

Mathematik – Das Werkzeug der Erkenntnis

5. Das Unendliche

Ulrich Eckhardt
Universität Hamburg
Department Mathematik
— Optimierung und Approximation —
Bundesstraße 55
20 146 Hamburg
E-Mail: Eckhardt@math.uni-hamburg.de
<http://www.math.uni-hamburg.de/home/eckhardt/>

3. Februar 2010

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Ein Blick in die Geschichte	6
2.1	Die griechische Antike	6
2.2	Die Neuzeit	10
3	Die Infinitesimalrechnung	12
4	Angriff auf das aktual Unendliche	16
5	Paradoxien des Unendlichen	19
	Anhang: Zwei Beispiele für das Unendliche	22
A	Die unendliche Bibliothek	22
B	Blöcke stapeln	24
	Literatur	28

Vorlesung am 3. 2. 2010 in der Bucerius Law School Hamburg.

Je le vois, mais je ne le crois pas!
Georg Cantor (1845 – 1918)
nach [30, S. 33]

1 Einleitung

In seinem Buch über Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft schreibt Hermann Weyl [38, S. 89 f.]:

Will man zum Schluß ein kurzes Schlagwort, welches den lebendigen Mittelpunkt der Mathematik trifft, so darf man wohl sagen: sie ist die *Wissenschaft vom Unendlichen*. Die Spannung zwischen dem Endlichen und Unendlichen für die Erkenntnis der Wirklichkeit fruchtbar gemacht zu haben, ist die große Leistung der Griechen. Welche Bedeutung diese Spannung – und die Versuche zu ihrer Überwindung – für die Geschichte der theoretischen Erkenntnis besaß und besitzt, sollte hier fühlbar gemacht werden. „Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher so tief das Gemüt der Menschen bewegt; das Unendliche hat wie kaum eine andere *Idee* auf den Verstand so anregend und fruchtbar gewirkt; das Unendliche ist aber auch wie kein anderer *Begriff* so der *Aufklärung* bedürftig.“ (*Hilbert*, Über das Unendliche) [23].

Wenn wir diese Beschreibung der Mathematik aber als korrekt hinnehmen, entsteht ein Problem: Die Natur ist endlich. Wie kann dann die „Wissenschaft vom Unendlichen“ die „Sprache der Natur“ sein? Heute wollen wir dieser Frage nachgehen.

Wir beginnen „zum Aufwärmen“ mit zwei einfachen Mathematikaufgaben über *unendliche Reihen*. Die erste behandelt die sogenannte *geometrische Reihe*, das ist ein Ausdruck der Form

$$G(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

Hierbei sollten wir annehmen, daß x eine reelle Zahl ist, deren Absolutbetrag echt kleiner als 1 ist. Die drei Punkte bedeuten eigentlich nur „und so weiter“, das heißt, man kann sich leicht denken, wie die Reihe weitergehen soll. Wichtig ist, daß dieser Prozeß als unendlich fortgesetzt gedacht wird. Aristoteles hätte hier erhebliche Einwände gehabt, und derlei wurde erst in der Neuzeit vorsichtig untersucht, etwa von Leibniz.

Wir können sehr leicht einen „Indizienbeweis“ führen, daß der durch diese Reihe gegebene Ausdruck seinen guten Sinn hat, und wir können der Reihe auch einen „Wert“ zuweisen. Wenn wir den Ausdruck $x \cdot G(x)$ bilden, dann erhalten wir

$$x \cdot G(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots$$

Das heißt aber, es ist

$$1 + x \cdot G(x) = G(x),$$

und daraus errechnet man unmittelbar

$$G(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Dies ist kein mathematischer Beweis, insbesondere machen wir uns des logischen Fehlers der *petitio principii* schuldig, um zu zeigen, daß $G(x)$ ein wohlbestimmter Wert ist, setzen wir dies

erst einmal voraus und rechnen mit diesem Phänomen ein wenig großzügig und erhalten dann einen Ausdruck, der einen guten Eindruck macht. Man kann aus unserem „Indizienbeweis“ einen gerichtsfesten Beweis konstruieren, indem man nicht mit der Reihe $G(x)$, deren Existenz ja in Frage steht, operiert, sondern mit der endlichen Reihe

$$G_n(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n.$$

Wenn wir dies tun, dann erhalten wir Resultate die wohlbestimmt sind und außer jedem Zweifel stehen. Dann, zum Schluß, müssen wir uns überlegen, was geschieht, wenn n über alle Grenzen wächst. Diesen „ordentlichen“ Beweis werde ich hier nicht führen, er ist in jedem Lehrbuch der Mathematik (oder im Internet) unter dem Stichwort „Geometrische Reihe“ zu finden. Wir werden die geometrische Reihe bald noch einmal benötigen.

Nun ist eine solche *konvergente* unendliche Reihe eigentlich uninteressant. Wir sehen uns eine zweite Reihe an, die auch einen schönen klassischen Namen trägt, die *harmonische Reihe*:

$$H = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots.$$

Unsere Studenten lernen sehr früh – noch im ersten Semester – daß diese Reihe nicht konvergiert. Der Beweis dieser Tatsache ist so einfach, daß wir ihn uns ansehen wollen. Es ist

$$\begin{aligned} H &= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{> \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}}_{> \frac{1}{2}} \cdots > \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots, \end{aligned}$$

und es wird klar, warum die Reihe nicht konvergieren kann. Man kann, wenn man der formalen Herleitung nicht traut, einfach einmal ausrechnen, wie es denn um die *Divergenz* der Reihe, also um ihre Nichtkonvergenz, bestellt ist. Man stellt fest, daß die bis zu einem gewissen n ausgerechnete Summe in der Tat ständig wächst, aber daß der Zuwachs immer kleiner wird, die Reihe divergiert irritierend langsam. In Tabelle 1 sind die Teilsummen der Reihe für 1 bis 10 Millionen Summanden aufgeführt. Man sieht einen Fortschritt, aber der ist sicher nicht überwältigend!

n	H_n
1 000 000	14.3927267228657
2 000 000	15.0858736534257
3 000 000	15.4913386782006
4 000 000	15.7790207089857
5 000 000	16.0021642352999
6 000 000	16.1844857754272
7 000 000	16.3386364433497
8 000 000	16.4721678270456
9 000 000	16.5899508557576
10 000 000	16.6953113658599

Tabelle 1: Partialsummen $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ der geometrischen Reihe.

Nun stellen wir uns eine „mathematische“ Frage:

Die Partialsummen der harmonischen Reihe wachsen an, das heißt, sie übertreffen irgendwann jede vorgegebene natürliche Zahl. Kann es sein, daß einmal eine der Partialsummen **genau** ganzzahlig ist?

An dieser Stelle zumindest hätte Aristoteles lebhaft protestiert. Wir stellen hier eine Frage, die die Gesamtheit der Zwischensummen betrifft, und diese Gesamtheit ist unendlich. Etwas anders gesehen: Wir haben hier wieder eine ähnliche Situation wie bei der Goldbachschen Vermutung (Teil 4 der Veranstaltungsreihe). Wenn es eine solche Zwischensumme gibt, dann könnte man sie – vorausgesetzt sie ist im „zugänglichen“ Bereich der natürlichen Zahlen – finden, indem man einen Computer hinreichend lange laufen läßt. Wenn allerdings das Experiment negativ ausfällt, dann besagt dies nichts, entweder hätten wir noch weiter rechnen müssen oder es gibt keine solche Zwischensumme.

Man könnte einen dialektischen Beweisversuch unternehmen. Stellen wir uns vor, ein Proponent **P** behaupte, es gebe eine ganzzahlige Zwischensumme, ein Opponent **O** hingegen bestreite das. Es könnte sich eine Diskussion etwa folgender Art entwickeln:

P Die Zwischensummen werden unbeschränkt immer größer. Dies besagt, daß sie jede vorgelegte natürliche Zahl irgenvann übertreffen, aber da die Zuwächse $\frac{1}{n}$ immer kleiner werden, tun sie das in ständig kleiner werdenden Schritten. Es müßte schon recht seltsam zugehen, wenn sie nicht irgendwann einmal eine der natürlichen Zahlen genau treffen würden.

O Wenn wir die Zwischensummen auf einen Hauptnenner bringen würden, dann wäre dieser gleich dem Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, das heißt, der Nenner enthält alle Zahlen bis n als Faktor. Der Zähler besteht dann aus Summanden ähnlicher Produkte wie der Nenner, nur daß in jedem Summanden ein Faktor fehlt. Betrachten wir zum Beispiel $n = 7$. Hier ist

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} &= \\ &= \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \\ &\quad + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = \\ &= \frac{5040 + 2520 + 1680 + 1260 + 1008 + 840 + 720}{5040} = \frac{13068}{5040} = \frac{363}{140} = 2.59285714285714 \dots \end{aligned}$$

Bei der Addition der Summanden des Zählers wird die Teilbarkeit der Summe unübersichtlich, das heißt, wir können die Summe im Zähler als eine Art „Zufallszahl“ ansehen. Daß aber zufällig gerade diese Zahl durch sämtliche Zahlen bis n dividierbar ist, ist doch sehr unwahrscheinlich, wenn nicht gar unmöglich.

P Die Wahrscheinlichkeit mag gering sein, aber wir haben ja unendlich viele Versuche frei, für jedes n einen. Diese Versuche sind nicht einander ausschließend, und die Berechnung einer vernünftigen Wahrscheinlichkeit ist nicht ganz einfach, möglicherweise sogar nicht möglich, aber bei der unendlichen Anzahl der Versuche kann man davon ausgehen, daß die Wahrscheinlichkeit, daß es doch dann irgendeinmal klappt, sehr hoch, ja fast sicher ist.

O Das ist ein Argument, wie man es häufig antrifft, und dadurch wird es nicht schlüssiger. Ich behaupte, daß die Wahrscheinlichkeit, daß die Zwischensumme ganzzahlig ist, Null ist. Du versuchst zu argumentieren, daß $0 \times \infty$ eine Zahl ist, die Du für Deine Argumentation als günstig ansiehst. Ich hingegen behaupte, daß $0 \times \infty = 0$ ist und bleibt. Mit anderen Worten: Wahrscheinlichkeit 0 bedeutet Unmöglichkeit, also ist ihre Negation die *Wahrheit*.

Im übrigen ist das Argument auch schon deshalb nicht schlüssig, weil die fragliche Teilbarkeitsaussage nicht für alle n gleichwahrscheinlich ist. Je größer n wird, desto mehr Faktoren hat man im Nenner, so daß es mit wachsendem n immer unwahrscheinlicher wird, daß der Zähler durch **alle** diese Faktoren teilbar ist.

P Zunächst einmal: Man kann in jedem besseren Lehrbuch über Wahrscheinlichkeitstheorie nachlesen, daß Wahrscheinlichkeit 0 eben nicht Unmöglichkeit bedeutet, die Sache ist komplizierter. Aber sehen wir davon ab und fragen uns lieber wie es mit der Teilbarkeit für große n ist. Im Gegenteil, der Zähler muß schneller wachsen als der Nenner, denn schließlich muß der Bruch jede vorgegebene Zahl einmal übertreffen, also wird der Zähler irgendwann gegenüber dem Nenner gigantisch, und damit steigt die Wahrscheinlichkeit, daß er durch alle Faktoren des Nenners – für wirklich große n ist dies eine vergleichsweise geringe Anzahl – teilbar ist.

⋮

Das Gericht beschließt, sich zu vertagen und einen Gutachter, einen Mathematiker, zu bestellen. Dieser [32] schreibt erst einmal an eine Wandtafel die Bruchdarstellungen von H_n für $n = 2$ bis $n = 6$ an (Tabelle 2). Hier meldet sich der Proponent zu Wort und weist darauf hin, daß für $n = 6$ zwar die Zwischensumme nicht ganzzahlig sei, aber immerhin ein sehr einfacher Bruch, so daß es nicht unwahrscheinlich erscheint, daß irgendwann einmal eben doch eine ganze Zahl herauskomme.

n	H_n (Bruch)	H_n (gekürzt)	H_n (Dezimal)
2	$1 + \frac{1}{2} = \frac{2+1}{2}$		0.5
3	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{6+3+2}{6}$		1.833 333 333
4	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{12+6+4+3}{12}$		2.083 333 333
5	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{60+30+20+15+12}{60}$		2.283 333 333
6	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{60+30+20+15+12+10}{60}$		2.45

Tabelle 2: Die Summen H_n für $N = 2$ bis $n = 6$.

Der Gutachter [32, Nr. 27] weist die Prozeßbeteiligten auf eine Beobachtung hin. In der gekürzten Darstellung sind die Summanden im Zähler alle gerade bis auf genau einen. Wenn dies immer so wäre, dann wäre unsere Frage entschieden. Der Zähler wäre dann immer ungerade und der Nenner wäre immer gerade, denn der Hauptnenner enthält immer mindestens einen Faktor 2. Wir haben also jetzt eine Hypothese, die zu beweisen ist.

