19–23 des Times-Sudoku.

Die Situation nach dem 23. Schritt ist in Abbildung 14 dargestellt. Von nun ab geht alles recht einfach. In einem der Felder (1,1) oder (1,3) muß eine 5 stehen, denn in Zeile 2 und in Spalte 2 darf sich keine 5 befinden. Damit muß in (3,4) eine 5 stehen, denn in der ersten Zeile steht eine 5 in (1,1) oder (1,3) und der zweiten Zeile sowie in der fünften und der sechsten Spalte befindet sich je eine 5. Der Rest ist in Tabelle 3 dargestellt, und in Abbildung 15 findet man die Lösung.

Diese Skizze eines Programmentwurfs ist natürlich noch nicht vollständig. Beim vorliegenden Sudoku hat es geklappt, es bleiben aber noch Fragen offen. Gerade diese Fragen sind es, die uns Mathematiker interessieren. Wer interessiert ist, findet in der Literatur Anregungen für die

Nr.	Ziffer	Position	Bemerkungen	Nr.	Ziffer	Position	Bemerkungen
24	5	3 4	siehe oben	41	4	6 6	Quadrat
25	9	2 4	Quadrat	42	6	7 6	Spalte
26	7	2 5	Quadrat	43	4	7 5	Quadrat
27	7	5 4	Quadrat	44	6	2 8	Zeile
28	3	5 6	Quadrat	45	4	3 8	Zeile
29	1	5 5	Quadrat	46	1	1 8	Zeile
30	3	7 4	Quadrat	47	9	6 1	einzel. Mögl.
31	1	3 6	Spalte	48	6	6 7	einzel. Mögl.
32	1	2 3	einzel. Mögl.	49	5	6 3	Zeile
33	9	3 2	Quadrat	50	1	7 1	Spalte
34	6	1 2	Spalte	51	9	7 3	Zeile
35	8	5 2	Spalte	52	4	5 3	Quadrat
36	5	1 1	einzel. Mögl.	53	9	5 7	Zeile
37	8	1 3	einzel. Mögl.	54	4	4 7	Quadrat
38	4	1 4	Zeile	55	1	4 9	Quadrat
39	6	3 5	Quadrat	56	6	9 9	Zeile
40	6	4 4	Spalte	57	1	9 7	

Tabelle 3: Die Schritte 24–58 des Times-Sudoku.

weitere Beschäftigung mit Sudokus [7, 6]. Auch das Internet bietet eine große Zahl von Beiträgen zu dem Thema an. Einige dieser interessanten Fragen wären etwa:

- Wie findet man ein lösbares Sudoku?
- Wie stellt man fest, daß es nicht noch weitere Lösungen gibt? Es ist nicht erwünscht, daß es mehrere verschiedene Lösungen gibt. Normalerweise ist in den Zeitschriften die Lösung des Sudokus angegeben, und es wäre sehr verwirrend, wenn man eine Lösung gefunden hätte, diese aber von der angegebenen Lösung verschieden wäre. Man würde sich dann fragen müssen, ob man nicht irgend etwas übersehen hat.
- Wie gelangt man zu sinnvollen Vorgaben? Gibt man zu viele Ziffern vor, dann wird das Sudoku zu leicht. Wenn man zu wenige vorgibt, dann könnte es sein, daß es mehrere Lösungen gibt.
- Man kann aus einem lösbaren Sudoku ein neues lösbares Sudoku erzeugen, indem man etwa die erste und die zweite Zeile vertauscht. Eine typisch mathematische Frage wäre: Welche Operationen mit einem lösbaren Sudoku führen wieder auf ein lösbares Sudoku.
- Schließlich gibt es noch die interessante Frage: Wieviele eindeutig lösbare Sudokus gibt es? Genauer: Wieviele verschiedene gelöste Sudokus gibt es, denn man kann ja zu dem gleichen ausgefüllten Sudoku-Schema verschiedene Vorgaben angeben. Man hat ausgerechnet, daß es 6 670 903 752 021 072 936 960 verschiedene Sudokus gibt. Wenn man unter diesen nur diejenigen zählt, die wirklich voneinander verschieden sind, die also nicht durch Operationen der eben angedeuteten Art ineinander überführt werden können, dann verbleibt immer noch eine Anzahl von 5 472 730 538 Sudokus [7].
- Man findet in den Zeitungen noch Sonderformen von Sudokus, und es gibt eine Anzahl ähnlicher Spiele, wie etwa magische Quadrate oder lateinische Quadrate [7]. Es gibt also für uns Mathematiker noch genügend zu spielen!

Literatur

- [1] Alexander Adrion. *Adrion's Zauberkabinett zum Verwundern und Vorführen für jedermann (mit Trickbeigaben)*. Studio DuMont. DuMont Buchverlag, Köln, 1980.
- [2] Alexander Adrion. *Die Kunst zu zaubern. Mit einer Sammlung der interessantesten Kunststücke zum Nutzen und Vergnügen für jedermann*. dumont taschenbücher 1680. DuMont Buchverlag, Köln, 2. Auflage, 1990.
- [3] Albrecht Beutelspacher und Marcus Wagner. *Wie man durch eine Postkarte steigt ... und andere spannende mathematische Experimente. Illustrationen von Anna Zimmermann*. Herder, Freiburg im Breisgau [u.a.], 2008.
- [4] Lewis Carroll. *Alice's Adventures in Wonderland and Through the Looking-Glass and what Alice found there. Edited with an Introduction by Roger Lancelyn Green, With Illustrations by John Tenniel*. The World's Classics. Oxford University Press, Oxford, New York, 1971.
- [5] Lewis Carroll. *Die Alice-Romane. Alices Abenteuer im Wunderland. Durch den Spiegel und was Alice dort fand. Mit den Illustrationen von John Tenniel, Übersetzt und herausgegeben von Günther Flemming*. Philipp Reclam jun., Stuttgart, 2002.
- [6] Jean-Paul Delahaye. Mathematische Unterhaltungen: Sudoku oder die einsamen Zahlen. *Spektrum der Wissenschaft*, März 2006:100–106.
- [7] Ch. Elsholtz and A. Mütze. Sudoku im Mathematikunterricht. *Mathematische Semesterberichte*, 54:69–93, 2007.
- [8] Martin Gardner. *Mathematische Hexereien, Denksportaufgaben, Kunststücke, Rätsel, Spiele, mathematische Zauberei*. Ullstein, Berlin [u.a.], 1979.
- [9] Martin Gardner. *Mathematisches Labyrinth. Neue Probleme für die Knobelgemeinde*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1979.
- [10] Martin Gardner. *Mathematik und Magie. 115 Karten- Würfel- und Dominotricks, mathematische Spiele und Zauberkunststücke, Vorwort von Alexander Adrion*. dumont taschenbücher 106. DuMont Buchverlag, Köln, 1981.
- [11] Dominic Olivastro. *Das chinesische Dreieck. Die kniffligsten mathematischen Rätsel aus 10 000 Jahren. Aus dem Amerikanischen von Michael Schmidt*. Dromersche Verlagsanstalt Th. Knaur Nachf., München, 1995.
- [12] Joanne K. Rowling. *Harry Potter und der Stein der Weisen. Aus dem Englischen von Klaus Fritz*. Carlsen Verlag GmbH, Hamburg, 1998.
- [13] Joanne K. Rowling. *Harry Potter und der Feuerkelch. Aus dem Englischen von Klaus Fritz*. Carlsen Verlag GmbH, Hamburg, 2000.
- [14] Gustav Schwab. *Die Sagen des klassischen Altertums*. Emil Vollmer Verlag, Wiesbaden.
- [15] Hugo Steinhaus. *100 neue Aufgaben aus der elementaren Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Zürich und Frankfurt/Main, 1973.
- [16] Jearl Walker. Experiment des Monats: Labyrinthwandern mit Methode: Wie man sich in einem Irrgarten zurechtfindet und ohne rettenden Ariadne-Faden wieder herausgelangt. *Spektrum der Wissenschaft*, Februar 1987:144–149.

- [17] Th. Wolff. *Der Wettlauf mit der Schildkröte. Gelöste und ungelöste Probleme*. August Scherl G. m. b. H., Berlin S W, 1929.