Zum Beweis betrachten wir demgemäß nur die Teilbarkeit von Zähler und Nenner durch 2. Wieviele Faktoren 2 enthält der Nenner zunächst? Es gibt „reguläre“ Zweien, das ist etwa der Faktor

2, der Faktor 6, der einen Faktor 2 enthält, der Faktor 8, der drei Faktoren 2 enthält der Faktor 14, der wieder einen Faktor 2 enthält und so weiter. Eine gesonderte Behandlung erfährt die maximale Zweierpotenz, die in dem Produkt $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ enthalten ist. Eine Zweierpotenz ist eine Zahl, die durch fortgesetzte Multiplikation mit 2 entsteht, also neben der 2 selbst $4 = 2 \cdot 2 = 2^2$, $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$, $16 = 2^4$ und so weiter. Im Nenner für $n = 100$ ist als maximale Zweierpotenz $2^6 = 64$ als Faktor enthalten, $2^7 = 128$ wäre bereits größer als 100 und kann nicht als Faktor auftreten. Für $n = 1\,000$ wäre die maximale Zweierpotenz $2^9 = 512$.

Nun betrachten wir die im Zähler stehenden Summanden. Der k -te ($k = 1, 2, \dots, n$) dieser Summanden ist ein Produkt der Form $1 \cdot 2 \cdot (k-1) \cdot (k+1) \cdot \dots \cdot n$, also das Nennerprodukt, wobei gerade k ausgelassen wurde. Wenn k die maximale Zweierpotenz $\leq n$ ist, dann enthält der betreffende Summand nur die „regulären“ Zweien, und diese können alle abdividiert werden, denn der Nenner enthält ja alle Zweien, also insbesondere auch die regulären. Was dann von dem Summanden bleibt, ist eine ungerade Zahl, denn die maximale Zweierpotenz ist in dem Summanden nicht also Faktor enthalten, und die regulären Zweien sind abdividiert worden.

Was ist nun mit den anderen Summanden des Zählers? Diese enthalten als Faktor die maximale Zweierpotenz, dafür aber möglicherweise einige der regulären Zweien nicht. Jede der Zahlen von 1 bis n – mit Ausnahme der maximalen Zweierpotenz – hat aber echt weniger Zweien als Faktor, als die maximale Zweierpotenz. Denn hätte eine dieser Zahlen die maximale Zweierpotenz als Faktor, dann müßte sie noch mindestens einen anderen Faktor enthalten, sonst wäre sie ja die maximale Zweierpotenz, und dann wäre sie größer als n , was nicht sein kann. Damit lassen sich auch die anderen Summanden ohne Rest durch alle regulären Zweien dividieren, und es bleibt dabei noch mindestens ein Faktor 2 übrig, also sind diese Summanden alle gerade.

Was lernen wir aus dieser Geschichte? Es gibt für eine solche zahlentheoretische Frage drei Möglichkeiten: entweder gibt es einen Beweis, daß eine gewisse Eigenschaft für **alle** natürlichen Zahlen zutrifft, oder wir können ein Gegenbeispiel finden oder aber – und das war bei dem Goldbachschen Problem oder dem $3n + 1$ -Problem von Collatz der Fall – beides ist nicht der Fall, die Frage muß – vielleicht für immer – unentschieden bleiben. Hier haben wir nun den zweiten Fall vorliegen, wir sind hier in der glücklichen Lage, eine Aussage zu machen, die für **alle** natürlichen Zahlen zutrifft: Für kein n ist H_n ganzzahlig. Aristoteles würde an dieser Stelle wohl recht nachdenklich werden!

2 Ein Blick in die Geschichte

2.1 Die griechische Antike

Wenden wir uns wieder – wie auch in den anderen Veranstaltungen – der Geschichte zu. Wir hatten bereits in Teil 1., Abschnitt 2.2 Zenon von Elea (490 v. Chr. (?) – 430 v. Chr.) und seine irritierenden Paradoxa der Unendlichkeit kennengelernt.

Auf Pythagoras von Samos (um 540 v. Chr.) führt man die mathematisch-religiöse Sekte der Pythagoreer zurück. Diese hatten eine gewaltige Entdeckung gemacht: Der Wohlklang der durch eine Saite erzeugten Töne zueinander hängt von den Längenverhältnissen der Saite ab. Wir hatten uns darüber in der ersten Veranstaltung (Abschnitt 1.4) bereits unterhalten. Man weiß wenig über die Pythagoreer, und es gibt sehr viele offenbare Legenden um diese Sekte [6, 6. und 7. Kapitel].

Es hat den Anschein, als ob unter den Pythagoreern eine gewisse „Zahleneuphorie“ herrschte. In den Fragmenten des Philolaos von Kroton findet man [7, S. 477]

Und wirklich hat alles, was erkannt wird, Zahl. Denn es ist unmöglich, daß ohne diese irgend etwas im Denken erfaßt oder erkannt wird.

Es war für die Pythagoreer – und für die gesamte griechische Philosophie – ein Schock, als man entdecken mußte, daß es geometrische Gebilde gibt, die ganz einfach sind, aber nicht durch Zahlen ausdrückbar. Für ein gleichseitiges rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen 1 hat die Hypotenuse die Länge $\sqrt{2}$, wie wir heute sagen würden. In dem Dialog *Menon* führt Sokrates seine Methode des *Wiedererinnerns* an einem (unwissenden) Sklaven vor [31, Band I, 82 C – 85 B]. Gegenstand des Dialogs ist die Konstruktion eines Quadrats, welches den doppelten Flächeninhalt eines gegebenen Quadrats mit der Seitenlänge 1 hat. Sokrates führt den Sklaven. In der Zeichnung in Abbildung 1 ist das gegebene Quadrat schwarz eingezeichnet. Errichtet man das Quadrat mit der Seitenlänge der Diagonale, so erhält man ein Quadrat des vierfachen Inhalts (rot umrandet), wie man leicht durch Zerlegung in kongruente Dreiecke sieht. Es handelt sich hier um einen Spezialfall des Satzes von Pythagoras für ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen 1 (die Fläche ist schwarz dargestellt), die beiden Kathetenquadrate sind in der Abbildung blau markiert, das Hypotenusenquadrat rot.

Die Diagonale des Ausgangsquadrats beziehungsweise die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks mit den Kathetenlängen 1 hat die Hypotenusenlänge $\sqrt{2}$, wie sich aus dem Satz von Pythagoras (den Pythagoras selbst wohl kaum in voller Allgemeinheit kannte) ergibt.

Schon sehr früh konnte man einsehen, daß die Seitenlänge des Quadrats mit dem Flächeninhalt 2 nicht durch eine rationale Zahl ausdrückbar ist. In unserer Terminologie heißt das, die $\sqrt{2}$ ist *irrational*.

Zum beweis Man nimmt (fälschlich) an, $\sqrt{2}$ sei rational, als $\sqrt{2} = p/q$ mit natürlichen Zahlen p und q . Wir setzen zudem voraus, daß der Bruch p/q gekürzt sei, das heißt, p und q enthalten keine gemeinsamen Teiler. Quadrieren liefert $2 = \frac{p^2}{q^2}$ oder

$$p^2 = 2 \cdot q^2.$$

Dennoch ist das Quadrat von p eine gerade Zahl. Dann muß aber auch p eine gerade Zahl sein, denn das Quadrat einer ungeraden Zahl ist immer ungerade (Eine ungerade Zahl hat die Form $p = 2k + 1$ mit einer natürlichen Zahl k , damit ist $p^2 = 4k^2 + 4k + 1$ ungerade). Es muß also $p = 2k$ sein mit einer natürlichen Zahl k . Dann ist aber

$$p^2 = (2 \cdot k)^2 = 4 \cdot k^2 = 2 \cdot q^2,$$

also $q^2 = 2 \cdot k^2$, damit wäre q ebenfalls gerade, was unserer Voraussetzung, daß p und q keine gemeinsamen Teiler haben sollten, widerspricht.

Nach Platons *Theaitetos* [31, Bd. II, 147 D] hat Theodorus von Mykene (um 460 – um 399 v. Chr.) bewiesen, daß auch die Quadratwurzeln aus 3, 5, ... bis 17 irrational sind.

Eine besondere Ironie der Geschichte: Das Erkennungszeichen der Pythagoreer, das *Pentagramm* oder das regelmäßige (Stern-) Fünfeck [6, S. 178, 206] basiert auf dem Goldenen Schnitt, und dieser ist ebenfalls irrational. Das Pentagramm oder der Drudenfuß steht bis auf den heutigen Tag für Magie. Man erinnert sich an die Zeile in Goethes *Faust* (Z. 1396)

Das Pentagramma macht dir Pein?

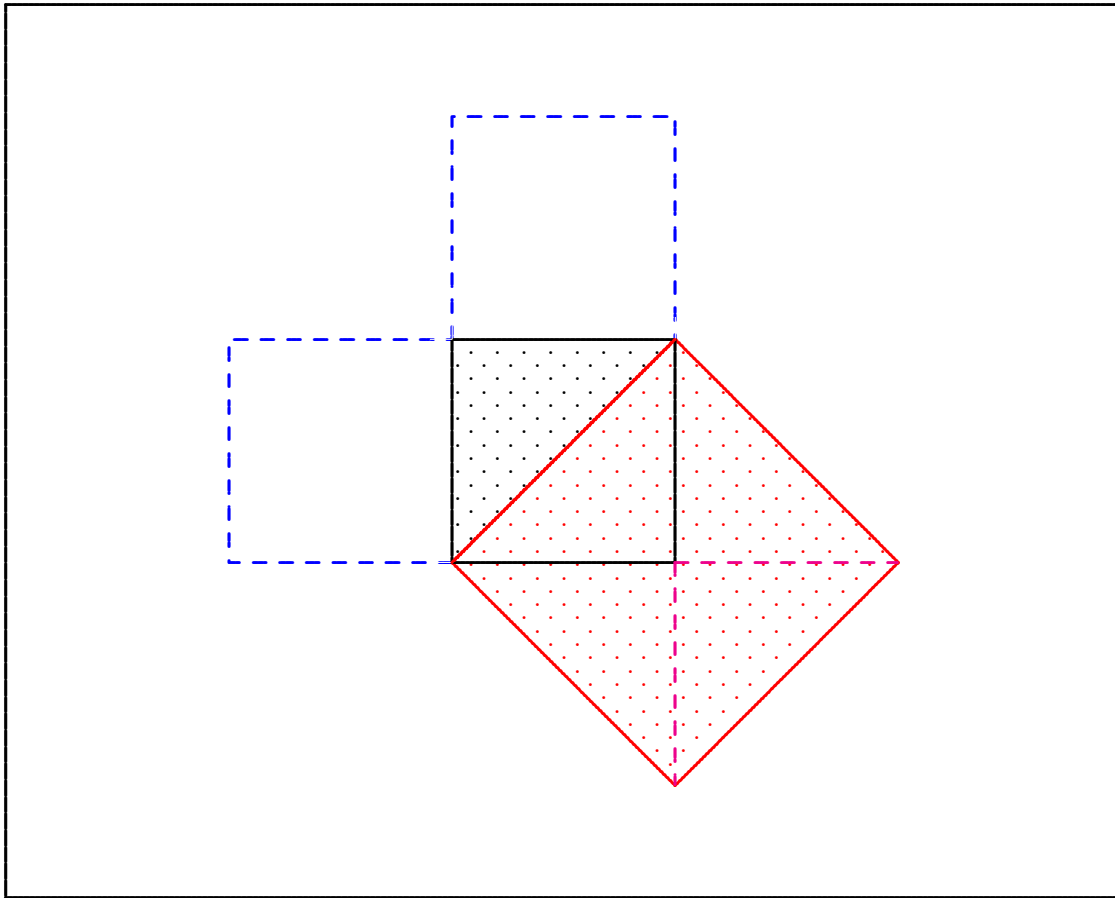


Abbildung 1: Konstruktion nach Menon.

Der Neuplatoniker Proklos (411 – 485) berichtet eine Anekdote [6, S. 183]:

Man sagt, daß derjenige, welcher zuerst die Betrachtung des Irrationalen aus dem Verborgenen in die Öffentlichkeit brachte, durch einen Schiffbruch umgekommen sei, und zwar weil das Unaussprechliche und Bildlose immer verborgen werden sollte, und daß der, welcher von ungefähr dieses Bild des Lebens berührte und aufdeckte, an den Ort der Entstehung versetzt und dort von den ewigen Fluten umspült wurde. Solche Ehrfurcht hatten die Männer vor der Theorie des Irrationalen.

Was hat nun die Irrationalität mit dem Unendlichen zu tun? Eine irrationale Zahl kann auf keine Weise mit endlichen Mitteln dargestellt werden. Man kann nun entweder konsequent im Endlichen bleiben, und dann ist die Länge der Diagonale des gleichseitigen rechtwinkligen Dreieck mit Kathetenlänge 1 eben keine vernünftige Größe, man muß dann zwischen „gewöhnlichen“ Strecken, die eine Länge besitzen, unterscheiden und Strecken, die keine Länge besitzen. Für die „Praxis“ ist dieser Unterschied unwesentlich, da man auch Strecken irrationaler Länge beliebig genau messen kann. Man hat jedoch erhebliche Verständnisschwierigkeiten. Zum Beispiel: Wie kann man etwas, was nicht existiert, beliebig genau messen. Es kam dann das bereits erwähnte (Teil 1., Abschnitt 2.2) Verdikt von Aristoteles, nach dem die Befassung mit dem aktual Unendlichen

einfach verboten wurde.