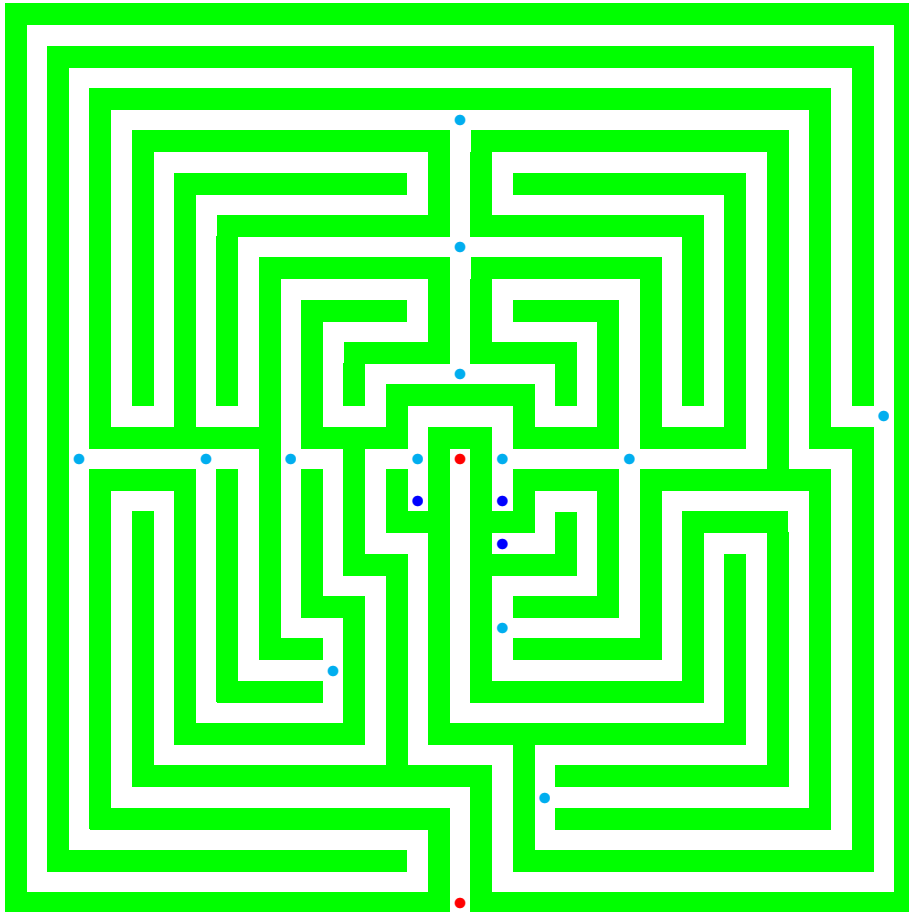


Abbildung 3: Das Heckenlabyrinth von Chevening in der Grafschaft Kent (England).

Start- und Zielpunkt sind **rot** markiert.

Endpunkte von Sackgassen sind **blau** gekennzeichnet.

Hellblaue Markierungen bezeichnen Punkte, an denen eine Entscheidung für einen von mehreren möglichen Wegen notwendig ist.

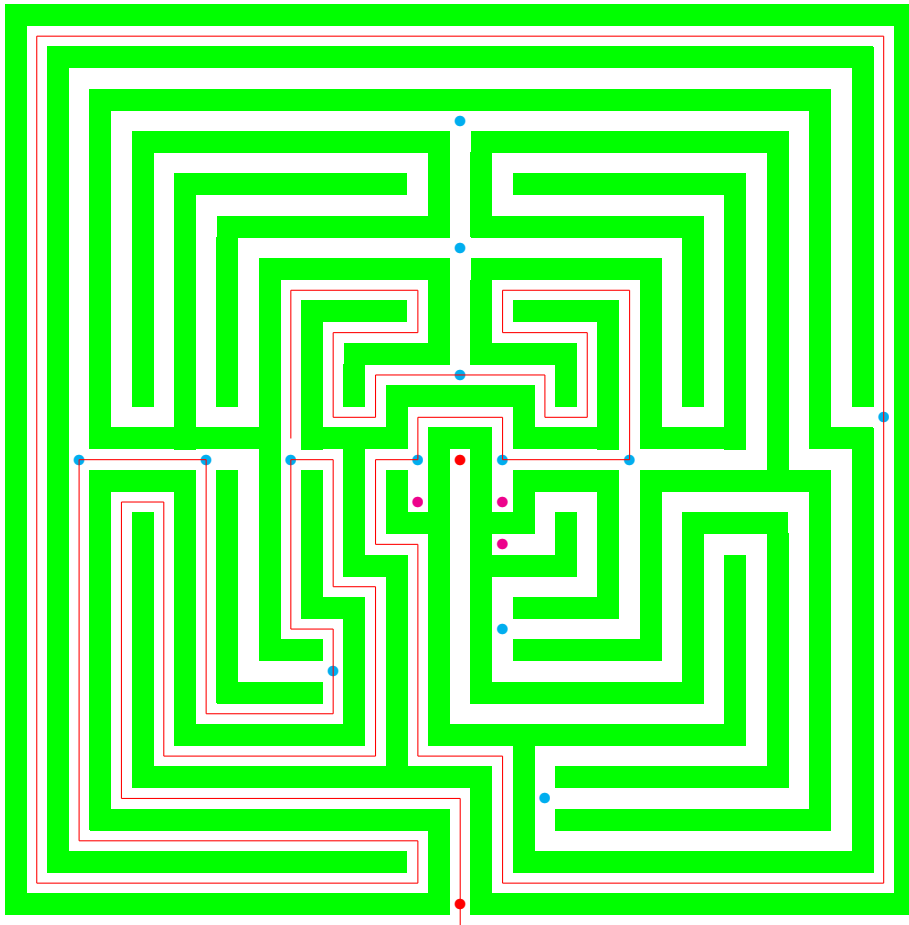


Abbildung 4: Das Heckenlabyrinth von Chevening.

Strategie „immer links“.

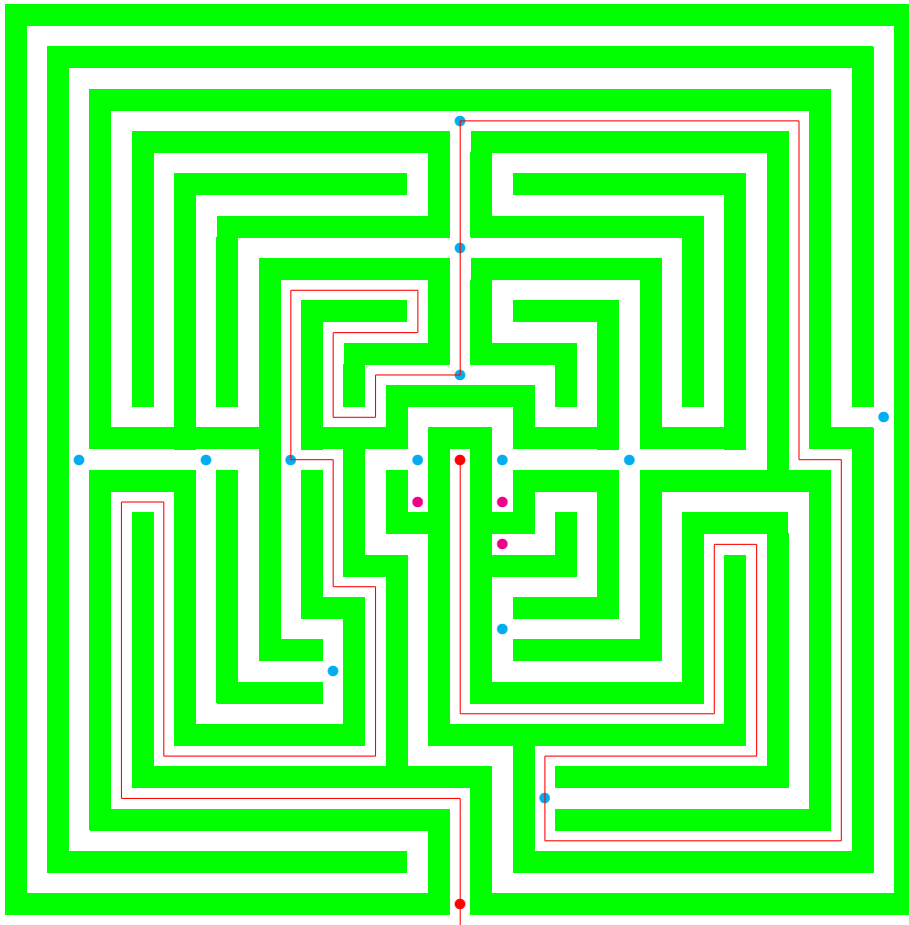


Abbildung 5: Das Heckenlabyrinth von Chevening.

Ein Weg zum Ziel.