Die Griechen hatten allerdings keine Bedenken, das Universum als unendlich anzusehen. Der Atomist pikur von Samos (um 341 – 271 oder 270 v. Chr.) hatte ein umfangreiches Lehrgedicht geschrieben mit dem Titel *De natura rerum*, in dem er die gesamte Welt – von alltäglichen Verrichtungen bis zur Struktur des Kosmos – darstellte. Dieses Lehrgedicht ist uns in der Übersetzung von Titus Lukretius Carus (vermutlich 97 – vermutlich 55 v. Chr.) fast vollständig erhalten. Über das Universum sagt Lukrez (beziehungsweise Epikur) [8, 1. Buch, Verse 942–956]

Aber es ist das All von keiner Seite begrenzt;
Wär' es, so müßt ein Äußerstes sein; doch scheint es, daß nirgends
Könn' ein Äußerstes sein, wo sich nicht ein endlicher Punkt zeigt,
Über welchen hinaus nicht weiter die Kräfte des Sinns gehn.
Aber da außer dem All sonst nichts annehmen sich lässet,
Ist kein Äußerstes da, kein Maß noch Ende der Dinge.
Sei wo du willst in ihm und in welchen Gegenden, immer
Wird von dem Ort, wo du bist, sich ebendieselbige Weite,
Sich ein unendliches All nach allen Seiten erstrecken.
Nimm, es wäre der Raum des Alls in Grenzen geschlossen;
Würde, wer sich zum äußersten Rand desselben erhöhe,
Einen beflügelten Pfeil von da abschießen, obgleich er
Diesen mit angestrengtester Kraft absendete, würd' er
Solchen weiter hinaus, wohin er ihn sendete, treiben,
Oder würde zuletzt ihm etwas hindernd im Weg sein?

Wir haben hier also das gleiche Argument, mit dem Euklid beweist, daß es unendlich viele Primzahlen geben muß, allerdings hier nicht als streng mathematisches Argument sondern als Plausibilitätsbetrachtung als Veranschaulichung.

Es ist interessant, daß in jüngster Zeit dieses Argument von einem „Berufsphilosophen“ vorgebracht wurde. Robert Havemann (1910 – 1982) berichtet in seinem Buch *Dialektik ohne Dogma?* [21, S. 14]

Ich erinnere mich an eine Unterhaltung, die ich vor vier Jahren mit dem damaligen Inhaber des Lehrstuhls für dialektischen Materialismus an der naturwissenschaftlichen Abteilung der Moskauer Lomonossow-Universität, Fatalijew, hatte. Es ging um die Frage, ob die Welt ein endliches Volumen haben könnte und ob dies mit dem dialektischen Materialismus vereinbar sei. Fatalijew meinte, der Gedanke, daß der Kosmos ein Volumen endlicher Größe haben könnte, sei weder mit dem dialektischen Materialismus noch mit der einfachen Logik in Einklang zu bringen. Er sagte mir: «Sie geben doch zu, daß bei diesen Theorien von einem Radius der Welt gesprochen wird.» Ich sagte: «Natürlich! Man kann die Größe mit Hilfe eines Radius angeben.» Darauf fragte er: «Und was ist außerhalb dieses Radius?» Ich meine, damit war die Unterhaltung an einem Punkt angelangt, an dem es nicht mehr möglich war, sie fortzusetzen und wo unter Naturwissenschaftlern und Kennern der Materie nur noch ein peinliches Gefühl der Verzweiflung entstehen kann. Denn man bedenke, daß dieser Mann (ein sehr ehrenwerter, sympathischer und lustiger Mensch) tatsächlich vom Katheter der Lomonossow-Universität den dialektischen Materialismus vertrat, und zwar gegenüber Naturwissenschaftlern, die ihr Fach studieren und die bereit sind, auch der Philosophie jede Achtung entgegenzubringen. Verschiedene Diskussionen

zwischen Philosophen und Naturwissenschaftlern, die inzwischen in der Sowjetunion durchgeführt wurden, haben dort wohl schon einen Wandel angebahnt. Aber der Inhaber des philosophischen Lehrstuhls an der Universität Leipzig, Zweiling, vertritt noch heute den gleichen Standpunkt wie Fatalijew. Und der Ordinarius für Philosophie der Naturwissenschaften an der Berliner Humboldt-Universität, Ley, hat erst kürzlich erklärt, daß Theorien, nach denen die Zeit einen Anfang $t = 0$ hatte, im Falle ihrer Richtigkeit die Erschaffung der Welt durch Gott beweisen würden und daher mit dem dialektischen Materialismus unvereinbar seien.

2.2 Die Neuzeit

Dieses Verbot des Aristoteles blieb bestehen bis weit in die Neuzeit hinein. Wir hatten gesehen, wie vorsichtig sich Euklid beim Nachweis, daß es unendlich viele Primzahlen gibt (Teil 1., Abschnitt 2.3.1) und bei der Begründung der Geometrie (Teil 1., Abschnitt 2.3.1) ausgedrückt hat. Noch Galileo Galilei (1564 – 1642) läßt in seinem *Dialog* Salviati sagen [18, S. 144]:

Da außerdem die geradlinige Bewegung ihrer Natur nach unendlich ist – denn die gerade Linie ist unendlich und von unbestimmter Länge –, **so kann kein beweglicher Körper den natürlichen Trieb haben, sich in gerader Linie zu bewegen, wohin er unmöglich gelangen kann, insofern einer solchen Bewegung kein Ziel gesetzt ist.** Und die Natur, wie **Aristoteles** selbst sehr richtig bemerkt, versucht nicht, was unmöglich zu leisten ist, versucht also nicht dahin zu treiben, wohin zu gelangen unmöglich ist.

Andererseits hat Galilei auch erkannt, daß die „normalen“ Gesetze der Mathematik nicht mehr gelten, wenn man sich mit dem aktual Unendlichen beschäftigt [30, S. 23] [24]. In seinen *Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno a due nuove scienze, attenenti alla meccanica et i movimenti locali* (1638) hat er folgende Überlegung angestellt: Man kann die Quadratzahlen vollständig und lückenlos durchnummerieren, indem man jeder Quadratzahl ihre Wurzel zuordnet.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & \dots \end{array}$$

Jeder natürlichen Zahl entspricht eindeutig eine Quadratzahl und jeder Quadratzahl eindeutig eine natürliche Zahl. So scheint es, als ob es „genauso viele“ Quadratzahlen wie natürliche Zahlen gäbe. Andererseits gibt es natürliche Zahlen, die keine Quadratzahlen sind. Es scheint hier also eine paradoxe Situation vorzuliegen.

Man hat das 18. Jahrhundert im Hinblick auf die Wissenschaftsgeschichte als das Jahrhundert des Unendlichen bezeichnet [2, S. 10]. Tatsächlich begann man in diesem Jahrhundert, das Aristotelische Verbot der Beschäftigung mit dem aktual Unendlichen kritisch zu hinterfragen.

Ich beginne mit einer Geschichte, die mit der geometrischen Reihe zu tun hat [5, 97. Kapitel, S. 360–390]. Der Carmaldulensermonch, Guido Grandi (1671 – 1742), war von 1714 an Professor der Mathematik an der Universität Pisa. Er schrieb ein Buch, in dem er unter anderem diese Reihe untersuchte. Wenn man in der Formel

$$S = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } -1 < x < 1$$

für die Zahl x den Wert 1 einsetzt, dann erhält man auf der linken Seite die unendliche Reihe $1 + 1 + 1 + \dots$, also einen Ausdruck, der über alle Grenzen wächst. Auf der rechten Seite erhält man den Ausdruck $\frac{1}{1-1} = \frac{1}{0}$. Beide Ausdrücke sind nicht besonders sinnvoll, man könnte – mit etwas Gewalt – sagen, daß beide Ausdrücke eine „unendliche Größe“ darstellten.

Anders wird es, wenn man $x = -1$ setzt. Man erhält

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}.$$

Wenn man den Ausdruck auf der linken Seite etwas anders interpretiert, dann erhält man

$$\underbrace{1-1}_{=0} + \underbrace{1-1}_{=0} + \underbrace{1-1}_{=0} + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0.$$

Man könnte noch weitere Experimente mit dieser Reihe anstellen und würde dann noch andere „Reihenwerte“ erhalten. Grandi jedenfalls hielt dieses Phänomen – in einer Interpretation erhält man 0 als Reihensumme, also Nichts, in einer anderen aber $\frac{1}{2}$, also einen positiven Wert – als einen Beweis für die Möglichkeit der Schöpfung aus dem Nichts.

Zum „Beweis“, daß der Wert $\frac{1}{2}$ der „wahre“ Wert der Reihe sei, führte Grandi eine kleine Geschichte an. [5, S. 366]

Ein Vater hinterläßt zwei Söhnen einen werthvollen Edelstein, der abwechselnd je ein Jahr in dem Besitze eines jeden von beiden bleiben solle, ohne veräußert werden zu dürfen; dann gehöre er tatsächlich jedem zur Hälfte, während dessen Besitzrecht durch die Reihe $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ dargestellt werde.

Diese Geschichte ist recht hübsch, aber kaum schlüssig. Wenn man mit Marx Gebrauchswert und Tauschwert unterscheidet, dann kann man zunächst sagen, daß der Gebrauchswert unter Umständen viel geringer sein kann als $\frac{1}{2}$. Nehmen wir an, der eine Bruder habe eine Ehefrau, die den Stein zerlegen lassen möchte, um daraus ein geschmackvolles Collier fertigen zu lassen. Der andere Bruder hat eine Geliebte mit einem mehr holzgeschnitzten Geschmack, und diese möchte den Stein in einem Stück schleifen und fassen lassen, damit sie ihn sich als auffallenden Schmuck um den Hals hängen kann. Beide Wünsche sind unvereinbar, der Gebrauchswert des Steines ist also für beide Brüder stark eingeschränkt. Was den Tauschwert anbelangt: Um welchen Betrag könnte man einen Stein beleihen, wenn klar ist, daß man ihn am Ende des Jahres nicht mehr besitzt? Unabhängig davon sträubt sich mir als Mathematiker doch das Nackenfell bei dem Gedanken, daß eine mathematische Frage von einem Nachlaßgericht entschieden werden soll!

Um diese Argumentation Grandis entspann sich eine heftige Diskussion, die im ganzen gelehrten Europa geführt wurde. Insbesondere äußerte sich der bedeutende Gelehrte Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), aber auch Christian Wolff (1679 – 1754), Pierre de Varignon (1654 – 1722) und andere schalteten sich ein. Ein Gegenstand der Diskussion war die Frage, welchen „Wert“ die Grandische unendliche Reihe „in Wirklichkeit“ habe. Leibniz argumentierte wie folgt [5, S. 366 f.]:

Die unendliche Anzahl der Reihenglieder könne nur grad oder ungrad sein. Sei sie grad, so entstehe 0 als Reihensumme, 1 dagegen, wenn die Gliederzahl ungrad ist. Da aber kein Vernunftgrund für das vorzugsweise Gradsein oder für das vorzugsweise Ungradsein der Gliederzahl geltend gemacht werden könne, so geschehe es durch

wunderbare Eigenart der Natur¹⁰⁾, dass beim Uebergang vom Endlichen zum Unendlichen zugleich ein Uebergang von dem Disjunctiven, welches aufhöre, zu dem Bleibenden, welches in der Mitte zwischen dem Disjunctiven liege, stattfinde. Wie die Wahrscheinlichkeitsrechnung vorschreibe, man habe das arithmetische Mittel, d. h. die Hälfte der Summe gleich leicht erreichbarer Grössen in Rechnung zu ziehen, so beobachte hier die Natur der Dinge das gleiche Gesetz der Gerechtigkeit. Diese Art zu schliessen sei freilich mehr metaphysisch als mathematisch, aber dennoch sicher, wie denn überhaupt die Anwendung der Vorschriften der wahren Metaphysik in der Mathematik, in der Analysis, in der Geometrie sogar weit häufiger von Nutzen sei, als man gemeinhin glaube. Die Natur, so sagt Leibniz in einem an Grandi gerichteten Briefe, schreibe den Dingen das Gesetz der Continuität vor, und dessen Anwendung führe niemals irre, wenn es auch hier nicht auf strenger Beweisführung, sondern auf Gründen des Uebereinkommens²⁾ beruhe, dass man sagen dürfe, Gott selbst habe auf das Stetigkeitsgesetz Rücksicht genommen. Hier greift Leibniz auf Dinge, welche er, wie wir uns erinnern (S. 277), am Anfange des Jahrhunderts öffentlich zu vertheidigen gehabt hatte.

Interessant ist, daß Leibniz auf sein Stetigkeitsgesetz – oder besser sein Stetigkeitspostulat – Bezug nimmt. Dieses lautet [5, S. 277]:

Wenn das zwei Aufgaben von einander Unterscheidende *in datis*, d. h. in dem, was als bekannt angenommen ist, kleiner als jede gegebene Grösse gemacht werden kann, so kann es auch *in quaesitis*, d. h. in dem, was herauskommt, kleiner als jede gegebene Grösse gemacht werden. Oder um einfacher zu reden, wenn die Voraussetzungen (das Gegebene) sich einander beständig nähern und sich schließlich in einander verlieren, so müssen die Folgen, das was herauskommt (oder das Gesuchte) das Gleiche thun.

Nach diesem Gesetz folgerte Leibniz, daß man sich bei der geometrischen Reihe dem Wert $x = -1$ nähern darf, und man erhält

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{1}{1 - x}$$

für $x \rightarrow -1$

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}.$$

Es bedarf keiner Erwähnung, daß eine solche Schlußweise in der heutigen Mathematik nicht erlaubt ist.

3 Die Infinitesimalrechnung

Eine bedeutende Erfindung, die auf Leibniz und auf Isaac Newton (1643 – 1727) zurückgeht, ist die Differentialrechnung. Einstein bezeichnete diese als „... vielleicht der größte gedankliche Schritt, den zu tun einem Menschen je vergönnt war.“ [15, S. 160].

¹⁰⁾ *admirabili naturae ingenio.*

²⁾ *convenientiae rationibus.*

Für die Theorie der mechanischen Bewegung benötigten Newton und Leibniz eine Präzisierung der Begriffe „Geschwindigkeit“ (und „Beschleunigung“). Für uns ist dies schwer vorstellbar, da wir – durch den Kraftfahrzeugverkehr – alltäglich mit derlei Begriffen umgehen. Wenn meine Frau und ich mit einem Kraftfahrzeug nach München fahren – es sind dies ziemlich genau 800 km – dann benötigen wir dazu etwa 8 Stunden. Bezeichnen wir die Wegdifferenz (Kilometerstand München – Kilometerstand Hamburg) mit Δs und die Zeitdifferenz (Uhrenstand München – Uhrenstand Hamburg) mit Δt , dann ist unsere Durchschnittsgeschwindigkeit

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{800 \text{ Kilometer}}{8 \text{ Stunden}} = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Die so erhaltene Durchschnittsgeschwindigkeit ist nur ein grobes Maß für die tatsächlich gefahrene Geschwindigkeit, zum Beispiel enthält die angegebene Zeit eine Mittagspause, Baustellenverkehr und Strecken, auf denen wir wesentlich schneller fahren. Will man es genauer haben, dann muß man für geeignete Teilstrecken Δs die erforderlichen Zeiten Δt ermitteln. Man weiß, daß die weißen Begrenzungspfähle an der Autobahn 500 m voneinander entfernt sind. Benötige ich von einem dieser Pfähle zum nächsten gerade 15 Sekunden, dann ist meine Durchschnittsgeschwindigkeit auf dieser Strecke $\Delta s/\Delta t = 500 \text{ m}/15 \text{ s} = 0.5 \text{ km}/(15/3600 \text{ s}) = 120 \text{ km/h}$. Der Begriff der Durchschnittsgeschwindigkeit hat den Nachteil, daß man für eine vollständige Angabe immer noch die Wegstrecke beziehungsweise das Zeitintervall, auf die sich die Angabe bezieht, hinzufügen muß. Leibniz und Newton hatten daher die Idee, die Geschwindigkeit für „kleine“ Zeitintervalle – im Extremfall für das Zeitintervall Null anzugeben. Ein solches Zeitintervall Null nennen Leibniz und Newton ein *infinitesimales* Zeitintervall. Was dies nun genau sein soll, blieb im Dunklen. Newton schreibt in seiner berühmten *Philosophiae naturalis principia mathematica* von 1686 (*Liber primus, de motu corporum*) sehr wortreich, aber wenig erhellend (zitiert nach [35, S. 9 f.]):

Man kann den Einwand machen, daß es kein letztes Verhältnis verschwindender Größen gebe, indem dasselbe vor dem Verschwinden nicht das letzte sei, nach dem Verschwinden aber überhaupt kein Verhältnis mehr bestehe. Aus demselben Grunde könnte man aber auch behaupten, daß ein nach einem bestimmten Orte strebender Körper keine letzte Geschwindigkeit habe; diese sei, bevor er den bestimmten Ort erreicht habe, nicht mehr die letzte, nachdem er ihn erreicht hat, existiere sie gar nicht mehr. Die Antwort ist leicht. Unter der letzten Geschwindigkeit versteht man diejenige, mit welcher der Körper sich weder bewegt, ehe er den letzten Ort erreicht und die Bewegung aufhört, noch die nachher stattfindende, sondern in dem Augenblick, wo er den Ort erreicht, ist es die letzte Geschwindigkeit selbst, mit welcher der Körper den Ort berührt und mit welcher die Bewegung endigt. Auf gleiche Weise hat man unter dem letzten Verhältnis verschwindender Größen dasjenige zu verstehen, mit welchem sie verschwinden, nicht aber das vor oder nach dem Verschwinden bestehende. Ebenso ist das erste Verhältnis entstehender Größen dasjenige, mit welchem sie entstehen; die erste und letzte Summe diejenige, mit welcher sie anfangen oder aufhören zu sein (entweder größer oder kleiner zu werden). Es existiert eine Grenze, welche die Geschwindigkeit am Ende der Bewegung erreiche, nicht aber überschreiten kann; dies ist die letzte Geschwindigkeit. Dasselbe gilt von der Grenze aller anfangenden und aufhörenden Größen und Proportionen. Da diese Grenze fest und bestimmt ist, so ist es eine wahrhaft mathematische Aufgabe, sie aufzusuchen.

Man stelle sich vor, daß dieser reichlich nebulöse Text von einem Anwalt vorgetragen werde in einem Verfahren wegen Überschreitung einer Geschwindigkeitsbeschränkung auf der Autobahn! In dem mathematischen Lexikon von Wolff aus dem Jahre 1734 findet man zu dem Stichwort „Infinitesima“ [37]:

INFINITESIMA, wird in der Mathesi eine Grösse genennet, welche so klein ist, daß man keine kleinere sich einbilden kan; dergleichen das Punctum Mathematicum ist. Denn so man eine Linie in verschiedenen Puncten getheilt zu seyn sich gedencket, also, daß sie nunmehr in etliche Stücke zerschnitten, so wird sie doch dadurch an ihrer Länge nichts verlieren, sondern diese einzelen Theile, wenn sie wieder an einander gesetzet werden, müssen zusammen genommen eben die gantze Linie ohne einigen Abgang oder Verkürzung ausmachen. Siehe **Differential-Grösse**; ingleichen **Unendlich kleine Grösse**.

Wir wollen uns diese mysteriösen *Infinitesima* an einem Beispiel ansehen. Ein normaler Mittelklassewagen beschleunigt in 10 s auf 100 km/h. Wir nehmen an, wir hätten bei einem Beschleunigungsexperiment für jede Sekunde den zurückgelegten Weg des Wagens gemessen. Dann hätten wir etwa die folgenden Zahlen erhalten:

Zeit (s)	Weg (m)
1	1.39
2	5.56
3	12.50
4	22.22
5	34.72
6	50.00
7	68.06
8	88.89
9	112.50
10	138.89

Wir lernen in der angewandten Mathematik, aus solchen Meßreihen das zugrundeliegende mathematische Gesetz herzuleiten. Dieses ergibt sich wie folgt (wir messen zweckmäßigerweise den zurückgelegten Weg in km und die Zeit in Sekunden):

$$s(t) := \text{Weg (km)} = \frac{3\,600^2}{720} \times t^2 = 18\,000 \times t^2.$$

Wir wollen nun aus dieser Formel die Geschwindigkeit $v(t)$ im Zeitpunkt t errechnen. Dazu nehmen wir ein infinitesimales Zeitlelement dt her und berechnen die gesuchte Geschwindigkeit ganz wie oben am Beispiel der Fahrt nach München als die Wegdifferenz (nach Formel) die zur Zeitdifferenz $dt = [(t + dt) - t]$ gehört:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{s(t + dt) - s(t)}{dt} = \frac{18\,000 \cdot (t + dt)^2 - 18\,000 \cdot t^2}{dt} = \\ &= \frac{18\,000 \cdot t^2 + 2 \cdot 18\,000 \cdot t \cdot dt + 18\,000 \cdot dt^2 - 18\,000 \cdot t^2}{dt} = \\ &= 2 \cdot 18\,000 \cdot t + 18\,000 \cdot dt = 2 \cdot 18\,000 \cdot t \end{aligned}$$

Es ergibt sich nun in der Tat für $t = 10 \text{ s} = \frac{1}{360} \text{ h}$ eine Geschwindigkeit von $v\left(\frac{1}{360}\right) = 2 \cdot \frac{18\,000}{360} = 100 \text{ km/h}$. Zu dem Rechengang, der zu der Momentangeschwindigkeit führte, ist anzumerken, daß eine Division der Form gewöhnliche Zahl/Infinitesimalzahl nicht erlaubt sein kann (es sei denn, die gewöhnliche Zahl ist gleich Null), das Resultat einer Division durch eine Zahl, „welche so klein ist, daß man keine kleinere sich einbilden kan“ wäre so groß, daß man keinen größeren Wert sich einbilden kann. Wir hatten aber bei der eben ausgeführten Rechnung „Glück“, die kritische

Größe dt hat sich weggekürzt. Beim letzten Schritt haben wir ausgenutzt, daß $18\,000 \cdot dt$ beliebig klein ist, also weggelassen werden kann.

Die infinitesimale Größe dt spielt bei der Rechnung eine sehr eignartige Rolle. Sie taucht anscheinend aus einem anderen Universum auf, für sie gelten eigene Rechenregeln, die mit unserer Logik nicht vereinbar sind. Zum Schluß verschwindet sie wieder in ihrem Universum, sie spielt eine ähnliche Rolle wie ein Katalysator in der Chemie: Sie bewirkt, daß die Momentangeschwindigkeit „vernünftig“ definiert werden kann und scheidet dann unverändert aus der Argumentation wieder aus.

Wir haben also jetzt, wie gewünscht, einerseits eine Zahlenangabe für die „momentane“ Geschwindigkeit, die auch ohne Angabe eines Meßintervalls sinnvoll ist, allerdings um den Preis der Einführung der reichlich mysteriösen infinitesimalen Größen.

Leibniz wird häufig als der große Universalgelehrte bezeichnet. Diese Charakterisierung ist wahrer, als man gemeinhin denkt. Leibnizens Universalität drückt sich darin aus, daß für ihn die Gebiete Mathematik, Naturwissenschaft, Philosophie und Theologie ein Ganzes bilden. Er scheut sich nicht, wie wir gesehen haben, einen mathematischen Sachverhalt metaphysisch zu begründen, und auch bei der Infinitesimalrechnung geht er philosophisch oder metaphysisch vor. Es wurde von verschiedenen Autoren darauf hingewiesen, daß ein enger Zusammenhang zwischen der Infinitesimalrechnung und der Monadologie bestehe (vgl. etwa [17, S. 114 f.]). Rein äußerlich haben die Monaden die Eigenschaft, keine Ausdehnung zu besitzen wie die Infinitesimalen [26]:

§. 3. Wo nun keine Teile vorhanden sind / daselbst kann auch weder eine Ausdehnung in die Länge / Breite und Tiefe / noch eine Figur / noch eine Zerteilung möglich seyn. Und diese Monaden sind die wahrhaften Atomi der Natur und mit einem Worte / die *Elemente derer Dinge*.

Natürlich sollte man die Analogie nicht zu weit treiben, aber es ist durchaus vorstellbar, daß Leibniz bei seinen Monaden von den infinitesimalen Größen inspiriert wurde und umgekehrt.

Wir haben bei der Einführung der infinitesimalen Größen das Problem, daß nicht ganz klar ist, ob mit diesen Größen auch immer sinnvoll gerechnet werden kann. Zu Leibnizens und Newtons Zeit war dies eine außerordentlich kühne Idee. Der Mathematiker, Theologe und Philosoph George Berkeley (1685 – 1753) kritisierte das Konzept des Infinitesimalen in seiner Schrift *The Analyst* von 1734 [2]. Berkeley hat Newton – beziehungsweise die Newtonianer – in verschiedenen Punkten heftig bekämpft. Einmal kritisierte er die Einführung des absoluten Raumes in der Newtonschen Gravitationstheorie, und wir wissen seit Einstein, daß diese Kritik durchaus berechtigt war. In einer seiner ersten Arbeiten hatte er die Theorie der visuellen Wahrnehmung, die sich auf Newtons *Opticks* (1704) gründete, angegriffen [3], und wir wissen heute, daß diese Angriffe ebenfalls nicht unbegründet waren, ebensowenig wie die Wahrnehmungskritik des Parmenides. Schließlich gab Berkeley im *Analyst* zu bedenken, daß die Definition der infinitesimalen Größen widersprüchlich sei. Eine logische Theorie, die auch nur einen Widerspruch enthält, ist aber wertlos. Der Untertitel des *Analyst* lautet ironisch-polemisch [2, S. 81]:

Eine an einen ungläubigen Mathematiker gerichtete Abhandlung, in der geprüft wird, ob der Gegenstand, die Prinzipien und die Folgerungen der modernen Analysis deutlicher erfaßt und klarer hergeleitet sind als religiöse Geheimnisse und Glaubenssätze.