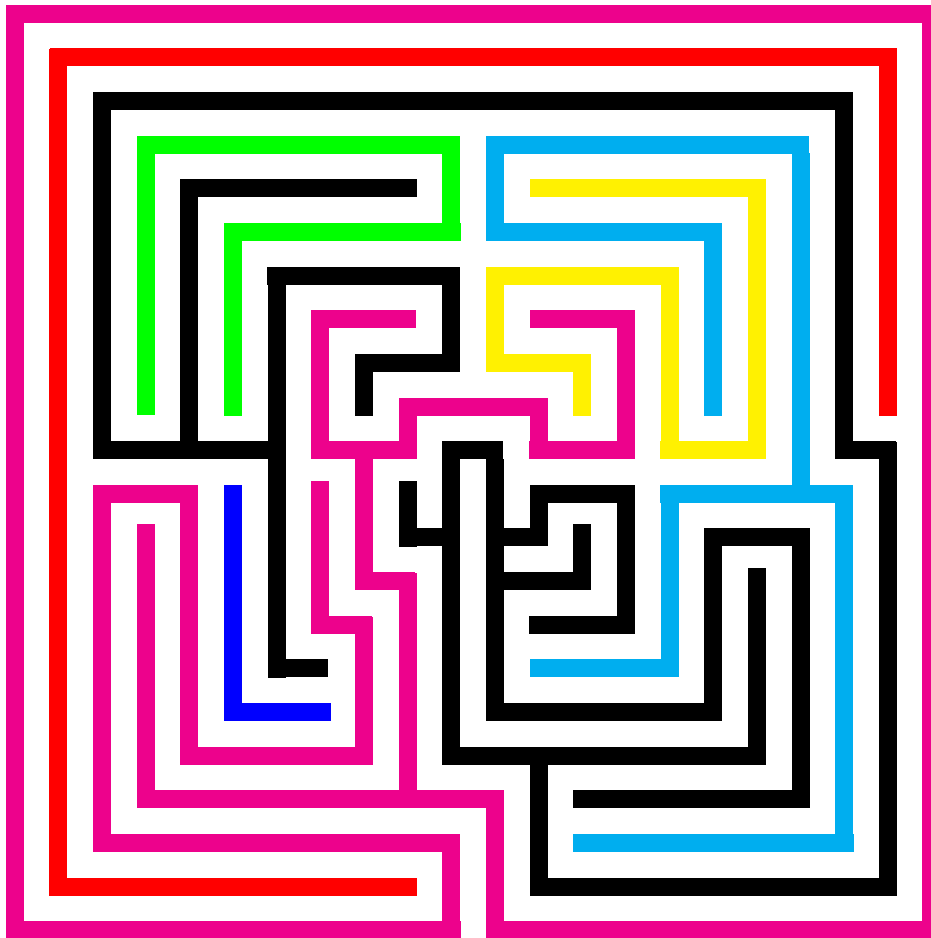


Abbildung 6: Das Heckenlabyrinth von Chevening.

Die sieben zusammenhängenden Teile („Inseln“) des Labyrinths.

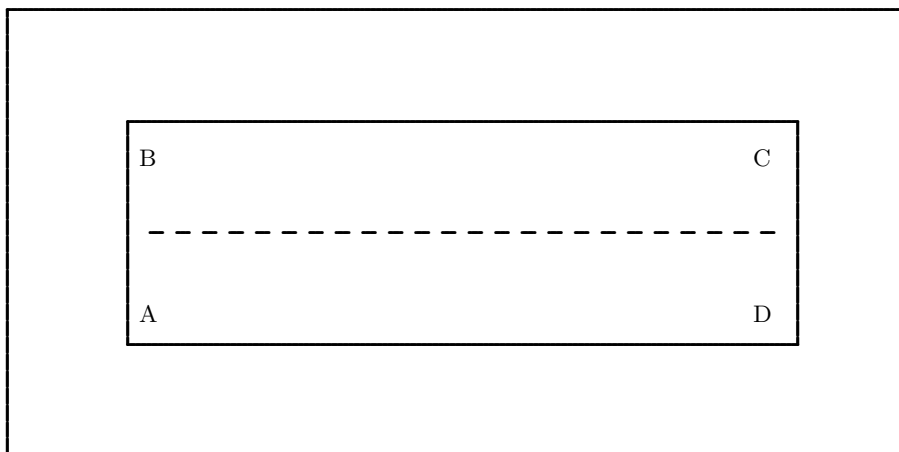


Abbildung 7: Der Papierstreifen vor dem Zusammenkleben.

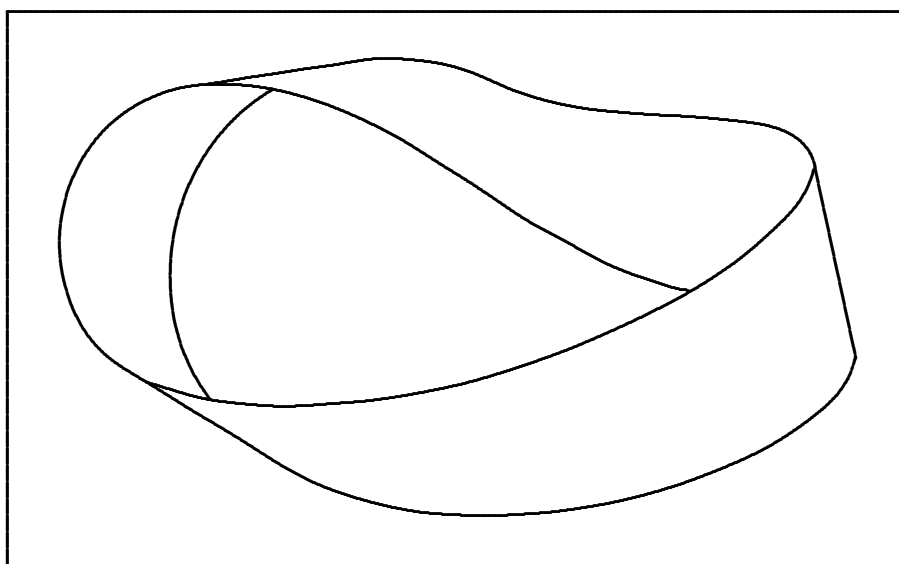


Abbildung 8: Das zusammengeklebte Möbiusband.

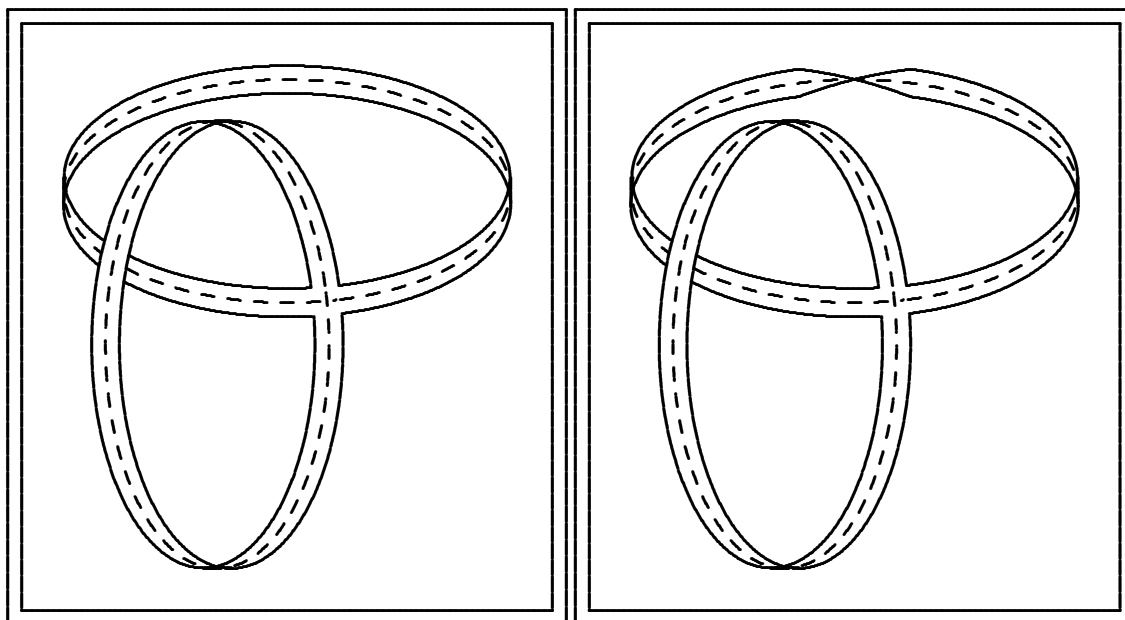


Abbildung 9: Die Gebilde von Gardner.