Aller Kritik hatten die Anhänger der Newtonschen Mechanik ein gewichtiges und unwiderlegliches Argument entgegenzusetzen: Diese „erklärte“ die Vielzahl der Erscheinungen – vom Galileischen

freien Fall und der Bewegung einer Kugel auf einer schiefen Ebene über die Stoßgesetze bis hin zu den Planetenbewegungen – vermöge einer einfachen Theorie, die aus wenigen Prinzipien herleitbar war mit einer Genauigkeit, die im Falle astronomischer Phänomene sprichwörtlich geworden ist. Am 15. Oktober 1997 wurde auf Cape Canaveral *Cassini/Huygens*, ein gemeinsames Projekt von NASA, ESA und ASI gestartet. Im Juli 2004 kam die Raumsonde nach knapp 7 Jahren Anflug im Saturnsystem an und liefert seither interessante Bilder und Meßdaten vom Saturn, seinen Ringen und seinen über 30 Monden. Am 14. Januar 2005 trat die von den Europäern gebaute Abstiegs-sonde *Huygens* in die Atmosphäre des größten Saturnmondes Titan ein und hat vor Ort diese erstaunliche Atmosphäre erforscht, in der bereits organische Moleküle nachgewiesen wurden. Die außerordentlich trickreiche Flugbahn dieses Raumfahrtunternehmens beruht ebenfalls auf Newtons Theorie. Dieses Unternehmen erforderte extreme Präzision bei der Berechnung der Bahn, und diese wurde erreicht auf der Grundlage der vor über dreihundert Jahren formulierten Newtonschen Gesetze!

Nach diesen Gesetzen war der gesamte Ablauf des *Cassini/Huygens* Raumfahrtunternehmens völlig festgelegt durch Angabe der Position und der Geschwindigkeit des Flugkörpers zum Startzeitpunkt – und natürlich noch durch die Bewegungen der Planeten und auch durch den Treibstoffverbrauch während des Fluges. Wir haben hier eine Situation, die der des Pfeil-Paradoxons von Zeno völlig gleicht. Die Startgeschwindigkeit, die durch Untersuchungen und Messungen zu einem festen Zeitpunkt nicht feststellbar ist, ist das fehlende Datum, welches die Bewegung beschreibt. Wir haben aber gesehen, daß die Grundlegung dieses Begriffes nicht trivial ist.

Das Problem der Begründung der Infinitesimalrechnung blieb bis ins neunzehnte Jahrhundert offen. Es ist interessant, daß sogar Karl Marx um 1850 drei vergebliche Versuche unternahm, die Infinitesimalrechnung „dialektisch“ zu begründen [28]. Eine strenge Grundlegung wurde von Augustin-Louis Cauchy (1798–1857) im Jahre 1821 in dem (*Cours d'Analyse*) und später von Richard Dedekind (1831 – 1916) in seiner Schrift *Was sind und was sollen die Zahlen* (1888) sowie von Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815–1897) gegeben. Diese Begründung ist allerdings nicht einfach, und unsere Studenten haben erhebliche begriffliche Schwierigkeiten mit den Grundlagen der Analysis.

In den letzten Jahrzehnten hat sich ein Zweig der Mathematik etabliert, in dem die infinitesimalen Größen von Leibniz und Newton widerspruchsfrei begründet werden, die sogenannte *Nicht-Standard-Analysis* [11, 29]. Es ist hier nicht der Ort, auf diese Theorie einzugehen. Jeder „Standard-Zahl“ wird eine „Wolke“ von Nicht-Standard-Zahlen zugeordnet, die wie „Quantenfluktuationen“ unsichtbar die Zahl umschwirren. Aus der Nicht-Standard-Analysis wurde eine „Lösung von Zenons Paradoxien“ hergeleitet [29], diese „Lösung“ vermag allerdings auch nicht recht zu überzeugen.

4 Angriff auf das aktual Unendliche

Die erste erfolgreiche Auseinandersetzung mit dem aktual Unendlichen erfolgte durch Bernardus Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781 – 1848), einem Theologen, der in der Metternichschen „Demagogenverfolgung“ Lehrverbot erhielt und sich daraufhin vollständig der Mathematik widmete. Er schrieb das Buch *Paradoxien des Unendlichen* [4], in dem er sowohl theologische als auch mathematische Probleme bei der Befassung mit dem Unendlichen untersuchte. Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845 – 1918) gelang dann schließlich ein entscheidender Einbruch in das Reich des Unendlichen.

Cantor nannte eine Menge *abzählbar*, wenn ihre Elemente den natürlichen Zahlen umkehrbar

eindeutig zugeordnet werden können, wenn man also diese Elemente lückenlos und vollständig mittels der natürlichen Zahlen durchnummerieren kann.

Ein erstes unerwartetes Resultat von Georg Cantor war, daß die Menge aller rationalen Zahlen, also aller Brüche, die zwischen 0 und 1 liegen, abzählbar ist. Diese Aussage ist insofern unerwartet, als man annehmen möchte, es gebe „sehr viel mehr“ rationale Zahlen als natürliche Zahlen. Zum Beweis gab Cantor eine explizite Numerierung der Brüche an. Er ordnete die (gekürzten) Brüche nach aufsteigenden Nennern und bei gleichem Nenner nach aufsteigenden Zählern. Hierbei werden alle Doppelnennungen weggelassen, so daß neben $\frac{1}{2}$ nicht auch noch $\frac{2}{4}$ auftritt:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	...

Man fragt sich nun, ob man auch alle Brüche, also nicht nur die zwischen 0 und 1, durchnummerieren kann. Dies geht, es ist nur etwas komplizierter. Man schreibt alle rationalen Zahlen zwischen 0 und 1 in eine (unendliche) Zeile. In die zweite Zeile schreibt man alle Zahlen zwischen 1 und 2 und so weiter.

0	$\rightarrow$	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$	$\rightarrow$	$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{4}$	$\rightarrow$	$\frac{3}{4}$	...
	$\swarrow$		$\searrow$		$\swarrow$		$\searrow$		$\swarrow$		
1		$1 + \frac{1}{2}$		$1 + \frac{1}{3}$		$1 + \frac{2}{3}$		$1 + \frac{1}{4}$		$1 + \frac{3}{4}$	...
$\downarrow$	$\swarrow$		$\swarrow$		$\swarrow$		$\swarrow$		$\swarrow$		
2		$2 + \frac{1}{2}$		$2 + \frac{1}{3}$		$2 + \frac{2}{3}$		$2 + \frac{1}{4}$		$2 + \frac{3}{4}$	...
	$\swarrow$		$\swarrow$		$\swarrow$		$\swarrow$		$\swarrow$		
3		$3 + \frac{1}{2}$		$3 + \frac{1}{3}$		$3 + \frac{2}{3}$		$3 + \frac{1}{4}$		$3 + \frac{3}{4}$	...
$\downarrow$	$\swarrow$		$\swarrow$		$\swarrow$		$\swarrow$		$\swarrow$		
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	

Wenn man dieses Schema so durchnumeriert, wie durch die Pfeile angedeutet, dann erhält jeder Bruch eine wohldefinierte Nummer und die Abzählung ist tatsächlich hergestellt.

Das wichtigste Resultat Cantors war jedoch der Nachweis, daß die Menge aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 nicht abzählbar ist. Dazu denkt man sich diese Zahlen als Dezimalbrüche dargestellt. Jeder solche Bruch beginnt mit $0.\dots$, gefolgt von einer endlichen oder unendlichen Anzahl von Dezimalziffern. Wir nehmen nun an, alle diese Ziffern ließen sich abzählen. Dann könnte man sie in einer (unendlichen) Liste niedergelegt denken. Sind $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ die durchnumerierten Zahlen, dann könnte die Liste etwa so aussehen, wobei die a_{ij} die Ziffern der Dezimaldarstellung von α_i seien:

$$\begin{array}{rcl}
 \alpha_1 & = & 0. a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ a_{14} \ a_{15} \ \dots \\
 \alpha_2 & = & 0. a_{21} \ a_{22} \ a_{23} \ a_{24} \ a_{25} \ \dots \\
 \alpha_3 & = & 0. a_{31} \ a_{32} \ a_{33} \ a_{34} \ a_{35} \ \dots \\
 \alpha_4 & = & 0. a_{41} \ a_{42} \ a_{43} \ a_{44} \ a_{45} \ \dots \\
 \alpha_5 & = & 0. a_{51} \ a_{52} \ a_{53} \ a_{54} \ a_{55} \ \dots \\
 & & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots
 \end{array}$$

Man konstruiert nun eine Dezimalzahl $\beta = 0.b_1 b_2 b_3 \dots$ wie folgt

Wenn $a_{ii} = 1$ ist, dann wird $b_i = 2$ gesetzt,
Wenn $a_{ii} \neq 1$ ist, dann wird $b_i = 1$ gesetzt.

Auf diese Weise ist sichergestellt, daß β von jedem α_i aus der Liste verschieden ist. Wir haben also die Annahme, die Liste enthalte **alle** Dezimaldarstellungen reeller Zahlen, durch Angabe einer Dezimalzahl, die nicht in der Liste enthalten ist, *ad absurdum* geführt.

Diese Beweismethode bezeichnet man als das *Cantorsche Diagonalverfahren*. Wir hatten in der vierten Veranstaltung gesehen, wie sich Alan Turing dieses Verfahrens bedient hat, um zu zeigen, daß nicht jede zahlentheoretische Funktion algorithmisch berechenbar ist.

Georg Cantor verwandte den Rest seines Lebens vergeblich auf die Lösung eines Problems, welches als das *Kontinuumproblem* bezeichnet wird. Es handelt sich um die Frage, ob es Mengen gibt, die nicht abzählbar sind, die aber nicht ausreichen, um die Menge der reellen Zahlen, die auch als das *Kontinuum* bezeichnet wird, durchzunummerieren, das heißt, ob es zwischen der Menge der natürlichen Zahlen und der Menge der reellen Zahlen noch eine „Zwischengröße“ gibt. Die Antwort auf die Cantorsche Frage war, wie vieles in der Mathematik, überraschend. Im Jahre 1938 hatte Gödel gezeigt [20], daß einem widerspruchsfreien und vollständigen Axiomensystem der Mengenlehre die Aussage, daß es keine „Zwischengröße“ gibt, als Axiom hinzufügen kann, ohne daß dabei Widersprüche auftreten würden. Diese Aussage ist recht pikant, denn man kennt kein widerspruchsfreies und vollständiges Axiomensystem der Mengenlehre.

Im Jahre 1963 publizierte Paul Joseph Cohen (1934 – 2007) zwei Arbeiten [9, 10], in denen er zeigte, daß es ebenfalls keine Widersprüche geben würde, wenn man dem Axiomensystem der Mengenlehre eines hinzufügte, welches die Existenz einer „Zwischengröße“ postulierte. Dieses Resultat ist verwirrend. Offenbar würde sich unsere Mathematik nicht ändern, wenn wir die *Kontinuumshypothese*, nämlich daß es keine „Zwischengröße“ gebe, als Axiom einführen oder ob wir die Negation der Kontinuumshypothese forderten. Die Frage ist: Wie ist es denn nun „in Wirklichkeit“? Eine solche Frage läßt sich nur dann stellen, wenn man weiß, was die „Wirklichkeit“ mathematischer Konstrukte ist. In der marxistischen Philosophie wurde diese Frage sehr ernst genommen, denn Friedrich Engels hat apodiktisch erklärt [16, S. 44]:

Keineswegs aber befaßt sich in der reinen Mathematik der Verstand bloß mit seinen eignen Schöpfungen und Imaginationen. Die Begriffe von Zahl und Figur sind nirgends anders hergenommen, als aus der wirklichen Welt. Die zehn Finger, an denen die Menschen zählen, also die erste arithmetische Operation vollziehen gelernt haben, sind alles andre, nur nicht freie Schöpfungen des Verstandes. Zum Zählen gehören nicht nur zählbare Gegenstände, sondern auch schon die Fähigkeit, bei Betrachtung dieser Gegenstände von allen ihren übrigen Eigenschaften abzusehn außer ihrer Zahl — und diese Fähigkeit ist das Ergebnis einer langen geschichtlichen, erfahrungsmäßigen Entwicklung. Wie der Begriff Zahl, so ist der Begriff Figur ausschließlich der Außenwelt entlehnt, nicht im Kopf aus dem reinen Denken entsprungen. Es mußte Dinge geben, die Gestalt hatten und deren Gestalten man verglich, ehe man auf den den Begriff Figur kommen konnte. Die reine Mathematik hat zum Gegenstand die Raumformen und Quantitätsverhältnisse der wirklichen Welt, also einen sehr realen Stoff.

Demnach müssen die Konstrukte der Mathematik Realitätsbezug haben. Ein marxistischer Philosoph, der sich besonders mit den Grundlagenproblemen der Mathematik befaßt hat, schreibt hierzu [22, S. 247]:

Die bereits beim mengentheoretischen Aufbau der Mathematik erwähnten Ergebnisse von K. Gödel und P. Cohen besagen, daß die Kontinuumshypothese aus den üblichen Axiomen der Mengenlehre – wenn aus ihnen kein Widerspruch folgt – weder beweisbar noch widerlegbar ist. Dieses Resultat gestattet, zwei Konsequenzen zu ziehen. Wer in der Mathematik mehr eine Wissenschaft des Möglichen sieht, wird auf eine Verzweigung der Mathematik infolge Bejahung oder Verneinung der Kontinuumshypothese schließen. Wer dagegen die Mathematik als eine – wenn auch sehr abstrakte – Wissenschaft des Wirklichen auffaßt, der wird den Schluß ziehen, daß auf Grund der üblichen Axiome der Mengenlehre allein noch nicht auf die Existenz aller möglichen Teilmengen der Menge der natürlichen Zahlen geschlossen werden kann, so daß die Kardinalzahl oder Mächtigkeit des Kontinuums so lange unbestimmt bleibt, so lange nicht weitere Axiome zur Bildung von Mengen, insbesondere von Teilmengen, zu den üblichen Axiomen der Mengenlehre hinzugenommen werden. Bei der Aufstellung derartiger Axiome werden dann – wie bei der Aufstellung jedes Axiomensystems – anschauliche Vorstellungen, insbesondere weltanschauliche Vorstellungen, eine bedeutende Rolle spielen.

Dies ist eine interessante Sichtweise. Welche „weltanschaulichen Vorstellungen“ könnten dies sein? Könnte das irgendwann bedeuten, daß zum Beispiel die Anhänger der „fortschrittlichen“ Vorstellungen – was auch immer „Fortschritt“ sein mag – die Kontinuumshypothese für wahr halten, während in „reaktionären“ Gesellschaftssystemen die Kontinuumshypothese falsch wäre? Stellen wir uns eine mathematische Tagung in einer sehr fernen Zukunft vor. Ein „reaktionärer“ Mathematiker trägt über einen konstruktiven Beweis vor, mit dem man eine Menge der „Zwischengröße“ explizit darstellen kann. Für den „fortschrittlichen“ Zuhörer führt dies zu einem logischen Widerspruch mit allen in der vierten Veranstaltung gezeigten Konsequenzen. Was nun?

5 Paradoxien des Unendlichen

Trotz aller Bemühungen der Mathematiker verbleiben noch zahlreiche Paradoxa, wenn man sich dem Unendlichen nähert. Einige dieser Paradoxien findet man in dem Heft *Das Unendliche* von *Spektrum der Wissenschaft* [36]. Ein sehr bekanntes Paradoxon zeigt, was bei unendlich komplizierter Aufteilung der Materie geschehen kann.

Das Banach–Tarski–Paradox ¹⁾ Im Jahre 1924 publizierten die beiden bedeutenden Mathematiker Stefan Banach (1892 – 1945) und Alfred Tarski (1901 – 1983) eine Arbeit [1], in der ein sehr schwer verständliches Resultat bewiesen wurde. Zum Verständnis stellen wir uns „mathematische Materie“ vor, die unbegrenzt und beliebig genau unterteilbar sei. Banach und Tarski bewiesen nun, daß man etwa eine Kugel aus diesem Material so in endlich viele Teilstücke zerlegen kann, daß man aus diesen zwei der Ausgangskugel gleichgroße Kugeln zusammensetzen kann. Hierbei wird kein Zaubertrick benutzt, indem man etwa zwei Hohlkugeln herstellt, beide Kugeln sind vollgewichtig und der Ausgangskugel absolut gleichwertig. Es ist ganz klar, daß diese Zerlegung recht bizarr sein muß, sie muß „im Kleinen“ immer komplizierter werden. Gegen diese Teilstücke müßte sich ein Fraktal, welches üblicherweise als Synonym von Chaos gesehen wird, wie ein gewöhnlicher Dominostein wirken. Lassen wir einige Vertreter verschiedener Wissenschaften zu Wort kommen:

¹⁾Siehe hierzu auch [13]

Der Mathematiker wird nicht recht einsehen, was an diesem Beispiel bemerkenswert ist. Der Begriff des Rauminhalts, der hier eine Rolle spielt, gilt nur für simple Körper wie Quader, Pyramide oder Kugel, hat aber nachweislich keinen Sinn für Mengen, die hier zu betrachten sind. Damit ist das Beispiel ein hübsches Gegenbeispiel dafür, daß man mit dem Begriff „Rauminhalt“ eben vorsichtig sein muß.

Der Physiker wird dieses Beispiel für eine typische Mathematikerspielerei halten. Da die Materie atomar strukturiert ist, läßt sich eine solche Zerlegung einer Kugel niemals ausführen, und das Beispiel hat keinerlei Bedeutung in der objektiven Realität der Physik (und des Alltags).

Der Theologe würde hier vielleicht darauf hinweisen, daß Gott die Materie in weiser Voraussicht atomar strukturiert geschaffen habe, um frivolen Spielereien der Mathematiker einen Riegel vorzuschieben.

Der Ingenieur würde den drei genannten Wissenschaftlern aufmerksam zuhören und dann von dem Mathematiker das „Schnittmuster“ der Zerlegung erbitten. Er würde zugeben, daß man die Zerlegung niemals exakt ausführen könne, aber wenn es gelänge, sie wenigstens näherungsweise auszuführen, dann würde man eben nicht zwei Kugeln, sondern vielleicht nur anderthalb Kugeln erhalten. Wenn die Ausgangskugel aus Gold besteht, dann bestände vielleicht die Möglichkeit, aus dieser Zerlegung doch noch Kapital zu schlagen. Wenn der Physiker hier einwendet, daß nennenswerte Effekte erst bei einer Zerlegung, deren Details kleiner sind als ein Zehntel des Atomdurchmessers, auftreten würden, dann würde dies den Ingenieur auch nicht schrecken. Er wählt dann eben seine Ausgangskugel hundertmal so groß! Eine humorvolle Darstellung der Situation findet man in [12].

Der Naturphilosoph würde einwenden: „Selbst wenn die Kugel größer wäre als das bekannte Universum, so dürfte doch nach der Zerlegung und dem Zusammenbau auch nicht ein einziges Atom übrigbleiben. Es kann und darf nicht sein, daß das fundamentale Gesetz der Massenerhaltung durch simple geometrische Tricks außer Kraft gesetzt wird!“

Der Mathematiker indessen ist seit der Bitte des Ingenieurs ein wenig verlegen geworden. Eine Pointe der Geschichte ist nämlich, daß Banach und Tarski die Zerlegung nicht angeben konnten. Sie konnten nur zeigen, daß es eine solche Zerlegung **gibt**. Es besteht Grund zu der Annahme, daß eine solche Zerlegung auch niemals angegeben werden kann! Die Teile, in die man die Kugel zerlegen müßte wären unvorstellbar kompliziert, gegen sie würde ein Fraktal wie ein simpler Ziegelstein wirken. Die Kompliziertheit der Teile wirkt sich allerdings im unendlich kleinen Detail aus.

Man kann versuchen, eine Mathematik zu treiben, die frei von den Paradoxa des Unendlichen ist. Ein solcher Versuch wurde von Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881 – 1966) unter der Bezeichnung *Intuitionismus* ausgeführt. Die Intuitionisten erkennen nur das als existent an, was konstruktiv herstellbar ist. Auf diese Weise haben sie ein komplexes Gebäude errichtet, dabei kamen sie zu wichtigen Resultaten und Einsichten über die Mathematik. Allerdings sind nur wenige Mathematiker bereit, eine solche Amputation vorzunehmen, wir würden unsere liebsten und faszinierendsten Spielzeuge verlieren. Zudem, wie wir am Beispiel der Infinitesimalrechnung gesehen haben, sind es häufig Notwendigkeiten der physikalischen Modellierung, die uns zur Befassung mit dem Unendlichen zwingen. David Hilbert (1862 – 1943) formulierte in einem Aufsatz *Über das Unendliche* im Jahre 1926 [23, S. 170]:

Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können.

Hier schließt sich der Kreis zu dem in der ersten Veranstaltung vorgestellten Paradoxa des Zenon von Elea (Abschnitt 2.2). Wenn wir insbesondere an die Zerlegung einer Strecke in Punkte denken, so sehen wir jetzt zumindest, daß die Sache nicht so einfach ist, wie wir zuerst naiv angenommen haben. Die Strecke besteht sehr wohl aus Punkten, aber es sind überabzählbar viele. Wenn wir abzählbar viele Punkte zusammenfügen, dann ist deren Gesamtlänge Null. Erst das überabzählbare Kontinuum von Punkten macht aus einer Strecke ein Gebilde positiver Länge.

Anhang: Zwei Beispiele für das Unendliche

A Die unendliche Bibliothek

An dieser Stelle noch einen kurzen Exkurs in ein Gebiet, welches einen gewissen Zusammenhang mit den Problemen dieses Unendlichen hat und welches in der Kulturgeschichte immer wieder auftrat. In seinem Buch *Die Suche nach der vollkommenen Sprache* schildert Umberto Eco verschiedene Ansätze, „automatisch“, also gewissermaßen mit einem Computer, Wissen zu generieren [14]. Wir hatten schon Leibniz kennengelernt mit seiner *ars inveniendi*. Der katalanische Dichter und Mystiker Raimundus Lullus (1235 – 1315) hatte bereits versucht, durch mechanische Geräte Wahrheiten zu finden. In dem Buch *Gullivers Reisen* von Jonathan Swift (1667 – 1745) [34, Dritter Teil, Fünftes Kapitel] wird ein Besuch in der Akademie von Lagado geschildert:

Der erste Professor, den ich sah, befand sich in einem großen Zimmer und war von vierzig Schülern umgeben. Nach der gewöhnlichen Begrüßung bemerkte er, daß ich ernstlich einen Rahmen betrachtete, welcher den größten Teil des Zimmers in Länge und Breite ausfüllte, und sagte: ich wundere mich vielleicht, daß er sich mit einem Projekt beschäftige, die spekulativen Wissenschaften durch praktische und mechanische Operationen zu verbessern. Die Welt werde aber bald die Nützlichkeit dieses Verfahrens bemerken. Er schmeichle sich mit dem Gedanken, daß eine höhere und edlere Idee noch nie aus dem Gehirn eines Menschen entsprungen sei. Ein jeder wisse, wie viel Mühe die gewöhnliche Erlernung der Künste und Wissenschaften erfordere; er sei überzeugt, durch seine Erfindung werde die ungebildetste Person bei mäßigen Kosten und bei nur einiger körperlicher Anstrengung Bücher über Philosophie, Poesie, Staatskunst, Gesetze, Mathematik und Theologie ohne die geringste Hilfe von Geist oder Studium schreiben können. Er führte mich an einen Rahmen, wo alle seine Schüler in Reihen aufgestellt waren. Der Rahmen war zwanzig Quadratfuß groß und befand sich in der Mitte des Zimmers. Die Oberfläche bestand aus einzelnen Holzstücken von der Dicke eines Würfels, von denen jedoch einzelne größer als die anderen waren. Sie waren sämtlich durch dünne Drähte miteinander verknüpft. Diese Holzstücke waren an jeder Fläche mit überklebtem Papier bedeckt, und auf diesen Papieren waren alle Worte der Landessprache, und zwar in den verschiedenen Modis, in Konjugationen und Deklinationen, jedoch ohne alle Ordnung aufgeschrieben. Der Professor bat mich, achtzugeben, da er nun seine Maschine in Bewegung setzen wolle. Jeder Zögling nahm auf seinen Befehl einen eisernen Griff zur Hand, von denen vierzig am Rande des Rahmens befestigt waren. Durch eine plötzliche Umdrehung wurde dann die ganze Anordnung der Wörter verändert. Alsdann befahl er sechsunddreißig der jungen Leute, die verschiedenen Zeilen langsam zu lesen, und wann sie drei oder vier Wörter herausgefunden hatten, die einen Satz bilden konnten, diktierten sie dieselben den vier anderen, welche sie niederschrieben. Diese Arbeit wurde drei- oder viermal wiederholt. Die Maschine war aber so eingerichtet, daß die Wörter bei jeder Umdrehung einen neuen Platz einnahmen, sobald der Holzwürfel sich von oben nach unten drehte.

Sechs Stunden mußten die Schüler täglich bei dieser Arbeit zubringen. Der Professor zeigte mir mehrere Folianten, welche auf diese Weise mit Bruchstücken von Sätzen gefüllt waren und die er zusammenstellen wollte. Aus diesem reichen Material werde er der Welt ein vollständiges System aller Wissenschaften und Künste geben; ein Verfahren, das er jedoch verbessern und schneller beendigen könne, wenn das Publi-

kum ein Kapital zusammenbringen wolle, um fünfhundert solcher Rahmen in Lagado zu errichten, und wenn man die Unternehmer veranlassen werde, ihre verschiedenen Sammlungen zu einer gemeinsamen zu vereinigen.

Er gab mir die Versicherung, diese Erfindung habe schon von Jugend auf alle seine Gedanken in Anspruch genommen; er habe seinen Rahmen so eingerichtet, daß er den ganzen Sprachreichtum umfasse, und sogar das allgemeine Verhältnis berechne, welches in Büchern hinsichtlich der Anzahl von Partikeln, Haupt- und Zeitwörtern und anderen Satzteilen statfinde.