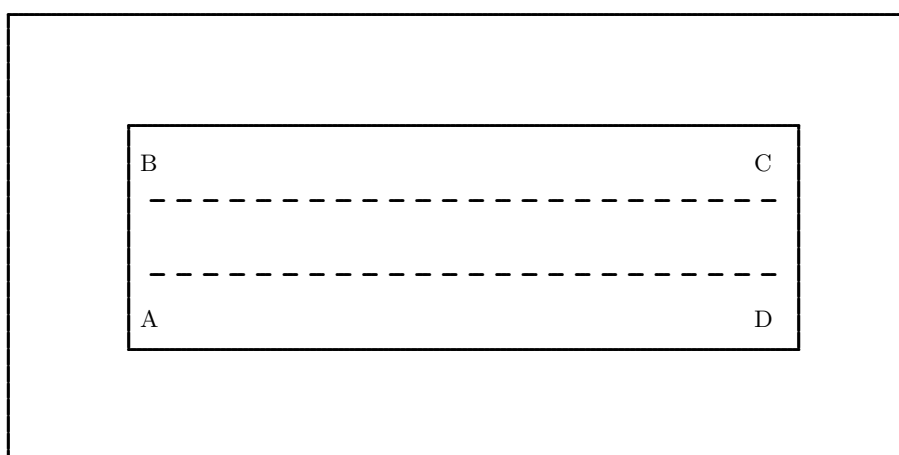


Abbildung 10: Ein Möbiusband mit zwei Schnittlinien.

				3		7		9
	4				8			
2		7						
	3			9	5		8	
6								2
	1		2	8			3	
						5		8
			1				9	
4		3		2				

Abbildung 11: Beispiel-Sudoku.

Dieses Sudoku erschien in der *Times* vom 23. Juli 2005. Es wurde dort als „Fiendish“ klassifiziert, also als „teuflisch“ oder „höllisch“.

1 5 8	5 6 8	1 5 6 8	4 5 6	3	1 2 4 6	7	1 2 4 5 6	9
1 3 5 9	4	1 5 6 9	5 6 7 9	1 5 6 7	8	1 2 3 6	1 2 5 6	1 3 5 6
2	5 6 8 9	7	4 5 6 9	1 4 5 6	1 4 6 9	1 3 4 6 8	1 4 5 6	1 3 4 5 6
7	3	2 4	4 6 7	9	5	1 4 6	8	1 4 6 7
6	5 8 9	4 5 8 9	3 4 7	1 4 7	1 3 4 7	1 4 9	1 4 5 7	2
5 7 9	1	4 5 9	2	8	4 6 7	4 6 9	3	4 5 6 7
1 3 7 9	2 6 7 9	1 2 6 9	3 4 6 7 9	4 6 7	3 4 6 7 9	5	1 2 4 6 7	8
5 7 8	2 5 6 7 8	2 5 6 8	1	4 5 6 7	3 4 6 7	2 3 4 6	9	3 4 6 7
4	5 6 7 8 9	3	5 6 7 8 9	2	6 7 9	1 6	1 6	1 6

Abbildung 12: Beispiel-Sudoku – Angabe der möglichen Ziffern für jedes Kästchen.

				3	2	7		9
3	4				8	2		
2		7				8		3
7	3	2		9	5		8	
6								2
	1		2	8			3	
	7					5	2	8
8	2	6	1	5	7	3	9	4
4	5	3	8	2	69	16	¹⁶ ₇	¹⁶ ₇

Abbildung 13: Beispiel-Sudoku – Zustand nach dem achtzehnten Schritt.

				3	2	7		9
3	4				8	2		5
2		7				8		3
7	3	2		9	5		8	
6							5	2
	1		2	8			3	7
	7					5	2	8
8	2	6	1	5	7	3	9	4
4	5	3	8	2	9		7	

Abbildung 14: Beispiel-Sudoku – Zustand nach dem 23. Schritt.

5	6	8	4	3	2	7	1	9
3	4	1	9	7	8	2	6	5
2	9	7	5	6	1	8	4	3
7	3	2	6	9	5	4	8	1
6	8	4	7	1	3	9	5	2
9	1	5	2	8	4	6	3	7
1	7	9	3	4	6	5	2	8
8	2	6	1	5	7	3	9	4
4	5	3	8	2	9	1	7	6

Abbildung 15: Beispiel-Sudoku – Lösung.