Der argentinische Schriftsteller und Philosoph Jorge Luis Borges (1899 – 1986) schildert in seinem Essay *Die Bibliothek von Babel* eine unendliche Bibliothek, die ihre Existenz höchstwahrscheinlich dem Fleiße des Professors aus Lagado verdankt. Die bekannte Bibliothek in Ecos *Der Name der Rose* ist der Borgesschen Bibliothek recht ähnlich. Es befinden sich in der Bibliothek von Babel unzählige – möglicherweise sogar unendlich viele – Bücher, und ein Problem ist, unter allen den sinnlosen Druckerzeugnissen die wirklich wichtigen und interessanten Bücher herauszufinden. Eine kleine Kostprobe aus dem Essay:

Vor fünfhundert Jahren stieß der Chef eines höheren Sechsecks²⁾ auf ein Buch, das so verworren war wie alle übrigen, das jedoch zwei Seiten gleichlautender Zeilen von wahrscheinlicher Lesbarkeit aufwies. Er zeigte seinen Fund einem ambulanten Entzifferer, der nach der Sprachform auf Portugiesisch riet; andere deuteten ihn auf Jiddisch. Vor Ablauf eines Jahrhunderts ließ sich der Sprachcharakter eindeutig bestimmen: es handelte sich um einen samojedisch-litauischen Dialekt des Guarani mit einem Einschlag von klassischem Arabisch. Auch der Inhalt wurde entziffert: es waren drei Figuren der kombinatorischen Analysis, dargestellt an Beispielen sich ins Unendliche wiederholender Variationen.

Bei Borges haben alle Bücher der Bibliothek ein festes Format: „jedes Buch besteht aus einhundertundzehn Seiten, jede Seite aus vierzig Zeilen, jede Zeile aus achtzig Buchstaben von schwarzer Farbe“. Damit ist aber die Gesamtzahl der Bücher endlich, wenn sie auch ungeheuer groß ist. Man kann leicht abschätzen, daß unser gesamtes bekanntes Universum nicht Platz genug hätte für alle diese Bücher (dies ist eine Situation, die jedem Liebhaber von Büchern wohlvertraut ist). Wir wollen uns überlegen, was gechähe, wenn wir diese Beschränkung aufheben und beliebige dicke Bücher zulassen. Man könnte sich etwa vorstellen, daß man eine Katalognummer in einen Computer eingibt, und dieser erzeugt dann für das zu dieser Nummer gehörige Buch jeweils die Seite, die wir gerade lesen wollen. Man kann sich vorstellen, daß es einen Algorithmus gibt, der alle diese Bücher des Lullus, Leibniz, Swift, Eco oder Borges systematisch erzeugen kann. Hier werden wir sofort von dem eiskalten Hauch des Unendlichen getroffen. Man kann nämlich zeigen – natürlich nach dem Diagonalverfahren von Georg Cantor (1845 – 1918) (Seite 18) – daß die Bibliothek nicht *alle* Bücher enthalten kann. Angenommen, wir hätten die Bücher der Bibliothek nach irgendeinem Schema geordnet. Wir könnten nun alle Bücher in eine Liste eintragen, in der ersten Zeile steht das erste Buch (die Zeile wäre dann eben recht lang), in der zweiten das zweite Buch und so weiter. In Abbildung 2 ist der Anfang einer solchen Liste dargestellt.

Nun konstruieren wir ein Buch, welches mit Sicherheit noch nicht in der Liste aufgeführt ist. Dazu nehmen wir den ersten Buchstaben des ersten Buches, in unserem Beispiel ein A. Wir beginnen

²⁾Ursprünglich kam auf je drei Sechsecke ein Mensch. Fälle von Selbstmord und Lungenkrankheit haben dieses Maßverhältnis zerstört. Unsäglich schwermütige Erinnerung: manchmal bin ich nächtelang über blanke Gänge und Treppen geirrt, ohne einen einzigen Bibliothekar zu finden.

Am Anfang schuf Gott Himmel und Erde. Und die Erde war wüst und leer,
 Müßiger Leser. – Ohne Schwur magst du mir glauben, daß ich wünsche, dieses
 Tief ist der Brunnen der Vergangenheit. Sollte man ihn nicht unergründlich
 I wish either my father or my mother, or indeed both of them, as they were
 Ich wollte, entweder mein Vater oder meine Mutter oder lieber alle beide –
 Es eröffnet sich zu dieser unserer Zeit (von welcher man glaubt, daß es die
 Die Eltern lagen schon und schliefen, die Wanduhr schlug ihren einförmigen
 Die Nachtstunde schlug; ich hüllte mich in meine abenteuerliche Vermummung
 Jemand mußte Josef K. verleumdet haben, denn ohne daß er etwas Böses
 Mein Vater war ein Bauernsohn aus einem uralten Dorfe, welches seinen
 Das Rad an meines Vaters Mühle brauste und rauschte schon wieder recht
 Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Dingen zu einem Ganzen, d. h. zu

Aüeiwöthur i → Dinosaurier

Abbildung 2: Anfänge von Büchern.

unser neu zu schreibendes Buch mit einem anderen Buchstaben, etwa mit einem D. Als zweiten Buchstaben unseres Buches wählen wir einen, der vom zweiten Buchstaben des zweiten Buches der Liste verschieden ist, und so weiter. Wir erhalten damit eine Folge von Buchstaben, von der wir sicher sein können, daß sie unter den ersten untersuchten Büchern nicht vorkommen. Denken wir uns jetzt diesen Prozeß ins Unendliche fortgesetzt – oder doch wenigstens so weit, daß die vorhandenen Bücher aufgebraucht sind – dann haben wir in der Tat ein Buch, welches sich von jedem Buch der Liste in mindestens einem Buchstaben unterscheidet. Wir haben also gezeigt, daß es keinen solchen Katalog aller Bücher geben kann!

Diese Situation der unendlichen Bibliothek erinnert an das „deutliche Buch“ des Koran [25, 34 4]:

... Vor ihm, welcher die Geheimnisse kennt, vor ihm ist nichts verborgen, was in den Himmeln und auf Erden ist, und sei es auch nur so leicht wie eine Ameise; sei es aber auch noch kleiner oder auch schwerer, so ist es doch in dem deutlichen Buche seiner Ratschlüsse aufgezeichnet;

Unsere Konstruktion hat vielleicht gezeigt, daß dieses wahrhaft unendliche Buch nicht in unserer Liste enthalten sein muß, es kann zu der überwiegenden Mehrheit derjenigen Bücher gehören, für die in unserem Katalog kein Platz vorhanden ist.

B Blöcke stapeln

Wir hatten am Anfang unserer heutigen Veranstaltung die harmonische Reihe kennengelernt (Seite 3). Diese Reihe divergiert, das heißt, die Partialsummen werden unbegrenzt immer größer.

An dieser Reihe kann man sehr hübsch sehen, daß wir nicht nur nicht in der Lage sind, mit dem Unendlichen umzugehen, unsere Vorstellung versagt auch, wenn wir nur mit großen Zahlen umgehen müssen.

Wir nehmen zwei gleichgroße Blöcke her und versuchen, den zweiten so auf den ersten zu legen, daß er nicht herunterfällt und daß er möglichst weit überhängt. Es ist wohl ganz klar, daß das so lange gut geht bis der obere Block genau zur Hälfte übersteht. Wir versuchen dann, die beiden aufeinandergestapelten Blöcke so auf einen dritten zu legen, daß der oberste Block so weit wie möglich überhängt. Dazu muß man den gemeinsamen Schwerpunkt der beiden ersten Blöcke ausrechnen, er liegt bei $\frac{3}{4}$ der Länge des unteren Blocks. Wenn wir die beiden Blöcke so auf den dritten legen, daß der Schwerpunkt der beiden ersten Blöcke gerade noch auf dem dritten liegt, dann muß zweite Block den untersten um $\frac{1}{4}$ der Blocklänge überragen. Nun können wir das Ganze noch weiter treiben und die drei Blöcke auf einen vierten legen. Wenn der unterste der drei den vierten um $\frac{1}{6}$ überragt, geht noch alles gut. Wenn wir immer so weiter machen, dann steht der oberste der Blöcke um

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \cdots = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \right)$$

über, wobei die drei Punkte sagen sollen, daß man dies so lange weiter treiben soll, als man Blöcke aufeinander setzt. Es ist nicht schwer, zu erraten, wie es weiter gehen muß (siehe Abbildung 3).

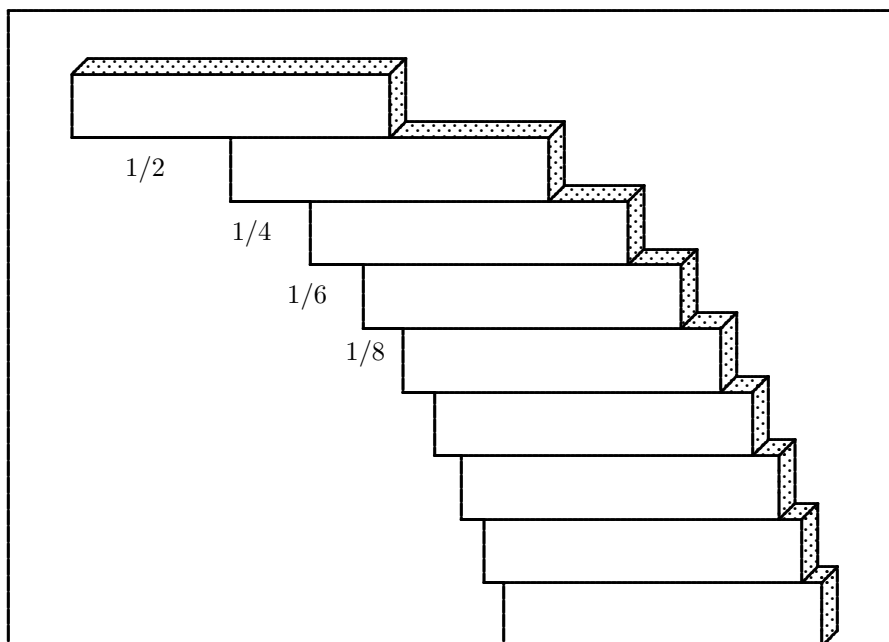


Abbildung 3: Stapel von Blöcken.

Man kann ein kleines Experiment ausführen. dazu legt man eine Münze so auf den Tisch, daß sie um $\frac{1}{8}$ ihres Durchmessers übersteht. Um konkrete Zahlen zu haben: Ein Euro hat einen Durchmesser von 2.32 cm. Ein Achtel dieses Wertes ist 0.29 cm oder 2.9 beziehungsweise knapp 3 mm. Darauf legt man eine Münze, die über die erste um $\frac{1}{6}$ ihres Durchmessers, bei der Euro-Münze also um 0.387 cm oder 3.87 mm über den äußersten Punkt der ersten Münze hinausragt. Darauf kommt eine Münze, die die zuletzt hinzugefügte um $\frac{1}{4}$ des Durchmessers, also um 0.58

cm oder 5.8 mm überragt. Schließlich packen wir auf diesen Stapel eine Münze, die über die letzte Münze um einen halben Münzdurchmesser oder 11.6 mm hinausragt. Dies ist in Abbildung 4 – von oben gesehen – dargestellt. Wie man sieht, befindet sich die letzte Münze völlig außerhalb des Tisches [33, Aufgabe 92].

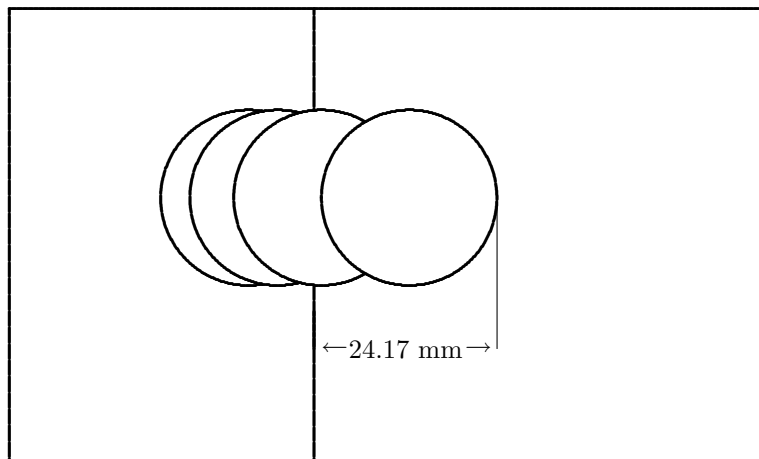


Abbildung 4: Stapelung von vier Münzen über eine Tischkante.

Wenn man die vier Münzen wie beschrieben übereinanderstapeln möchte, dann ist es sehr wichtig, die angegebenen Abstände möglichst genau einzuhalten, sonst stürzt die letzte Münze ab. Wenn man sie perfekt einhalten würde – und das würde für die erste Münze heißen, daß man sie um 2.9 mm über die Tischkante überstehen ließe, dann müßte man schon sehr genau messen können. Für unsere Zwecke genügt es, wenn sie um knapp 3 mm übersteht. Ebenso kann man mit einem gewöhnlichen Lineal kaum 3.87 mm abmessen. Auch hier können wir uns auf etwas weniger als 4 mm einigen. Die Abstände dürfen auf keinen Fall zu groß werden, und es genügt, wenn man sie auf etwa einen halben Millimeter genau einhält.

Ich habe einen kleinen Trick benutzt und mir aus Pappe eine Schablone wie in Abbildung 5 ausgeschnitten.

Man kann diesen überraschenden kleinen Trick leicht ausführen, wenn man eine ruhige Hand besitzt.

Nun eine ähnliche Überlegung. Ein Rommé-Spiel enthält 55 Karten. Man kann leicht ausrechnen, wie weit die oberste Karte überstehen würde, wenn man die Karten des Rommé-Spiels geschickt aufeinanderlegen würde. Man erhält einen Überhang von etwa $2\frac{1}{4}$ Karten. Es wird behauptet [19, S. 159], daß man – mit etwas Geschick und ruhiger Hand – leicht einen Überhang von 2 Karten, das sind 9 cm, erzielen kann.

Wir wissen, daß man den Überhang beliebig groß machen kann, denn die harmonische Reihe divergiert. Man hat ausgerechnet, daß ein Überhang von 50 Kartenlängen entsteht [19, S. 159]. Eine normale Spielkarte hat eine Höhe von 8.75 cm. 50 Kartenlängen entsprechen demgemäß 4.375 m, das heißt, daß ein solcher Kartenstapel fast 5 m über die Tischkante herausragen würde. Das Problem ist nur, daß man sehr viele Karten brauchen würde. Nach den Berechnungen eines klugen Mathematikers bräuchte man

15 092 688 622 113 788 323 693 563 264 538 101 449 859 497

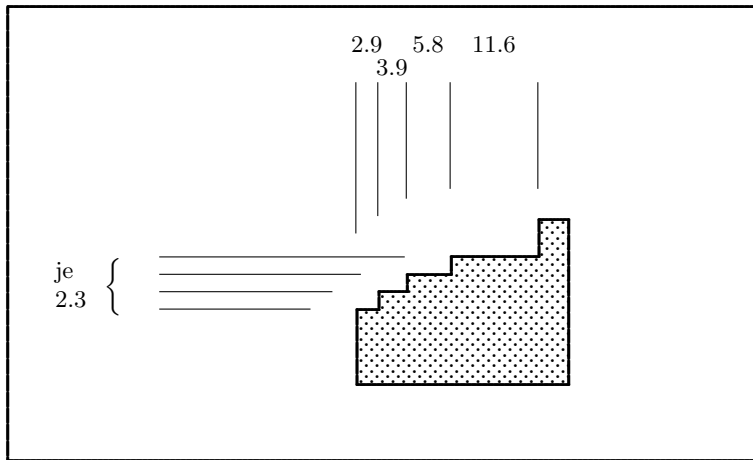


Abbildung 5: Schablone für den Münzentrück (Maßangaben in mm).

Karten!

Der Stapel, der so viele Karten enthält, wäre wahrhaft unvorstellbar hoch. Man kann die Höhe auf einem Computer oder einen Taschenrechner leicht ausrechnen. Die Anzahl der Kilometer, die der Stapel hoch ist, beginnt mit einer 5 und hat dann 36 weitere Dezimalstellen, also etwa $5 \cdot 10^{36}$ km. Wenn wir davon ausgehen, daß das beobachtbare Universum einen Durchmesser von etwa $2 \cdot 10^{23}$ km hat, dann würde man 10^{13} Universen benötigen, um den Kartenstapel aufzunehmen. Eine Billion ist eine Million Millionen, die Zahl der Universen betrüge demnach 10 Billionen!

Literatur

- [1] St. Banach et A. Tarski. Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruents. *Fundamenta Mathematicae*, 6:244–277, 1924.
- [2] George Berkeley. *Schriften über die Grundlagen der Mathematik und Physik. Eingeleitet und übersetzt von Wolfgang Breidert*. suhrkamp taschenbuch wissenschaft 496. Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main, 1985.
- [3] George Berkeley. *Versuch über eine neue Theorie des Sehens und Die Theorie des Sehens oder der visuellen Sprache ...verteidigt und erklärt. Übersetzt und herausgegeben von Wolfgang Breidert unter Mitwirkung von Horst Zehe*. Philosophische Bibliothek, Band 399. Felix Meiner Verlag, Hamburg, 1987.
- [4] Bernard Bolzano. *Paradoxien des Unendlichen. Herausgegeben aus dem schriftlichen Nachlasse des Verfassers von Dr. Fr. Přihonsky*. Der philosophischen Bibliothek Band 99. Verlag von Felix Meiner (Bei C. H. Reclam sen., Leipzig, 1851), Leipzig, 1920.
- [5] Moritz Cantor. *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Dritter Band: Von 1668 – 1758*. Verlag und Druck von B. G. Teubner, Leipzig · Berlin, zweite Auflage, 1901.
- [6] Moritz Cantor. *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Erster Band: Von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr.* Verlag und Druck von B. G. Teubner, Leipzig · Berlin, vierte Auflage, 1922.
- [7] Wilhelm Capelle, Hrsg. *Die Vorsokratiker. Die Fragmente und Quellenberichte übersetzt und eingeleitet von Wilhelm Capelle*. Kröners Taschenausgabe, Band 119. Alfred Kröner Verlag, Stuttgart, 1968.
- [8] Titus Lucretius Carus. *Von der Natur der Dinge*. Römische Klassiker in Reclams Universal-Bibliothek Nr. 4257–59. Verlag von Philipp Reclam jun., Leipzig, Zweite, berichtigte Auflage, 1927. Nach der Übersetzung von K. L. von Knebel herausgegeben von Prof. Dr. Otto Güthling.
- [9] Paul J. Cohen. The independence of the continuum hypothesis, I. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, 50:1143–1148, 1963.
- [10] Paul J. Cohen. The independence of the continuum hypothesis, II. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, 51:105–110, 1964.
- [11] Martin Davis and Reuben Hersh. Nonstandard analysis. *Scientific American*, 226(6):78–86, June 1972.
- [12] A. K. Dewdney. Computer-Kurzweil: Grundlagenforschung zahlt sich aus. Ein findiger Kopf hat einen höchst abstrakten mathematischen Satz zu Geld gemacht: Das Banach-Tarski-Paradox. *Spektrum der Wissenschaft*, S. 12–15, April 1990.
- [13] Ulrich Eckhardt. Im Chaos steckt ein kreativer Kern. In Heiner Adamski, Axel Denecke und Wilfried Hartmann, Hrsg., *Der „Gott“ der Fakultäten. Gott der Wissenschaft – Gott, der Wissen schafft?*, Hamburger Theologische Studien, Band 21, pages 139–155. LIT Verlag, Münster – Hamburg – London, 2000.
- [14] Umberto Eco. *Die Suche nach der vollkommenen Sprache. Aus dem Italienischen von Burkhardt Kroeber*. Deutscher Taschenbuch Verlag, München, 1997.

- [15] Albert Einstein. *Mein Weltbild. Herausgegeben von Carl Seelig, Neue, vom Verfasser durchgesehene und wesentlich erweiterte Auflage.* Ullstein Buch Nr. 65. Ullstein GmbH, Frankfurt/M – Berlin – Wien, 1970.
- [16] Friedrich Engels. *Herrn Eugen Dührings Umwälzung der Wissenschaft («Anti-Dühring»).* Bücherei des Marxismus-Leninismus, Band 3. Dietz Verlag, Berlin, 15. Auflage, 1960.
- [17] Reinhard Finster und Gerd van den Heuvel. *Gottfried Wilhelm Leibniz in Selbstzeugnissen und Bilddokumenten.* rowohlts monographien 50481. Rowohlt Taschenbuch Verlag, Reinbek bei Hamburg, 5. Auflage, Januar 2005.
- [18] Galileo Galilei. *Sidereus Nuncius. Nachricht von neuen Sternen. Dialog über die Weltsysteme (Auswahl). Vermessung der Hölle Dantes. Marginalien zu Tasso. Herausgegeben und eingeleitet von Hans Blumenberg.* sammlung insel 1. Insel-Verlag, Frankfurt am Main, 1965.
- [19] Martin Gardner. *Mathematisches Labyrinth. Neue Probleme für die Knobelgemeinde.* Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1979.
- [20] K. Gödel. The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis. *Proc. nat. Acad. Sci. USA*, 24:556–557, 1938.
- [21] Robert Havemann. *Dialektik ohne Dogma? Naturwissenschaft und Weltanschauung. Hat Philosophie den modernen Naturwissenschaften bei der Lösung ihrer Probleme geholfen? Naturwissenschaftliche Aspekte, philosophische Probleme.* Rororo; 683 : rororo aktuell. Rowohlt Taschenbuch Verlag GmbH, Reinbek bei Hamburg, 1964.
- [22] Wolfram Heitsch. *Mathematik und Weltanschauung.* Akademie-Verlag, Berlin, 2., ergänzte Auflage, 1978.
- [23] David Hilbert. Über das Unendliche. *Mathematische Annalen*, 95:161–190, 1926.
- [24] Eberhard Knobloch. Galilei und das Unendliche. *Welt Online*, 11. August 2008.
[HTTP://WWW.WELT.DE/DEBATTE/KOLUMNEN/F_NF_MINUTEN_MATHEMATIK/ARTICLE6062080/DER-MATHEMATIKER-GALILEI-UND-DAS-UNENDLICHE.HTML](http://www.welt.de/DEBATTE/KOLUMNEN/F_NF_MINUTEN_MATHEMATIK/ARTICLE6062080/DER-MATHEMATIKER-GALILEI-UND-DAS-UNENDLICHE.HTML).
- [25] *Der Koran. Das heilige Buch des Islam. Nach der Übertragung von Ludwig Ullmann neu bearbeitet und erläutert von L. W.-Winter.* Wilhelm Goldmann Verlag, München, 1959.
- [26] Gottfried Wilhelm Leibniz. *Monadologie. Französisch und deutsch. Zeitgenössische Übersetzung von Heinrich Köhler. Mit der »Lebens-Beschreibung des Herrn von Leibniz verfaßt von dem Herrn Fontenelle«.* Herausgegeben von Dietmar Till. insel taschenbuch 1832. Insel Verlag, Frankfurt am Main und Leipzig, 1996.
- [27] Georg Christoph Lichtenberg. *Schriften und Briefe. Erster Band: Sudelbücher, Zweiter Band: Sudelbücher II. Materialhefte, Tagebücher, Dritter Band: Aufsätze, Entwürfe, Gedichte, Erklärung der Hogarthschen Kupferstiche, Vierter Band: Briefe, Schriften und Briefe. Kommentar zu Band I und Band II von Wolfgang Promies, Schriften und Briefe. Kommentar zu Band III.* Herausgegeben von Wolfgang Promies. Zweitausendeins, Frankfurt am Main, 6. Auflage 1998.
- [28] Karl Marx. *Mathematische Manuskripte. Herausgegeben, eingeleitet und kommentiert von Wolfgang Endemann.* Scriptor-Taschenbücher Sozialwissenschaften; S 10: Beiträge zur Theorie der Gesellschaft. Scriptor-Verlag, Kronberg, Ts., 1974.

- [29] William I. McLaughlin. Eine Lösung für Zenons Paradoxien. *Spektrum der Wissenschaft*, 66–71, Januar 1995.
- [30] Herbert Meschkowski. *Wandlungen mathematischen Denkens. Eine Einführung in die Grundlagenprobleme der Mathematik*. R. Piper, München, Zürich, 5. Auflage, 1985.
- [31] Platon. *Sämtliche Werke in drei Bänden*. Jakob Hegner Verlag, Köln und Olten, 5. Auflage, 1967.
- [32] Roland Sprague. *Unterhaltsame Mathematik. Neue Problem – überraschende Lösungen*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1961.
- [33] Hugo Steinhaus. *100 neue Aufgaben aus der elementaren Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Zürich und Frankfurt/Main, 1973.
- [34] Jonathan Swift. *Gullivers Reisen. Reisen in verschiedene fernliegende Länder der Erde von Lemuel Gulliver, erst Wundarzt, später Kapitän verschiedener Schiffe*. Die Fischer Bibliothek der hundert Bücher, Exempla classica 15. Fischer Bücherei KG, Frankfurt am Main und Hamburg, 1960.
- [35] István Szabó. *Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen*. Wissenschaft und Kultur, Band 32. Birkhäuser Verlag, Basel · Boston · Berlin, Korrigierter Nachdruck der dritten, korrigierten und erweiterten Auflage, 1996. Herausgegeben von Peter Zimmermann und Emil A. Fellmann.
- [36] *Das Unendliche. Spektrum der Wissenschaft Special*. Spektrum der Wissenschaft, Verlagsgesellschaft mbH, Heidelberg, Mai 2001.
- [37] Christian Freiherr von Wolff. *Vollständiges mathematisches Lexicon, Darinnen alle Kunst-Wörter und Sachen, Welche In der erwegenden und ausübenden Mathesi vorzukommen pflegen, deutlich erkläret; Überall aber Zur Historie der Mathematischen Wissenschaften dienliche Nachrichten eingestreuet, Und die besten und auserlesensten Schrifften, welche iede Materie gründlich abgehandelt, angeführet: Ferner auch Die Mund- und Redens-Arten derer Markscheider auch hieher gehöriger Künstler und Handwercker beschrieben; Und endlich alles zum Nutzen so wohl gelehrter als ungelehrter Liebhaber der vortrefflichen Mathematick eingerichtet worden. Nebst XXXVI Kupffer-Tabellen*. Bey Joh. Friedrich Gelditschens sel. Sohn, Leipzig, 1734.
- [38] Hermann Weyl. *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*. Scientia Nova. R. Oldenbourg Verlag, München, 6. Auflage, 1990.